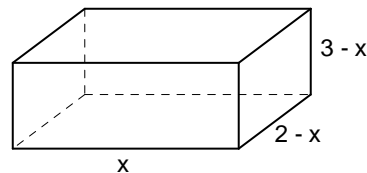


Ερωτήσεις κατανόησης σελίδας 50 – 53 Κεφ. 1

1.

Ο όγκος του διπλανού ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου εκφράζεται με τη συνάρτηση $V(x) = x(2-x)(3-x)$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής είναι το διάστημα :

A. $[0, +\infty)$ B. $(0, 2)$ Γ. $(-\infty, 0]$ Δ. $[2, 3]$



Απάντηση

Επειδή τα x , $2-x$, $3-x$ είναι διαστάσεις θα πρέπει

$$x > 0 \text{ και } 2-x > 0 \text{ και } 3-x > 0 \Leftrightarrow$$

$$x > 0 \text{ και } x < 2 \text{ και } x < 3 \Leftrightarrow$$

$$0 < x < 2$$

Άρα σωστή απάντηση είναι το B.

2.

Στο διπλανό σχήμα, το μήκος του τμήματος AB είναι

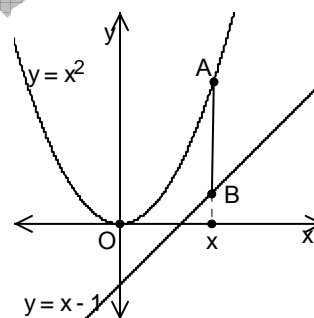
A. x B. x^2 Γ. $x^2 - x + 1$ Δ. $x - 1 - x^2$

Απάντηση

Είναι φανερό ότι το σημείο A έχει συντεταγμένες $A(x, x^2)$ και το $B(x, x-1)$ και επειδή το A είναι ψηλότερα από το B, θα είναι $x^2 > x-1$.

$$\text{Άρα } AB = |x^2 - (x-1)| = |x^2 - x + 1| = x^2 - x + 1.$$

Επομένως, σωστή απάντηση είναι το Γ.



3.

Το εμβαδόν του διπλανού ορθογωνίου ABΓΔ

είναι 63. Η τιμή του κ είναι

A. 8 B. 2 Γ. -6 Δ. 10

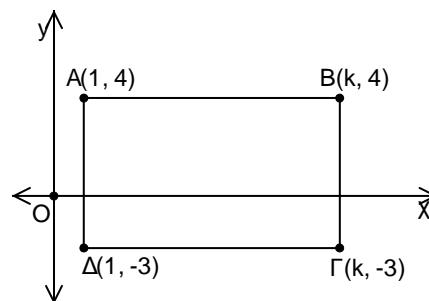
Απάντηση

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = (ΑΔ) \cdot (ΔΓ)$

$$\text{Όμως } ΑΔ = |4 - (-3)| = |4 + 3| = 7 \text{ και } ΔΓ = |κ - 1| = κ - 1 \text{ αφού } κ > 1$$

$$\text{Οπότε } 63 = 7(κ - 1) \Leftrightarrow 9 = κ - 1 \Leftrightarrow κ = 10.$$

Άρα σωστή απάντηση είναι το Δ

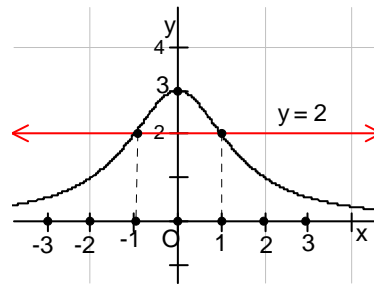


4.

Στο διπλανό σχήμα έχουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{6}{x^2 + 2}$.

Οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) > 2$ είναι

- A . $x > 2$ B . $-1 < x < 1$ Γ . $-2 < x < 2$ Δ . $x < -2$



Απάντηση

Πρόκειται για το κομμάτι της καμπύλης που είναι πάνω από την ευθεία $y = 2$.

