

2.3

Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδας 100 – 104

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.

Έξι διαδοχικοί άρτιοι αριθμοί έχουν μέση τιμή 15. Να βρείτε τους αριθμούς και τη διάμεσό τους.

Λύση

Αν x είναι ο ποιο μικρός άρτιος τότε οι ζητούμενοι αριθμοί θα είναι οι $x, x+2, x+4, x+6, x+8, x+10$

$$\text{Η μέση τιμή τους είναι } 15 \Rightarrow 15 = \frac{x+x+2+x+4+x+6+x+8+x+10}{6}$$

$$90 = 6x + 30$$

$$6x = 60 \Rightarrow x = 10$$

Άρα οι αριθμοί είναι οι 10, 12, 14, 16, 18, 20

Επειδή το πλήθος των αριθμών είναι άρτιος αριθμός (6) και έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, διάμεσος αυτών είναι το ημίθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

$$\text{Δηλαδή } \delta = \frac{14+16}{2} = 15$$

2.

Έχουμε ένα δείγμα $n = 10$ παρατηρήσεων, όπου κάθε μία μπορεί να πάρει κάποια από τις τιμές 1 ή 2 ή 3. Είναι δυνατόν η μέση τιμή να είναι

- α) 1 β) 4 γ) 1,8 ;

Λύση**α)**

Αν όλες οι παρατηρήσεις είναι ίσες με 1 τότε η μέση τιμή τους θα είναι 1

β)

Όπως είναι φανερό η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερη ή ίση της μικρότερης παρατήρησης και μικρότερη ή ίση της μεγαλύτερης παρατήρησης. Άρα 4 δεν μπορεί να είναι.

γ)

Έστω v_1, v_2, v_3 οι συχνότητες των τιμών 1, 2, 3 αντίστοιχα.

$$\text{Θα πρέπει } 1,8 = \frac{v_1 \cdot 1 + v_2 \cdot 2 + v_3 \cdot 3}{10} \quad \text{και} \quad v_1 + v_2 + v_3 = 10$$

$$18 = v_1 + 2v_2 + 3v_3 \quad \text{και} \quad v_1 = 10 - v_2 - v_3$$

$$18 = 10 - v_2 - v_3 + 2v_2 + 3v_3 \quad \text{και} \quad v_1 + v_2 + v_3 = 10$$

$$8 = v_2 + 2v_3 \quad \text{και} \quad v_1 + v_2 + v_3 = 10$$

- Για v_2 περιττό, από την εξίσωση $8 = v_2 + 2v_3$ έχουμε άτοπο, αφού δίνει μη ακέραια τιμή για το v_3 .
- Για v_2 άρτιο, δίνουμε τιμές στο v_2 και βρίσκουμε τους v_3, v_1 .
 - $v_2 = 0$ τότε $v_3 = 4$ και $v_1 = 6$.
Οι παρατηρήσεις θα είναι 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3
 - $v_2 = 2$ κ.λ.π.

Σημείωση. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αντιμετωπίσουμε και το α)

3.

Ένας επενδυτής επένδυσε το ίδιο ποσό χρημάτων σε 8 διαφορετικές μετοχές του χρηματιστηρίου. Κατά τη διάρκεια του προηγούμενου έτους οι μετοχές είχαν τις παρακάτω εκατοστιαίες μεταβολές στην αξία τους :

5, 16, -10, 0, 27, 14, -20, 34. Να βρεθεί η μέση εκατοστιαία απόδοση της επένδυσης.

Λύση

Είναι φανερό ότι η μέση εκατοστιαία απόδοση της επένδυσης ισούται με την μέση τιμή των παραπάνω μεταβολών.

$$\text{Οπότε } \bar{x} = \frac{5+16-10+0+27+14-20+34}{8} = \frac{66}{8} = 8,25\%$$

4.

Το μέσο ύψος 9 καλαθοσφαιριστών μιας ομάδας είναι 205 cm

- α) Για να “ψηλώσει” την ομάδα ο προπονητής πήρε ακόμα έναν παίκτη με ύψος 216 cm. Ποιο είναι το μέσο ύψος της ομάδας τώρα;
 β) Αν ήθελε να ψηλώσει την ομάδα στα 208 cm, πόσο ύψος έπρεπε να έχει ο καλαθοσφαιριστής που πήρε ;

Λύση

α)

Αν x_1, x_2, \dots, x_9 είναι τα ύψη των 9 καλαθοσφαιριστών τότε, από την

υπόθεση έχουμε $205 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_9}{9}$ (1).

Μετά την πρόσληψη του νέου παίκτη η μέση τιμή του ύψους είναι

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_9 + 216}{10} \quad (2)$$

Ομως από την σχέση (1) έχουμε $x_1 + x_2 + \dots + x_9 = 205 \cdot 9 = 1845$

Οπότε η σχέση (2) γίνεται $\bar{x} = \frac{1845 + 216}{10} = 206,1 \text{ cm}$

β)

Αν x_{10} είναι το ύψος του νέου παίκτη τότε πρέπει να ισχύει

$$208 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_9 + x_{10}}{10} \Leftrightarrow 208 = \frac{1845 + x_{10}}{10}$$

$$1845 + x_{10} = 2080$$

$$x_{10} = 2080 - 1845$$

$$x_{10} = 235$$

5.

Η μέση ηλικία 18 αγοριών και 12 κοριτσιών είναι 15,4 έτη. Εάν η μέση ηλικία των αγοριών είναι 15,8 έτη, να βρείτε την μέση ηλικία των κοριτσιών.

