1.4
Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδας 45 – 47

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.
Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων

i) $f(x) = x^2 - 2x$ **ii)** $f(x) = -3x^2 + 6$ **iii)** $f(x) = x^2 - 2x + 4$

Λύση

i)
Πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$
$f'(x) = 2x - 2$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow 2x > 2 \Leftrightarrow x > 1$

Το πρόσημο της f ΄ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f΄		–	0	+	
f		↘		↗	

$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$
Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$, το $f(1) = -1$

ii)
Πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$
$f'(x) = -6x$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -6x > 0 \Leftrightarrow x < 0$
Το πρόσημο της f ΄ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f΄		+	0	–	
f		↗		↘	

$f(0) = -3 \cdot 0^2 + 6 = 6$
Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = 0$, το $f(0) = 6$

iii)
Πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$

$f'(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 0 \iff 2x - 2 = 0 \iff 2x = 2 \iff x = 1$

$f'(x) > 0 \iff 2x - 2 > 0 \iff 2x > 2 \iff x > 1$

Το πρόσημο της $f\,'$ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f′		–	0	+	
f		↘		↗	

$f(1) = 1^2 - 2\cdot1 + 4 = 1 - 2 + 4 = 3$
Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$, το $f(1) = 3$

2.

Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων

i) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ **ii)** $f(x) = -x^3 + 3x + 1$

Λύση

i)
Πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$
$f'(x) = 3x^2 - 12x$
$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 12x = 0 \iff$
$3x(x - 4) = 0 \iff x = 0$ ή $x = 4$

$f'(x) > 0 \iff 3x^2 - 12x > 0 \iff x < 0$ ή $x > 4$ (εκτός των ριζών)

Το πρόσημο της $f\,'$ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
f′		+	0	–	0	+	
f		↗		↘		↗	

$f(0) = 0^3 - 6\cdot 0^2 + 5 = 5$, $f(4) = 4^3 - 6\cdot 4^2 + 5 = 64 - 96 + 5 = -27$
Άρα η f έχει τοπικό μέγιστο για $x = 0$, το $f(0) = 5$,
και τοπικό ελάχιστο για $x = 4$, το $f(4) = -27$

ii)
Πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$
$f'(x) = -3x^2 + 3$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0$
$x^2 - 1 = 0$
$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 > 0$
$x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ (εντός των ριζών)
Το πρόσημο της f ΄ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f΄		−	0	+	0	−	
f		↘		↗		↘	

$f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$
$f(1) = -1^3 + 3\cdot 1 + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$

Άρα η f έχει τοπικό ελάχιστο για $x = -1$, το $f(-1) = -1$,
και τοπικό μέγιστο για $x = 1$, το $f(1) = 3$

3.
Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν έχουν ακρότατα
i) $f(x) = 2x^3$ **ii)** $f(x) = -x^3 + 16$ **iii)** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 10$
iv) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5x - 11$

Λύση
i)
Πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$
$f'(x) = 6x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f δεν έχει ακρότατα
ii)
Πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$
$f'(x) = -3x^2 \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f δεν έχει ακρότατα
iii)
Πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
άρα η f δεν έχει ακρότατα
iv)
Πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$

$f'(x) = -3x^2 + 6x - 5$
$\Delta = 36 - 60 = -24 < 0 \Rightarrow$ το τριώνυμο f΄ είναι ομόσημο του $\alpha = -3$,
δηλαδή αρνητικό, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
άρα η f δεν έχει ακρότατα

4.

Το άθροισμα δύο αριθμών είναι ίσο με 40. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το γινόμενό τους.

Λύση

Έστω x, y οι δύο αριθμοί.

Τότε $x + y = 40 \quad \Rightarrow \quad y = 40 - x \quad \Rightarrow$

$$xy = 40x - x^2$$

$$xy = -x^2 + 40x$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 40x$ που εκφράζει το γινόμενο xy

$f'(x) = -2x + 40$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x + 40 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x = -40 \quad \Leftrightarrow \quad x = 20$

$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x + 40 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x > -40 \quad \Leftrightarrow \quad x < 20$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		20		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

$f(20) = -20^2 + 40 \cdot 20 = -400 + 800 = 400$

Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = 20$, το $f(20) = 400$

Επομένως, η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το γινόμενο xy είναι 400.

5.

Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν $100\,m^2$ ποιο είναι εκείνο που έχει τη μικρότερη περίμετρο;

Λύση

Έστω x, y > 0 οι διαστάσεις του ορθογωνίου.