Η τετμημένη x κάθε σημείου αυτού του κομματιού είναι $-1 < x < 1$

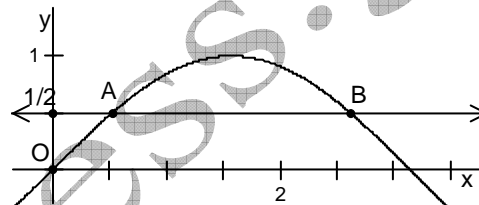
5.

Στο διπλανό σχήμα τα σημεία A και B

είναι τα σημεία τομής των καμπυλών των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \frac{1}{2}$.

Το μήκος του τμήματος AB είναι :

- A . $\frac{\pi}{2}$ B . $\frac{\pi}{3}$ Γ . $\frac{2\pi}{3}$ Δ . $\frac{5\pi}{6}$



Απάντηση

Λύνουμε την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6}$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}.$$

Επειδή όμως $0 < x < \pi$, θα είναι $x_A = \frac{\pi}{6}$ και $x_B = \frac{5\pi}{6}$

Άρα $(AB) = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$. Άρα σωστό είναι το Γ

6.

Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το πλήθος των διακεκριμένων λύσεων της εξίσωσης $f^2(x) = f(x)$ είναι :

A . 2 B . 3 Γ . 4 Δ . 5 E . 6

Απάντηση

$$f^2(x) = f(x) \Leftrightarrow f^2(x) - f(x) = 0$$

$$f(x) \cdot (f(x) - 1) = 0$$

$$f(x) = 0 \quad \text{ή} \quad f(x) - 1 = 0$$

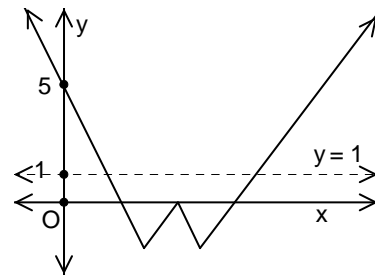
$$f(x) = 0 \quad \text{ή} \quad f(x) = 1$$

Το πλήθος των λύσεων της $f(x) = 0$ είναι ίσο με το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης με τον άξονα $x'x$, δηλαδή 3.

Το πλήθος των λύσεων της $f(x) = 1$ είναι ίσο με το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης με την ευθεία $y=1$, δηλαδή 2.

Άρα το πλήθος των διακεκριμένων λύσεων της αρχικής εξίσωσης είναι $3 + 2 = 5$.

Άρα σωστή επιλογή είναι το Δ



7.

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g .

Το άθροισμα $f(2) + g(2)$ είναι ίσο με

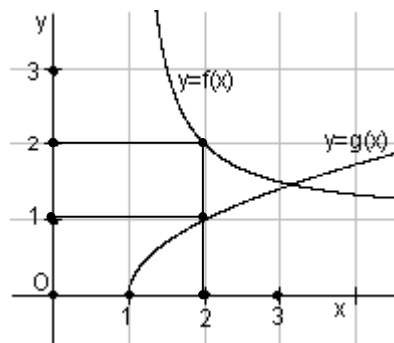
A . 5 B . 4 Γ . 3 Δ . 2

Απάντηση

Είναι $f(2) = 2$ και $g(2) = 1$.

Άρα $f(2) + g(2) = 3$

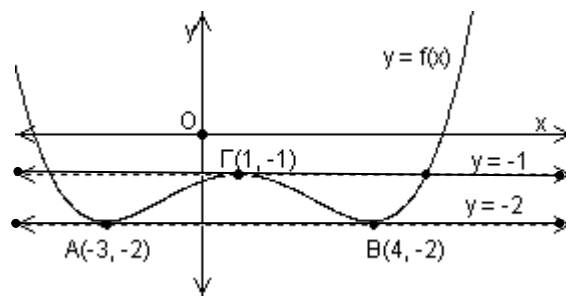
Σωστή επιλογή είναι η Γ



8.