Λύση

Έστω x_1, x_2, \dots, x_{18} οι ηλικίες των αγοριών και $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{12}$ οι ηλικίες των κοριτσιών.

$$\text{Τότε } 15,4 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{18} + \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_{12}}{30} \Rightarrow$$

$$15,4 \cdot 30 = x_1 + x_2 + \dots + x_{18} + \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_{12}$$

$$462 = x_1 + x_2 + \dots + x_{18} + \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_{12} \quad (1)$$

$$\text{και } 15,8 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{18}}{18}$$

$$15,8 \cdot 18 = x_1 + x_2 + \dots + x_{18}$$

$$284,4 = x_1 + x_2 + \dots + x_{18} \quad (2)$$

$$(1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} 462 = 284,4 + \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_{12}$$

$$\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_{12} = 462 - 284,4 = 177,6$$

$$\frac{\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_{12}}{12} = \frac{177,6}{12} = 14,8.$$

Άρα η μέση ηλικία των κοριτσιών είναι 14,8 έτη.

6.

Σε μία κάλπη υπάρχουν άσπρες, μαύρες, κόκκινες και πράσινες μπάλες σε αναλογία 10% , 20% , 30% και 40% αντίστοιχα. Μία άσπρη μπάλα ζυγίζει 10 gr, μία μαύρη 11gr, μία κόκκινη 12 gr και μία πράσινη 13 gr. Να βρείτε τη μέση τιμή, και τη διάμεσο του βάρους για όλες τις μπάλες, αν ξέρουμε ότι μέσα στην κάλπη υπάρχουν

α) 10 μπάλες, **β)** 20 μπάλες, **γ)** δε γνωρίζουμε πόσες μπάλες υπάρχουν στην κάλπη

Λύση**α)**

Όταν στην κάλπη υπάρχουν συνολικά 10 μπάλες, τότε με βάση τις δοσμένες

αναλογίες θα υπάρχουν $\frac{10}{100} \cdot 10 = 1$ άσπρη, $\frac{20}{100} \cdot 10 = 2$ μαύρες

$\frac{30}{100} \cdot 10 = 3$ κόκκινες, $\frac{40}{100} \cdot 10 = 4$ πράσινες

Με βάση τα δοσμένα βάρη για κάθε μπάλα, η μέση τιμή του βάρους είναι

$$\bar{x}_\alpha = \frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 13}{10} = \frac{120}{10} = 12 \text{ gr}$$

Οι παρατηρήσεις διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά είναι οι

10 , 11 , 11 , 12 , 12 , 12 , 13 , 13 , 13 , 13

Επειδή το πλήθος τους είναι άρτιος αριθμός, η διάμεσός τους δ_α θα είναι ίση με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή της $5^{\text{ης}}$ και της $6^{\text{ης}}$.

$$\text{Άρα } \delta_\alpha = \frac{5^{\text{η}} + 6^{\text{η}}}{2} = \frac{12 + 12}{2} = 12 \text{ gr}$$

β)

Όταν οι μπάλες είναι 20, τότε εργαζόμενοι όπως προηγουμένως βρίσκουμε ότι στην κάλπη υπάρχουν 2 άσπρες, 4 μαύρες, 6 κόκκινες και 8 πράσινες μπάλες, οπότε η

μέση τιμή του βάρους είναι $\bar{x}_\beta = \frac{2 \cdot 10 + 4 \cdot 11 + 6 \cdot 12 + 8 \cdot 13}{20} = \frac{240}{20} = 12 \text{ gr}$.

Οι παρατηρήσεις είναι οι

10, 10, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13

η διάμεσος δ_β είναι ίση με το ημιάθροισμα των $10^{\text{ης}}$ και $11^{\text{ης}}$ παρατηρήσεων,

δηλαδή $\delta_\beta = \frac{10^{\text{η}} + 11^{\text{η}}}{2} = \frac{12 + 12}{2} = 12 \text{ gr}$

γ)

Αφού δεν ξέρουμε πόσες συνολικά μπάλες είναι στην κάλπη αλλά ξέρουμε τα ποσοστά τους δηλαδή της σχετικές συχνότητες του κάθε είδους, θα βρούμε την μέση τιμή από τον τύπο με τα f_i .

Οι σχετικές συχνότητες των μπαλών με βάση τα δοσμένα ποσοστά είναι οι

$$f_\alpha = 0,10, \quad f_\mu = 0,20, \quad f_\kappa = 0,30, \quad f_\pi = 0,40$$

Άρα η μέση τιμή του βάρους είναι η

$$\bar{x}_\gamma = 10 \cdot 0,10 + 11 \cdot 0,2 + 12 \cdot 0,3 + 13 \cdot 0,4 = 1 + 2,2 + 3,6 + 5,2 = 12 \text{ gr}$$

Διατάσσοντας τις μπάλες σε αύξουσα σειρά βάρους με βάση τα δοσμένα ποσοστά, παρατηρούμε ότι το 50% έχουν βάρος μικρότερο ή ίσο των 12 gr και το άλλο 50% έχουν βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 12 gr. Άρα η διάμεσος και σ' αυτή την περίπτωση είναι $\delta_\gamma = 12 \text{ gr}$

7.

Η επίδοση ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα είναι 12, 10, 16, 18, 14

α) Να βρείτε την μέση επίδοση

β) Αν τα μαθήματα είχαν συντελεστές στάθμισης 2, 3, 1, 1 και 3, ποια θα ήταν η μέση επίδοση; Σε ποια μαθήματα θα έπρεπε να δώσει ιδιαίτερη προσοχή ο μαθητής;

Λύση

α)

$$\text{Η μέση επίδοση είναι } \bar{x} = \frac{12+10+16+18+14}{5} = \frac{70}{5} = 14$$

β)

Η μέση επίδοση σ' αυτή την περίπτωση είναι ίση με το σταθμικό μέσο των δοσμένων

$$\text{τιμών. Οπότε } \bar{x}' = \frac{2 \cdot 12 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 18 + 3 \cdot 14}{2+3+1+1+3} = \frac{130}{10} = 13$$

Είναι φανερό ότι, για να μεγαλώσει ο σταθμικός μέσος, ο μαθητής θα πρέπει να προσέξει τα μαθήματα που έχουν μεγάλο συντελεστή βαρύτητας, δηλαδή αυτά που έχουν συντελεστή βαρύτητας 3.