Τότε $xy = 100 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{100}{x}$

$$\text{Περίμετρος} = 2x + 2y = 2x + 2\frac{100}{x} = 2x + \frac{200}{x}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x + \dfrac{200}{x}$, $x > 0$ που εκφράζει την περίμετρο

$f'(x) = 2 - \dfrac{200}{x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - \dfrac{200}{x^2} = 0$

$1 - \dfrac{100}{x^2} = 0$

$x^2 - 100 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10$

$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - \dfrac{200}{x^2} > 0$

$1 - \dfrac{100}{x^2} > 0$

$x^2 - 100 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 > 100 \quad \Leftrightarrow \quad x > 10$

Το πρόσημο της f ΄ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0	10	$+\infty$
f΄	–	0	+
f	↘		↗

$f(10) = 2 \cdot 10 + \dfrac{200}{10} = 20 + 20 = 40$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο για x = 10, το f(10) = 40

Επομένως, το ορθογώνιο με τη μικρότερη περίμετρο έχει x = 10 και

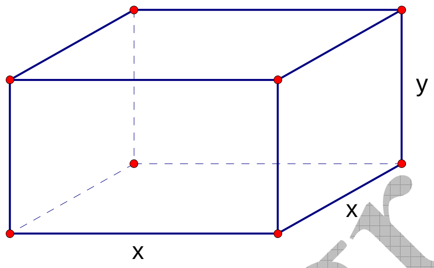
άρα $y = \dfrac{100}{10} = 10$

6.

Ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ανοικτό από πάνω πρέπει να έχει όγκο $32\,dm^3$. Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διστάσεις του κουτιού, ώστε για την κατασκευή του να χρειάζεται το ελάχιστο δυνατό υλικό.

Λύση

Έστω x, x, y > 0 οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.



Όγκος $V = 32 \Leftrightarrow x^2 y = 32$

$y = 32\,x^{-2}$ **(1)**

Η ποσότητα του υλικού, που απαιτείται για την κατασκευή του παραλληλεπιπέδου, εξαρτάται από την επιφάνειά του Ε.

Ε = τετράγωνο βάσης + 4 ίσα ορθογώνια

$E = x^2 + 4xy \overset{(1)}{\Leftrightarrow} E = x^2 + 4x32\,x^{-2}$

$E = x^2 + 128\,x^{-1}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $E(x) = x^2 + 128\,x^{-1}$ που εκφράζει την επιφάνεια, και της οποίας αναζητάμε το ελάχιστο

$E'(x) = 2x - x^{-2} = 2x - 128\dfrac{1}{x^2}$

$E'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 128\dfrac{1}{x^2} = 0$

$2\,x^3 - 128 = 0$

$2\,x^3 = 128$

$x^3 = 64 \Leftrightarrow x = 4$

Ομοίως, $E'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 4$

Το πρόσημο της Ε΄ και η μονοτονία της Ε φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0	4	+∞
Ε΄	−	0	+
Ε	↘		↗

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο για x = 4dm

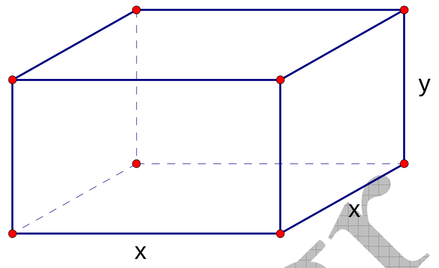
Η (1) $\Rightarrow y = 32\cdot 4^{-2} = 32\cdot\dfrac{1}{16} = 2dm$

7.

Αν ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ανοικτό από πάνω πρέπει να έχει επιφάνεια ίση με $12\,dm^2$, ποιος είναι ο μέγιστος δυνατός όγκος του;

Λύση

Έστω x, x, y > 0 οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.



$E = 12 \quad \Leftrightarrow$

τετράγωνο βάσης + 4 ίσα ορθογώνια = 12 $\Leftrightarrow$

$x^2 + 4xy = 12$

$4xy = 12 - x^2$

$y = \frac{3}{x} - \frac{x}{4}$

Ο όγκος είναι $V = xxy = x^2\left(\frac{3}{x} - \frac{x}{4}\right) = 3x - \frac{x^3}{4}$ **(1)**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $V(x) = 3x - \frac{x^3}{4}$, $x > 0$ που εκφράζει τον όγκο, και της οποίας αναζητάμε το μέγιστο

$V'(x) = 3 - \frac{3}{4}x^2$

$V'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 - \frac{3}{4}x^2 = 0$

$4 - x^2 = 0$

$x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

Ομοίως $V'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$

Το πρόσημο της V΄ και η μονοτονία της V φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0	2	+∞
V΄	+	0	–
V	↗		↘

Άρα η V παρουσιάζει μέγιστο για x = 2dm

Για x = 2, η (1) $\Rightarrow$ $V = 3\cdot 2 - \frac{2^3}{4} = 6 - 2 = 4\ dm^3$ που είναι ο μέγιστος όγκος

8.