Η ευθεία $y = \kappa$ θέλουμε να τέμνει τη διπλανή γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε 4 διαφορετικά σημεία. Τότε πρέπει :

- A. $\kappa > -1$ B. $\kappa = 1$
 Γ. $\kappa < -2$ Δ. $-2 < \kappa < -1$



Απάντηση

Θεωρούμε τις οριζόντιες ευθείες $y = -1$ και $y = -2$.

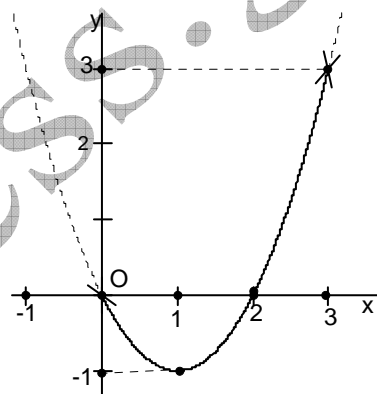
Η ευθεία $y = \kappa$, για να τέμνει τη γραφική παράσταση σε τέσσερα διαφορετικά σημεία, θα πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των ευθειών $y = -1$ και $y = -2$; άρα θα πρέπει $-2 < \kappa < -1$.

9.

Με βάση τη διπλανή γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x$ / $A = [0, 3]$, να γράψετε τα ακρότατα της συνάρτησης.

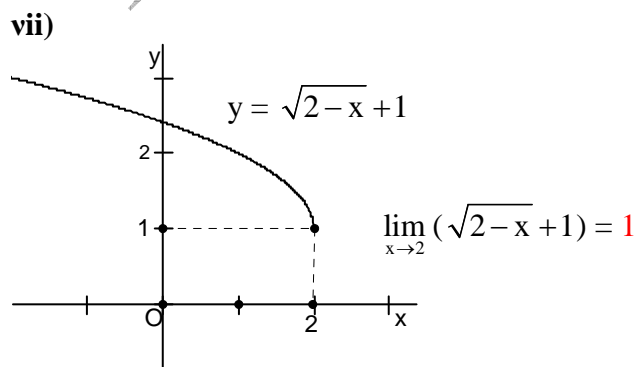
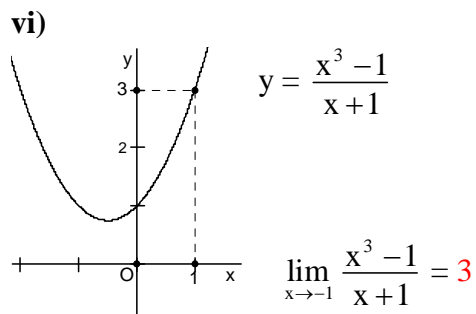
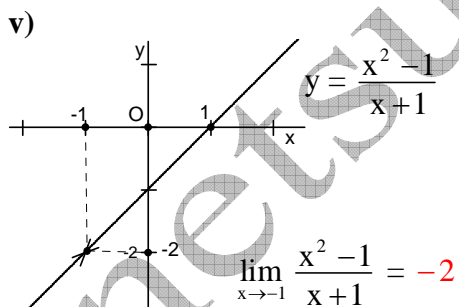
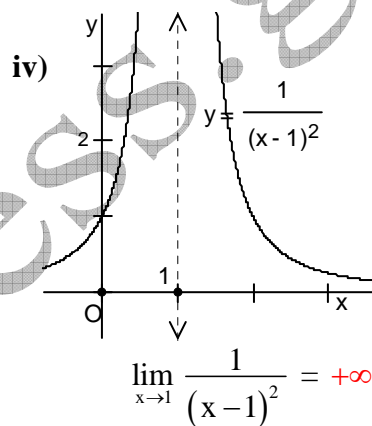
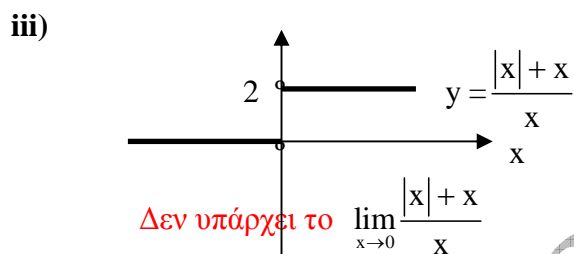
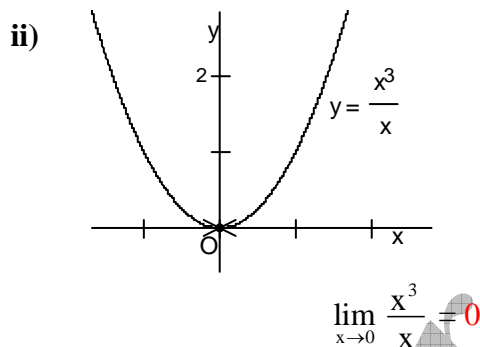
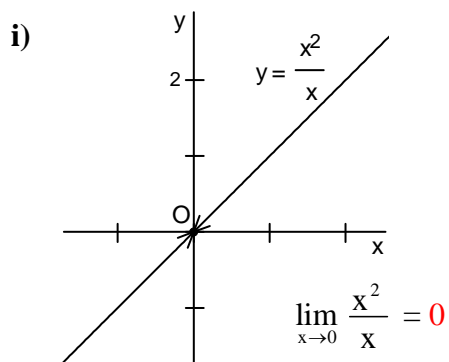
Απάντηση