8.

Μία εταιρεία απασχολεί 5 υπαλλήλους στο τμήμα Α με μέσο μηνιαίο μισθό 1249 ευρώ, 6 υπαλλήλους στο τμήμα Β με μέσο μηνιαίο μισθό 1280 ευρώ και 4 υπαλλήλους στο τμήμα Γ με μέσο μηνιαίο μισθό 1360 ευρώ. Ποιος είναι ο μέσος μηνιαίος μισθός όλων των υπαλλήλων;

Λύση

Έστω x_1, x_2, \dots, x_5 οι μισθοί των υπαλλήλων του τμήματος Α. Τότε

$$1249 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_5}{5} \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 1249 \cdot 5 = 6245 \quad (1)$$

Έστω $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_6$ οι μισθοί των υπαλλήλων του τμήματος Β. Τότε

$$1280 = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_6}{6} \Rightarrow \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_6 = 1280 \cdot 6 = 7680 \quad (2)$$

Έστω $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ οι μισθοί των υπαλλήλων του τμήματος Γ. Τότε

$$1360 = \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4}{4} \Rightarrow \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 = 1360 \cdot 4 = 5440 \quad (3)$$

Αν \bar{x} είναι η μέση τιμή του μισθού όλων των υπαλλήλων, τότε \bar{x}

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_5 + \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_6 + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4}{15} \stackrel{(1),(2),(3)}{\Rightarrow}$$

$$\bar{x} = \frac{6245 + 7680 + 5440}{15} = \frac{19365}{15} = 1291$$

Άρα ο μέσος μηνιαίος μισθός όλων των υπαλλήλων είναι 1291 ευρώ.

9.

Η μέση τιμή και η διάμεσος πέντε αριθμών είναι 6. Οι τρεις από τους αριθμούς είναι οι 5, 8, 9. Να βρείτε τους άλλους δύο.

Λύση

Αφού το πλήθος των αριθμών είναι περιττό, η διάμεσος 6 θα είναι ο μεσαίος.

Οπότε ένας από τους αριθμούς που αναζητάμε είναι ο 6.

$$\begin{aligned} \text{Αν τώρα } x \text{ είναι ο άλλος αριθμός τότε } 6 &= \frac{5+8+9+6+x}{5} \\ 30 &= 28 + x \\ x &= 2 \end{aligned}$$

10.

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες συχνότητές τους. Η πέμπτη συχνότητα χάθηκε!

Μπορείτε να την ανακαλύψετε εάν γνωρίζετε ότι

- α) Η μέση τιμή είναι 4,4
β) Η διάμεσος είναι το 4,5

x_i	v_i
2	1
3	3
4	1
5	2
6	—
7	1

Λύση**α)**

$$\text{Θα είναι } 4,4 = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + v_5 \cdot 6 + 1 \cdot 7}{1 + 3 + 1 + 2 + v_5 + 1}$$

$$4,4 = \frac{2 + 9 + 4 + 10 + 6v_5 + 7}{8 + v_5}$$

$$4,4(8 + v_5) = 32 + 6v_5$$

$$35,2 + 4,4v_5 = 32 + 6v_5$$

$$1,6v_5 = 3,2 \Leftrightarrow v_5 = \frac{3,2}{1,6} = 2$$

β)

Αφού η διάμεσος είναι 4,5 και δεν ισούται με κάποια παρατήρηση, το πλήθος των παρατηρήσεων θα πρέπει να είναι άρτιος αριθμός.

Οι τιμές σε αύξουσα σειρά είναι 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 6, ..., 7

Παρατηρούμε ότι $4,5 = \frac{4+5}{2}$, άρα οι δύο μεσαίες παρατηρήσεις πρέπει να είναι

το 4 και το πρώτο 5.

Συνεπώς όσες τιμές είναι αριστερά του 4 τόσες θα πρέπει να είναι και δεξιά από το πρώτο 5.

Αριστερά από το 4 είναι 4 τιμές συνεπώς και δεξιά από το πρώτο 5 θα πρέπει επίσης να είναι 4 τιμές.

Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει το πλήθος των 6 να είναι 2 άρα $v_5=2$.

11.

Για την κατανομή του βαθμού των Μαθηματικών της Β΄ τάξης των 40 μαθητών και μαθητριών της Γ΄ Λυκείου του πίνακα 4 της σελίδας 64, να βρείτε :

- α) τη μέση τιμή
β) τη διάμεσο

Λύση

α)

Για να βρούμε την μέση τιμή συμπληρώνουμε τον παραπάνω πίνακα με την στήλη των $v_i \cdot x_i$.

Απόσπασμα του πίνακα 4

Βαθμός x_i	Συχν v_i
10	1
11	1
12	4
13	2
14	5
15	8
16	6
17	4
18	3
19	5
20	1

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{11} v_i \cdot x_i}{v} = \frac{618}{40} = 15,45$$

Βαθμος x_i	Συχνοτ v_i	$v_i x_i$
10	1	10
11	1	11
12	4	48
13	2	26
14	5	70
15	8	120
16	6	96
17	4	68
18	3	54
19	5	95
20	1	20
Σύνολο	40	618

β)

Αφού το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 40 (άρτιος), η διάμεσος θα ισούται με το ημίαθροισμα των 20^{ης} και 21^{ης} παρατηρήσεων.