Να βρείτε το σημείο της ευθείας με εξίσωση $y = 2x - 3$ που είναι πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

Λύση

Έστω $M(x,\ 2x - 3)$ το τυχαίο σημείο της ευθείας.

Τότε $(MO) = \sqrt{(x-0)^2 + (2x-3)^2}$

$= \sqrt{x^2 + 4x^2 - 12x + 9}$

$= \sqrt{5x^2 - 12x + 9}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $d(x) = \sqrt{5x^2 - 12x + 9}$ που εκφράζει την απόσταση του M από την αρχή των αξόνων, και της οποίας αναζητάμε το ελάχιστο.

$$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{5x^2 - 12x + 9}}(5x^2 - 12x + 9)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5x^2 - 12x + 9}}(10x - 12)$$

$d'(x) = 0 \Leftrightarrow 10x - 12 = 0 \Leftrightarrow 10x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}$

$d'(x) > 0 \Leftrightarrow 10x - 12 > 0 \Leftrightarrow 10x > 12 \Leftrightarrow x > \frac{6}{5}$

Το πρόσημο της d' και η μονοτονία της d φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0		$6/5$		$+\infty$
d'		$-$	0	$+$	
d		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα η d παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \frac{6}{5}$.

Επομένως, το ζητούμενο σημείο είναι $\left(\frac{6}{5},\ 2\cdot\frac{6}{5} - 3\right) = \left(\frac{6}{5},\ \frac{12-15}{5}\right) = \left(\frac{6}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$

9.

Η ταχύτητα ενός κύματος μήκους λ μέσα στο νερό είναι $\upsilon = \kappa\sqrt{\frac{\lambda}{c}+\frac{c}{\lambda}}$, όπου κ και c θετικές σταθερές. Για ποιο μήκος κύματος έχουμε την ελάχιστη ταχύτητα;

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\upsilon(\lambda) = \kappa\sqrt{\frac{\lambda}{c}+\frac{c}{\lambda}}$ όπου $\lambda > 0$, της οποίας αναζητάμε τη θέση του ελάχιστου.

$$\upsilon'(\lambda) = \kappa \frac{1}{2\sqrt{\frac{\lambda}{c}+\frac{c}{\lambda}}}\left(\frac{\lambda}{c}+\frac{c}{\lambda}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\lambda}{c}+\frac{c}{\lambda}}}\left(\frac{1}{c}-\frac{c}{\lambda^2}\right)$$

$$\upsilon'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c}-\frac{c}{\lambda^2} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2-c^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = c^2 \Leftrightarrow \lambda = c$$

$$\upsilon'(\lambda) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c}-\frac{c}{\lambda^2} > 0 \Leftrightarrow \lambda^2-c^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 > c^2 \Leftrightarrow \lambda > c$$

Το πρόσημο της υ' και η μονοτονία της υ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0		c		$+\infty$
υ'		$-$	0	$+$	
υ		γν. φθίν		γν. αύξ	

Άρα η υ παρουσιάζει ελάχιστο για μήκος κύματος $\lambda = c$.

10.

Να προσδιοριστούν δύο θετικοί αριθμοί με τις εξής ιδιότητες:
Το άθροισμά τους να είναι 10 και το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ελάχιστο.

Λύση

Έστω x, y δύο τυχαίοι θετικοί αριθμοί με $x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$.

Το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι $x^2 + y^2 = x^2 + (10 - x)^2$

$$= x^2 + 100 - 20x + x^2$$
$$= 2x^2 - 20x + 100$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\sigma(x) = 2x^2 - 20x + 100$, $0 < x < 10$ της οποίας αναζητάμε το ελάχιστο

$\sigma'(x) = 4x - 20 = 4(x - 5)$

$\sigma'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

$\sigma'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$

Το πρόσημο της σ΄ και η μονοτονία της σ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0	5	10
σ΄	–	0	+
σ	γν. φθίν		γν. αύξ

Άρα η σ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 5$

Επομένως, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι $x = 5$ και $y = 10 - 5 = 5$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.