Η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$, το $f(1) = -1$ και μέγιστο για $x = 3$ το $f(3) = 3$



10.

Για καθένα από τα παρακάτω όρια να χρησιμοποιήσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση για να βρείτε την τιμή του ή να προσδιορίσετε ότι δεν υπάρχει.



11.

- i) Αν $f(x) = -3x^2$ και $f'(a) = 12$, ποια είναι η τιμή του a ;
 ii) Αν $f(x) = \frac{1}{x}$ και $f'(a) = -\frac{1}{9}$, ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο a ;
 iii) Αν $f(x) = \eta\mu x$ και $f'(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ποιο είναι το σύνολο τιμών του a ;

Απάντηση

i)

$$f'(x) = -6x \Rightarrow f'(a) = -6a, \text{ επομένως } -6a = 12 \Rightarrow a = -2$$

ii)

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ άρα } f'(a) = -\frac{1}{a^2}, \text{ επομένως πρέπει να ισχύει}$$

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{9} \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = \pm 3$$

iii)

$$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x, \text{ οπότε } f'(a) = \sigma\upsilon\nu a, \text{ άρα πρέπει να ισχύει}$$

$$\sigma\upsilon\nu a = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu a = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow a = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

12.

Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύουν $f(3) = 4$, $g(3) = 2$, $f'(3) = -6$, και $g'(3) = 5$, να βρείτε για $x = 3$ τις παραγώγους των συναρτήσεων

- α) $f + g$, β) $f - g$, γ) fg , δ) $\frac{f}{g}$

Απάντηση

$$\alpha) (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \Rightarrow (f + g)'(3) = f'(3) + g'(3) = -6 + 5 = -1$$

$$\beta) (f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) \Rightarrow (f - g)'(3) = f'(3) - g'(3) = -6 - 5 = -11$$

$$\gamma) (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow (fg)'(3) = f'(3)g(3) + f(3)g'(3) \\ = -6 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 8$$

$$\delta) \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(3) = \frac{f'(3)g(3) - g'(3)f(3)}{(g(3))^2} = \frac{-6 \cdot 2 - 5 \cdot 4}{2^2} = \frac{-32}{4} = -8$$

13.