Από τον πίνακα συχνοτήτων διαπιστώνουμε ότι η 20^η και η 21^η παρατηρήσεις

έχουν τιμή ίση με 15 άρα $\delta = \frac{15+15}{2} = 15$

12.

επισκέψεις	Συχνότητα
[0, 2)	8
2-4	12
4-6	10
6-8	6
8-10	4

Ο διπλάνος πίνακας δίνει τον αριθμό των επισκέψεων 40 μαθητών σε διάφορα μουσεία της χώρας κατά την διάρκεια ενός έτους.

Να βρείτε

α) τη μέση τιμή

β) τη διάμεσο

Λύση

Συμπληρώνουμε τον πίνακα με τη στήλη της κεντρικής τιμής x_i , του γινομένου $v_i x_i$, της $f_i\%$ και της $F_i\%$.

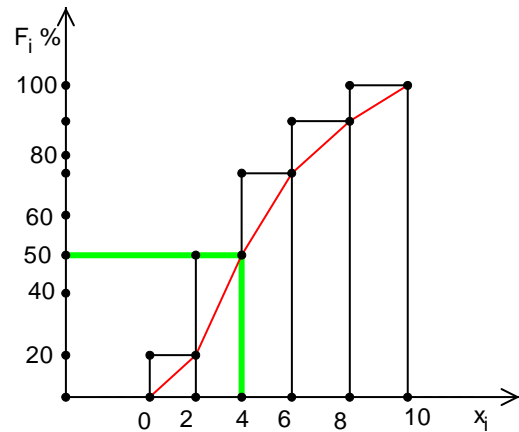
Επισκέψεις [,)	Συχν v_i	Κεντρική Τιμή x_i	$v_i x_i$	$f_i\%$	$F_i\%$
0 – 2	8	1	8	20	20
2 – 4	12	3	36	30	50
4 – 6	10	5	50	25	75
6 – 8	6	7	42	15	90
8 – 10	4	9	36	10	100
Σύνολο	40	-----	172	100	-----

α)

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^5 v_i \cdot x_i = \frac{1}{40} \cdot 172 = 4,3$$

β)

Κατασκευάζουμε το πολύγωνο των $F_i\%$ και βλέπουμε ότι η τιμή που αντιστοιχεί στο 50% των παρατηρήσεων είναι ίση με 4, άρα $\delta = 4$.



13.

Το μέσο ύψος των 30 μαθητών και μαθητριών μιας τάξης είναι 170 cm. Ποιο θα είναι το μέσο ύψος της τάξης :

- α) αν φύγει ένας μαθητής με ύψος 180 cm
 β) αν έρθει μία νέα μαθήτρια με ύψος 170 cm
 γ) αν φύγει ένας μαθητής με ύψος 180 cm και έρθει μία μαθήτρια με ύψος 170 ;

Λύση

α)

Αν x_1, x_2, \dots, x_{30} είναι τα ύψη των παιδιών της τάξης, θα έχουμε

$$170 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{30}}{30} \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{30} = 170 \cdot 30 = 5100 \quad (1)$$

Μετά την αποχώρηση του μαθητή το συνολικό ύψος θα μειωθεί κατά 180 και το πλήθος των παιδιών της τάξης θα είναι 29 , άρα

$$\bar{x}' = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{30} - 180}{29} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \bar{x}' = \frac{5100 - 180}{29} = 169,66 \text{ cm περίπου}$$

β)

Όταν έρθει στην τάξη μία νέα μαθήτρια με ύψος 170, το συνολικό ύψος θα αυξηθεί κατά 170 και το πλήθος των παιδιών της τάξης θα είναι 31 , οπότε

$$\bar{x}'' = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{30} + 170}{31} = \frac{5100 + 170}{31} = 170 \text{ cm}$$

γ)

Τέλος όταν φύγει ένας μαθητής με ύψος 180 και έρθει μία μαθήτρια με ύψος 170, το συνολικό ύψος θα ελαττωθεί κατά 10 ενώ το πλήθος των παιδιών της τάξης θα είναι πάλι 30, άρα

$$\bar{x}''' = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{30} - 10}{30} = \frac{5100 - 10}{30} = 169,67 \text{ cm περίπου}$$

14.

Καθεμία από τις παρακάτω λίστες δεδομένων έχει μέση τιμή 50.

- α) Σε ποια λίστα υπάρχει (i) μεγαλύτερη (ii) μικρότερη διασπορά παρατηρήσεων;

(Να μη γίνουν οι πράξεις)

0, 20, 40, 50, 60, 80, 100

0, 48, 49, 50, 51, 52, 100

0, 1, 2, 50, 98, 99, 100

- β) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για σύγκριση των δεδομένων αυτών το εύρος ;

Λύση

α)

Στη δεύτερη λίστα δεδομένων οι αποκλίσεις των τιμών από την μέση τιμή είναι η ποιο μικρές, άρα η δεύτερη λίστα θα παρουσιάζει την ποιο μικρή διασπορά.

Ενώ η τρίτη λίστα θα παρουσιάζει την ποιο μεγάλη, αφού οι αποκλίσεις των τιμών από την μέση τιμή είναι οι ποιο μεγάλες.

β)

Όχι γιατί όλες οι λίστες έχουν το ίδιο εύρος.

15.

Η βαθμολογία δέκα μαθητών σε ένα διαγώνισμα ήταν

7, 11, 10, 13, 15, 3, 12, 11, 4, 14. Να υπολογίσετε

α) Τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

β) Το εύρος την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής

Λύση

Οι τιμές της βαθμολογίας σε αύξουσα σειρά είναι

3 , 4 , 7 , 10 , 11 , 11 , 12 , 13 14 , 15

α)

Η μέση τιμή είναι $\bar{x} = \frac{3+4+7+10+2\cdot 11+12+13+14+15}{10} = \frac{100}{10} = 10$.