Αν $\upsilon = 100p(1 + \ln r) - 100qr$, όπου p και q θετικές σταθερές, να δείξετε ότι το υ έχει τη μέγιστη τιμή όταν $r = \frac{p}{q}$

Λύση

Για να έχει νόημα ο $\ln r$, πρέπει $r > 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\upsilon(r) = 100p(1 + \ln r) - 100qr, \quad r > 0$

$\upsilon'(r) = 100p(1 + \ln r)' - 100q = 100p.\frac{1}{r} - 100q = 100\left(p\frac{1}{r} - q\right)$

$\upsilon'(r) = 0 \Leftrightarrow p\frac{1}{r} - q = 0 \Leftrightarrow p - qr = 0 \Leftrightarrow qr = p \Leftrightarrow r = \frac{p}{q}$

$\upsilon'(r) > 0 \Leftrightarrow p\frac{1}{r} - q > 0 \Leftrightarrow p - qr > 0 \Leftrightarrow qr < p \Leftrightarrow r < \frac{p}{q}$

Το πρόσημο της υ' και η μονοτονία της υ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

r	0	p/q	$+\infty$
υ'	$+$	0	$-$
υ	γν. αύξ		γν. φθίν

Άρα η υ παρουσιάζει μέγιστο για $r = \frac{p}{q}$

2.

Αν $\upsilon = \kappa x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)$, όπου κ θετική σταθερά, να δείξετε ότι το υ έχει τη μέγιστη τιμή όταν $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Λύση

Πρέπει $\frac{1}{x} > 0 \iff x > 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\upsilon(x) = \kappa x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)$, $x > 0$

$$\upsilon(x) = \kappa x^2 \ln x^{-1}$$

$$\upsilon'(x) = \kappa\,(x^2 \ln x^{-1})' = \kappa\,[(x^2)' \ln x^{-1} + x^2 (\ln x^{-1})']$$

$$= \kappa[2x \ln x^{-1} + x^2 \frac{1}{x^{-1}}\,(x^{-1})'\,]$$

$$= \kappa[2x \ln x^{-1} + x^2 x\,(-1)\,x^{-2}\,]$$

$$= \kappa[2x \ln x^{-1} - x\,]$$

$$= \kappa x[2 \ln x^{-1} - 1]$$

$\upsilon'(x) = 0 \iff 2\ln x^{-1} - 1 = 0$

$-2\ln x = 1 \iff$

$\ln x = -\frac{1}{2} \iff x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$\upsilon'(x) > 0 \iff 2\ln x^{-1} - 1 > 0$

$-2\ln x > 1$

$\ln x < -\frac{1}{2} \iff x < e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Το πρόσημο της υ΄ και η μονοτονία της υ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

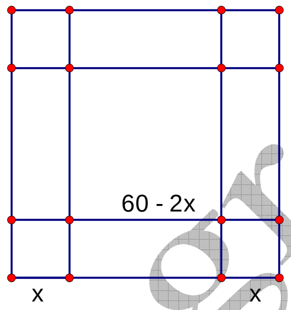
x	0 $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt{e}}$ $\qquad$ $+\infty$
υ΄	+ $\qquad$ 0 $\qquad$ –
υ	γν. αύξ $\qquad$ γν. φθίν

Άρα η υ παρουσιάζει μέγιστο για $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

3.

Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 60cm θα κατασκευαστεί ένα δοχείο, ανοικτό από πάνω, αφού κοπούν από τις γωνίες του τέσσερα ίσα τετράγωνα και στη συνέχεια διπλωθούν προς τα πάνω οι πλευρές. .Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του δοχείου, ώστε να έχει το μέγιστο όγκο.

Λύση



Έστω x η πλευρά του τετραγώνου που αποκόπτεται από κάθε γωνία της λαμαρίνας.
(Πρέπει να είναι $0 < x < 30$)
x θα είναι και το ύψος του δοχείου, το δε τετράγωνο – βάση του δοχείου θα έχει πλευρά $60 – 2x$.
Ο όγκος του δοχείου θα είναι

$$V(x) = (60-2x)^2 x = 4(30-x)^2 x = 4(900-60x+x^2)x = 4(x^3-60x^2+900x), \quad 0<x<30$$

$$V'(x) = 4(3x^2-120x+900) = 12(x^2-40x+300)$$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-40x+300=0$, $\quad \Delta = 1600-1200 = 400$

$$x = \frac{40\pm\sqrt{400}}{2} = \frac{40\pm 20}{2} = 10 \text{ ή } 30 \text{ απορρίπτεται}$$