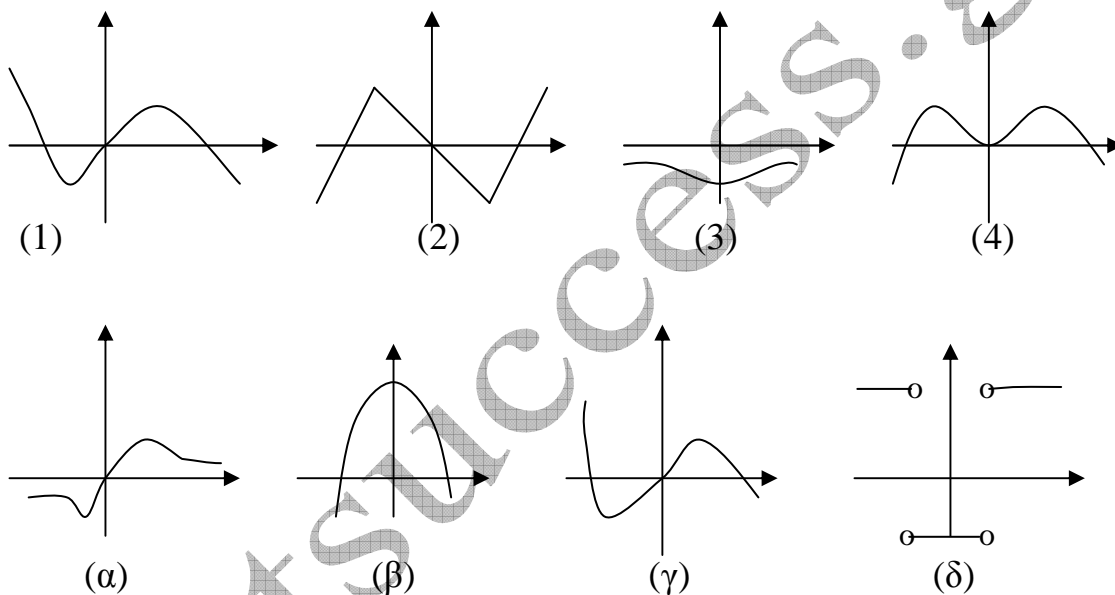
Αν $h(x) = f(g(x))$ και $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$ και $f'(6) = 7$, να βρείτε τον αριθμό $h'(3)$

Απάντηση

$$h'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x) \Rightarrow h'(3) = f'(g(3))g'(3) = f'(6) \cdot 4 = 7 \cdot 4 = 28$$

14.

Στην πρώτη σειρά του παρακάτω πίνακα υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις κάποιων συναρτήσεων και στην δεύτερη σειρά οι γραφικές παραστάσεις των παραγώγων αυτών. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση στην παράγωγο της.



Στο **σχήμα (1)** έχουμε μια συνάρτηση που έχει δύο τοπικά ακρότατα, ένα με αρνητική τετμημένη και ένα με θετική τετμημένη, οπότε η παράγωγος αυτής πρέπει να μηδενίζεται σε δύο σημεία δηλαδή η γραφική παράσταση της παραγώγου πρέπει να τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο με αρνητική τετμημένη και σε ένα με θετική τετμημένη, πράγμα που συμβαίνει **στο σχήμα β)**

Στο **σχήμα (2)** έχουμε σαν γραφική παράσταση τεθλασμένη γραμμή, άρα η παράγωγος αυτής θα είναι σταθερή κατά διαστήματα, πράγμα που συμβαίνει **στο σχήμα (δ)**

Στο **σχήμα (3)** έχουμε μια συνάρτηση γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα η γραφική παράσταση της παραγώγου πρέπει

να είναι κάτω από τον $x'x$ στο $(-\infty, 0)$ και πάνω από τον $x'x$ στο $(0, +\infty)$,
πράγμα που συμβαίνει στο **σχήμα (α)**

Τέλος το **σχήμα (4)** αντιστοιχεί στο **σχήμα (γ)**.

netsuccess.gr