Αφού το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός, η διάμεσος θα ισούται με το ημίαθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή $\delta = \frac{11+11}{2} = 11$

β)

Η διακύμανση είναι ίση με $S^2 = \frac{(3-10)^2 + (4-10)^2 + \dots + (15-10)^2}{10}$
 $= \frac{49+36+\dots+25}{10} = \frac{150}{10} = 15$

οπότε η τυπική απόκλιση S είναι $S = \sqrt{15} = 3,87$ περίπου

και ο συντελεστής μεταβολής $cv = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{3,87}{10} = 0,387 = 38,7\%$

16.

Να υπολογιστεί η τυπική απόκλιση των δεδομένων της άσκησης 12.

επισκέψεις	συχνότητα
[0 , 2)	8
[2 , 4)	12
[4 , 6)	10
[6 , 8)	6
[8 , 10)	4
σύνολο	40

Επισκέψεις	Συχνότη. v_i	Κεντρ. τιμή x_i	$v_i x_i$	$v_i x_i^2$
[0 , 2)	8	1	8	8
[2 , 4)	12	3	36	108
[4 , 6)	10	5	50	250
[6 , 8)	6	7	42	294
[8 , 10)	4	9	36	324
Σύνολο	40	-----	172	984

Λύση

Συμπληρώσαμε τον πίνακα.

$$\begin{aligned}
 \text{Οπότε } S^2 &= \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^5 v_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^5 v_i x_i \right)^2}{v} \right\} = \frac{1}{40} \left\{ 984 - \frac{172^2}{40} \right\} \\
 &= \frac{1}{40} \left\{ 984 - \frac{29584}{40} \right\} \\
 &= \frac{244,4}{40} = 6,11 \quad \Rightarrow \quad S = \sqrt{6,11} = 2,47
 \end{aligned}$$

18.

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο για τα παρακάτω δείγματα δεδομένων, και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.

α) 1 2 6

β) 2 4 12

γ) 11 12 16

δ) 12 14 22

Λύση

α)

$$\bar{x} = \frac{1+2+6}{3} = 3 \quad \text{και} \quad \delta = 2$$

β)

Αν x_i είναι οι τιμές του πρώτου δείγματος και ψ_i οι τιμές του δεύτερου, τότε παρατηρούμε ότι $\psi_i = 2x_i$. Άρα, από γνωστή εφαρμογή, έχουμε ότι

$$\bar{\psi} = 2\bar{x} = 2 \cdot 3 = 6 \quad \text{και} \quad \delta = 2 \cdot 2 = 4$$

γ)

Αν ζ_i είναι οι τιμές του τρίτου δείγματος παρατηρούμε ότι αυτές προκύπτουν από τις τιμές του πρώτου δείγματος αν προσθέσουμε σ' αυτές το 10, δηλαδή $\zeta_i = x_i + 10$. Άρα πάλι από τη γνωστή εφαρμογή έχουμε

$$\bar{\zeta} = \bar{x} + 10 = 3 + 10 = 13 \quad \text{και} \quad \delta = 2 + 10 = 12$$

δ)

Αν ω_i είναι οι τιμές του τέταρτου δείγματος παρατηρούμε ότι οι τιμές προκύπτουν από τις τιμές του πρώτου δείγματος πολλαπλασιάζοντας με το 2 και προσθέτοντας 10

δηλαδή $\omega_i = 2x_i + 10$, άρα $\bar{\omega} = 2\bar{x} + 10 = 2 \cdot 3 + 10 = 16$

$$\text{και} \quad \delta = 2 \cdot 2 + 10 = 14$$

19.

Να υπολογίσετε την διακύμανση και την τυπική απόκλιση για κάθε μία από τις παρακάτω λίστες δεδομένων . Συγκρίνοντας τα δεδομένα και τα αποτελέσματα τι συμπεράσμα βγάζετε;

α) 1, 3, 4, 5, 7

β) 3, 9, 12, 15, 21

γ) 6, 8, 9, 10, 12

δ) -1, -3, -4, -5, -7

Λύση

α)

$$\bar{x}_\alpha = \frac{1+3+4+5+7}{5} = \frac{20}{5} = 4, \text{ οπότε}$$

$$S_\alpha^2 = \frac{(1-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (7-4)^2}{5} = \frac{9+1+0+1+9}{5} = 4$$

άρα $S_\alpha = \sqrt{4} = 2$

β)

$$\bar{x}_\beta = \frac{3+9+12+15+21}{5} = \frac{60}{5} = 12, \text{ οπότε}$$

$$S_\beta^2 = \frac{(3-12)^2 + (9-12)^2 + (12-12)^2 + (15-12)^2 + (21-12)^2}{5} = \frac{81+9+0+9+81}{5} = 36$$

άρα $S_\beta = \sqrt{36} = 6$

γ)

$$\bar{x}_\gamma = \frac{6+8+9+10+12}{5} = \frac{45}{5} = 9, \text{ οπότε}$$

$$S_\gamma^2 = \frac{(6-9)^2 + (8-9)^2 + (9-9)^2 + (10-9)^2 + (12-9)^2}{5} = \frac{9+1+0+1+9}{5} = 4$$

άρα $S_\gamma = \sqrt{4} = 2$

δ)

$$\bar{x}_\delta = \frac{-1-3-4-5-7}{5} = -4, \text{ οπότε}$$

$$S_\delta^2 = \frac{(-1+4)^2 + (-3+4)^2 + (-4+4)^2 + (-5+4)^2 + (-7+4)^2}{5} = \frac{9+1+0+1+9}{5} = 4$$

άρα $S_\delta = \sqrt{4} = 2$

Αν x_α είναι οι τιμές του πρώτου δείγματος, x_β οι τιμές του δεύτερου, x_γ οι τιμές του τρίτου και x_δ οι τιμές του τέταρτου, τότε παρατηρούμε ότι

$x_\beta = 3x_\alpha$ οπότε, από γνωστή εφαρμογή, $S_\beta = 3S_\alpha = 3 \cdot 2 = 6$

$x_\gamma = x_\alpha + 5$ οπότε $S_\gamma = S_\alpha = 2$

$x_\delta = -1x_\alpha$ οπότε $S_\delta = |-1| \cdot S_\alpha = S_\alpha = 2$

20.

Οι μαθητές του Γ_2 τμήματος ξόδεψαν ετησίως κατά μέσο όρο 625 ευρώ αγοράζοντας διάφορα τρόφιμα από το κυλικείο του σχολείου τους. Εάν ο συντελεστής μεταβολής είναι 27,2% , να βρείτε την τυπική απόκλιση. Εάν επί πλέον γνωρίζουμε ότι $\sum x_i^2 = 11746700$, πόσοι είναι οι μαθητές του Γ_2 ;

Λύση

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $\bar{x} = 625$ και $CV = 27,2\%$.

Αποστροφοποιώντας τον CV έχουμε ότι $CV = 0,272$

$$\text{Άρα } \frac{S}{\bar{x}} = 0,272 \Leftrightarrow \frac{S}{625} = 0,272 \Leftrightarrow S = 625 \cdot 0,272 \Leftrightarrow S = 170 \text{ ευρώ.}$$

$$\text{Γνωρίζουμε ότι } S^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i \right)^2}{v} \right\} = \frac{1}{v} \{ \sum x_i^2 - v\bar{x}^2 \} \Leftrightarrow$$

$$170^2 = \frac{1}{v} (11746700 - v \cdot 625^2)$$

$$v \cdot 170^2 = 11746700 - v \cdot 625^2$$

$$v \cdot 170^2 + v \cdot 625^2 = 11746700$$

$$v (170^2 + 625^2) = 11746700$$

$$v = \frac{11746700}{170^2 + 625^2} \Leftrightarrow v = 28$$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1.

Η βαθμολογία 50 μαθητών στην ιστορία κυμαίνεται από 10 μέχρι 20 (κανένας δεν είναι κάτω από τη βάση). Γνωρίζουμε επίσης ότι 5 μαθητές έχουν βαθμό κάτω από 12, δεκαπέντε κάτω από 14, πέντε μεγαλύτερο ή ίσο του 18 και δεκαπέντε μεγαλύτερο ή ίσο του 16.

- α) Να παρασταθούν τα δεδομένα μ' έναν πίνακα συχνοτήτων.
 β) Να υπολογίσετε : **i)** τη μέση τιμή, **ii)** την διάμεσο.
 γ) Αν στο 5% των μαθητών με την καλύτερη επίδοση δοθεί έπαινος, πόσο βαθμό πρέπει να έχει κάποιος μαθητής για να πάρει έπαινο ;

Λύση

α)

Είναι προφανές ότι, αφού δεν ξέρουμε τις συχνότητες των βαθμών θα πρέπει να κάνουμε ομαδοποίηση των δεδομένων.

Το εύρος της κατανομής είναι $R = 20 - 10 = 10$ και οι κλάσεις προφανώς 5.

Άρα το πλάτος κάθε κλάσης είναι $c = \frac{R}{\kappa} = \frac{10}{5} = 2$

Η συχνότητα της κλάσης $[10, 12)$ είναι 5.

Αφού 15 μαθητές έχουν βαθμό κάτω από 14 και οι 5 από αυτούς βρίσκονται στην κλάση $[10, 12)$, οι υπόλοιποι 10 θα βρίσκονται στην κλάση $[12, 14)$.

Οπότε η συχνότητα της κλάσης $[12, 14)$ θα είναι 10.

Η συχνότητα της κλάσης $[18, 20)$ είναι 5, και βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16 έχουν 15 μαθητές, άρα οι 10 από αυτούς θα βρίσκονται στην κλάση $[16, 18)$.

Οπότε η συχνότητα της κλάσης $[16, 18)$ θα είναι 10.

Το σύνολο των μαθητών είναι 50 και με βάση τα προηγούμενα έχουν καταταξιωθεί 30 μαθητές, οπότε οι υπόλοιποι 20 θα βρίσκονται στην κλάση $[14, 16)$

Άρα η συχνότητα της κλάσης $[14, 16)$ θα είναι 20.

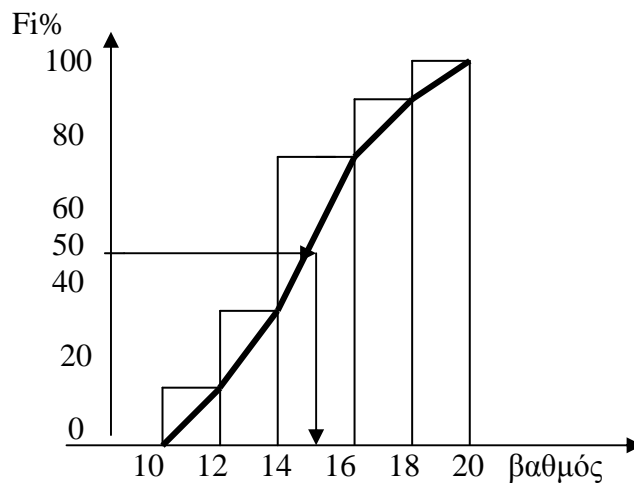
Επομένως ο πίνακας συχνοτήτων, συμπληρωμένος και με τις στήλες $v_i x_i$ και $f_i\%$, $F_i\%$ είναι

Κλάσεις [,)	Κεντ. Τιμή x_i	Συχνότ. v_i	$v_i x_i$	Σχετ. συχ $f_i\%$	Αθρ. Σχετ. συχ $F_i\%$
[10, 12)	11	5	55	10	10
[12, 14)	13	10	130	20	30
[14, 16)	15	20	300	40	70
[16, 18)	17	10	170	20	90
[18, 20)	19	5	95	10	100
Σύνολο	-----	50	750	100	-----

β)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^5 v_i x_i = \frac{750}{50} = 15.$$

Για να βρούμε την διάμεσο θα σχεδιάσουμε το πολύγωνο που αντιστοιχεί στο ιστόγραμμα των $F_i\%$.



Από το πολύγωνο βλέπουμε ότι ο βαθμός που αντιστοιχεί στο 50% των παρατηρήσεων είναι το 15, άρα $\delta = 15$.

γ)

Επειδή η σχετική συχνότητα της τελευταίας κλάσης είναι 10% και θα πάρει έπαινο μόνο το 5% , αυτό σημαίνει ότι θα πάρουν έπαινο οι μισοί από τους μαθητές της τελευταίας κλάσης και λόγω του ότι οι μαθητές είναι ισοκατανεμημένοι σε κάθε κλάση οι μισοί μαθητές της τελευταίας κλάσης θα έχουν βαθμό από 19 και πάνω άρα θα πάρουν έπαινο όσοι μαθητές έχουν βαθμό πάνω από 19.

2.

Η μέση τιμή και η διακύμανση των 5 τιμών ενός δείγματος είναι $\bar{x} = 4$ και $S^2 = 10$.

Εάν για τις τέσσερις τιμές ισχύει $\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 = 14$, να βρεθεί η πέμπτη τιμή.

Λύση

Αν x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 είναι οι 5 τιμές, τότε

$$S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2 + (x_5 - \bar{x})^2}{5} \quad (1).$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε $\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 = 14$.

Αυτό σημαίνει ότι $(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2 = 14$

$$(1) \Rightarrow S^2 = \frac{14 + (x_5 - \bar{x})^2}{5}$$

$$10 = \frac{14 + (x_5 - 4)^2}{5}$$

$$50 = 14 + x_5^2 - 8x_5 + 16$$

$$x_5^2 - 8x_5 - 20 = 0$$

Λύνοντας την εξίσωση αυτή βρίσκουμε ότι $x_5 = -2$ ή $x_5 = 10$

3.

Ένας μαθητής αγόρασε 10 βιβλία που κόστιζαν χωρίς ΦΠΑ
15, 9, 6, 18, 21, 6, 18, 27, 9, 12 ευρώ αντίστοιχα.

α) Ποια είναι η μέση και η διάμεση αξία (τιμή) των βιβλίων;

β) Πως μεταβάλλονται οι απαντήσεις του ερωτήματος (α), αν προσθέσουμε και το ΦΠΑ που είναι 18% ;

γ) Αν ο μαθητής πληρώσει επί πλέον 0,3 ευρώ (χωρίς ΦΠΑ) για το ντύσιμο κάθε βιβλίου, πως διαμορφώνονται τώρα οι απαντήσεις στο ερώτημα (β) ;

Λύση

α)

Τοποθετώντας σε αύξουσα σειρά τις τιμές των βιβλίων έχουμε

6, 6, 9, 9, 9, 12, 15, 18, 21, 27

Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 10, η διάμεσος δ είναι ίση με το ημιάθροισμα των 5^{ης} και 6^{ης} των παρατηρήσεων.

$$\text{Άρα } \delta = \frac{9+12}{2} = 10,5 \text{ ευρώ.}$$

$$\text{Μέση τιμή : } \bar{x} = \frac{6+6+9+9+9+12+15+18+21+27}{10} = \frac{132}{10} = 13,2 \text{ ευρώ.}$$

β)

Μετά την πρόσθεση σε κάθε τιμή x_i του ΦΠΑ που είναι 18% ,

$$\text{η νέα τιμή } \psi_i \text{ θα είναι } \psi_i = x_i + \frac{18}{100} x_i \Leftrightarrow \psi_i = x_i + 0,18x_i \Leftrightarrow \psi_i = 1,18x_i.$$

Οπότε, από γνωστή εφαρμογή, θα είναι $\bar{\psi} = 1,18\bar{x}$

$$\bar{\psi} = 1,18 \cdot 13,2$$

$$\bar{\psi} = 15,576$$

$$\text{Διάμεσος } \delta' = \frac{\psi_5 + \psi_6}{2} = \frac{1,18x_5 + 1,18x_6}{2} = \frac{9 \cdot 1,18 + 12 \cdot 1,18}{2} = 12,39 \text{ ευρώ}$$

γ)

Μετά την πληρωμή και των 0,3 ευρώ για το ντύσιμο του κάθε βιβλίου, αν ζ_i είναι οι νέες τιμές, θα έχουμε $\zeta_i = \psi_i + 0,3$

$$\text{οπότε } \bar{\zeta} = \bar{\psi} + 0,3$$

$$\bar{\zeta} = 15,576 + 0,3 = 15,876$$

$$\text{Διάμεσος } \delta'' = \delta' + 0,3 = 12,39 + 0,3 = 12,69 \text{ ευρώ}$$

5.

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα ύψη των πωλήσεων σε χιλιάδες ευρώ που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.

- α) Πόσοι είναι οι πωλητές;
 β) Πόσοι πωλητές έκαναν πωλήσεις πάνω από 5 χιλιάδες ευρώ;
 γ) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και να βρείτε τη μέση τιμή και τη διακύμανση.



Λύση

α)

Επειδή το ύψος κάθε ορθογωνίου είναι ίσο με την συχνότητα της κάθε κλάσης, το πλήθος των πωλητών είναι ίσο με το άθροισμα των υψών όλων των ορθογωνίων. Οπότε το πλήθος των πωλητών είναι $12 + 8 + 14 + 10 + 8 + 5 + 3 = 60$.

β)

Οι πωλητές που έκαναν πωλήσεις πάνω από 5 χιλιάδες ευρώ είναι: οι μισοί της κλάσης $[4, 6)$ και όλοι όσοι βρίσκονται στις δεξιά από αυτήν κλάσεις, δηλαδή $7 + 10 + 8 + 5 + 3 = 33$.

γ)

Ο πίνακας συχνοτήτων συμπληρωμένος και με τις κατάλληλες στήλες για να βρούμε την μέση τιμή και την διακύμανση είναι

Κλάσεις [,)	Κεντρ. Τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$	$v_i x_i^2$
[0 ,2)	1	12	12	12
[2 ,4)	3	8	24	72
[4 ,6)	5	14	70	350
[6 ,8)	7	10	70	490
[8 ,10)	9	8	72	648
[10 ,12)	11	5	55	605
[12 ,14)	13	3	39	507
Σύνολο	-----	60	342	2684

Η μέση τιμή είναι $\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^7 v_i x_i = \frac{342}{60} = 5,7$ χιλ. ευρώ = 5700 ευρώ

$$\begin{aligned}
 \text{Η διακύμανση είναι } S^2 &= \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^7 v_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^7 v_i x_i \right)^2}{v} \right\} \\
 &= \frac{1}{60} \left(2684 - \frac{342^2}{60} \right) \\
 &= 12,24 \text{ (χιλ. ευρώ)}^2 = 12240 \text{ (ευρώ)}^2
 \end{aligned}$$

6.

Στο διπλανό πίνακα δίνεται η κατανομή της ηλικίας των ατόμων μιας πόλης. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής.

Λύση

Συμπληρώνουμε τον παραπάνω πίνακα με τις κατάλληλες στήλες για να βρούμε την τυπική απόκλιση.

Ηλικία (σε έτη)	Συχνότητα (σε χιλιάδες)
0 - 20	12
20 - 40	14
40 - 60	20
60 - 80	10
80 - 100	4

Κλάσεις [,)	Κεντρ.τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$
[0 , 20)	10	12	120	1200
[20 , 40)	30	14	420	12600
[40 , 60)	50	20	1000	50000
[60 , 80)	70	10	700	49000
[80 , 100)	90	4	360	32400
Σύνολο	-----	60	2600	145200

$$\begin{aligned}
 \text{Η διακύμανση είναι } S^2 &= \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^5 v_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^5 v_i x_i \right)^2}{v} \right\} \\
 &= \frac{1}{60} \left(145200 - \frac{2600^2}{60} \right) = 542,22
 \end{aligned}$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι $S = \sqrt{542,22} = 23,29$ έτη .

Οπότε ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{23,29}{43,33} = 0,5375 = 53,75\%$
(δείγμα ανομοιογενές)

7.

Από την στατιστική της Φυσικής Κίνησης Πληθυσμού της Ελλάδας οι θάνατοι λόγω υπερτασικής νόσου το 1995 δίνονται στον παρακάτω πίνακα. Να κατασκευάσετε στο ίδιο σχήμα τα πολύγωνα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων για την ηλικία ανδρών και γυναικών, αντίστοιχα, που πέθαναν από υπερτασική νόσο το 199, και στη συνέχεια να τα συγκρίνετε.

Ηλικία	Θάνατοι	
	Άντρες	γυναίκες
50-54	10	7
55-59	10	4
60-64	17	21
65-69	36	57
70-74	44	61
75-79	73	109
80-84	117	162
85-89	123	195

Λύση

Επειδή όπως δίνονται οι ομάδες των ηλικιών δεν είναι βολικές για την ομαδοποίηση, δεδομένου ότι οι δεξιά τιμές των κλάσεων δεν ανήκουν σε καμία κλάση, γι' αυτό παίρνουμε σαν ελάχιστη ηλικία την 49,5 και πλάτος κλάσεων το 5 και στην συνέχεια συμπληρώνουμε τον παραπάνω πίνακα με τις κατάλληλες στήλες για να μπορέσουμε να βρούμε τις αθροιστικές σχετικές συχνοτήτες $F_i \%$.

Μετά από αυτά έχουμε

Κλάσεις	Κεν. τιμ x_i	Άνδρες			Γυναίκες		
		v_i	$f_i \%$	$F_i \%$	v'_i	$f'_i \%$	$F'_i \%$
[49,5-54,5)	52	10	2,3	2,3	7	1,1	1,1
[54,5-59,5)	57	10	2,3	4,6	4	0,7	1,8
[59,5-64,5)	62	17	4,0	8,6	21	3,4	5,2
[64,5-69,5)	67	36	8,4	17,0	57	9,2	14,4
[69,5-74,5)	72	44	10,2	27,2	61	9,9	24,3
[74,5-79,5)	77	73	17,0	44,2	109	17,7	42,0
[79,5-84,5)	82	117	27,2	71,4	162	26,3	68,3
[84,5-89,5)	87	123	28,6	100,0	195	31,7	100,0
Σύνολο	-----	430	100	-----	616	100	-----

Κατασκευάζουμε τα πολύγωνα που αντιστοιχούν στα ιστογράμματα των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων. Παρατηρούμε ότι σε όλες τις ηλικίες τα ποσοστά των ανδρών που πέθαναν από υπερτασική νόσο ήταν μεγαλύτερα από τα ποσοστά των γυναικών.

Ακόμα παρατηρούμε ότι το 50% και των ανδρών και των γυναικών που πέθαναν ήταν πάνω από 80 χρονών περίπου.