αφού $0 < x < 30$

$V'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2-40x+300>0 \Leftrightarrow 0<x<10$ ή $30<x<60$ απορρίπτεται αφού $0<x<30$

Το πρόσημο της V΄ και η μονοτονία της V φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

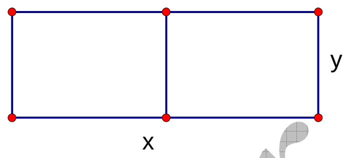
x	0	10	30
V΄	+	0	–
V	γν. αύξ		γν. φθίν

Άρα η V παρουσιάζει μέγιστο για $x = 10$
Οπότε οι διαστάσεις του δοχείου θα είναι $60 – 2\cdot 10 = 40$, 40, 10

4.

Θέλουμε να περιφράξουμε μια περιοχή 16000 m^2 σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις και να τη χωρίσουμε στη μέση. Ο φράχτης για την περίφραξη κοστίζει 9 ευρώ/m και ο φράχτης για το χώρισμα 6 ευρώ/m. Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε, να έχουμε το ελάχιστο κόστος για την περίφραξη μαζί με το χώρισμα.

Λύση



Έστω x, y οι διαστάσεις του ορθογωνίου.

Εμβαδόν = xy $\Rightarrow$ $xy = 16000$

$$y = \frac{16000}{x} \quad \textbf{(1)}$$

Περίμετρος = $2x + 2y$

Κόστος περίφραξης + Κόστος χωρίσματος $= (2x+2y)9 + y\cdot 6$

$$= 18x + 18y + 6y$$

$$= 18x + 24y$$

$$\overset{(1)}{=} 18x + 24\cdot\frac{16000}{x}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = 18x + 24\cdot\frac{16000}{x}$ που εκφράζει το κόστος

$$K'(x) = 18 + 24\cdot 16000\left(\frac{1}{x}\right)' = 18 - 24\cdot 16000\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$K'(x) = 0 \iff 18 - 24\cdot 16000\cdot\frac{1}{x^2} = 0$$

$$18x^2 - 24\cdot 16000 = 0$$

$$18x^2 = 24\cdot 16000$$

$$x^2 = \frac{24}{18}\cdot 16000$$

$$x^2 = \frac{3\cdot 4}{9}\cdot 1600.\ 10$$

$$x = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\cdot 40\ \sqrt{10} = \frac{80\cdot\sqrt{30}}{3}$$

$$K'(x) > 0 \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \iff x > \frac{80\cdot\sqrt{30}}{3}$$

Το πρόσημο της K' και η μονοτονία της K φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0	$80\sqrt{30}/3$	$+\infty$
K΄	–	0	+
K	γν. φθίν		γν. αύξ

Άρα η K παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \frac{80\cdot\sqrt{30}}{3}$

Από (1) $\Rightarrow$ $y = 16000\ \frac{3}{80\sqrt{30}} =$

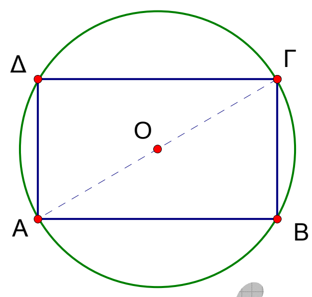
$$= 200\ \frac{3}{\sqrt{30}} = \frac{600}{\sqrt{30}} = \frac{600\sqrt{30}}{30} = 20\sqrt{30}$$

5.

Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ να εγγράψετε το ορθογώνιο με το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Λύση

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο εγγεγραμμένο στο δοσμένο κύκλο και x, y οι διαστάσεις του.
Φέρουμε την ΑΓ



Πυθαγόρειο στο τρ, ΑΒΓ: $x^2 + y^2 = (2\rho)^2$

$$x^2 + y^2 = 4\rho^2$$

$$y^2 = 4\rho^2 - x^2$$

$$y = \sqrt{4\rho^2 - x^2} \qquad \textbf{(1)}$$

$(ΑΒΓΔ) = xy = x\sqrt{4\rho^2 - x^2}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $E(x) = x\sqrt{4\rho^2 - x^2}$ με $0 < x < 2\rho$, που εκφράζει το εμβαδόν

$$E'(x) = \sqrt{4\rho^2 - x^2} + x(\sqrt{4\rho^2 - x^2})'$$

$$= \sqrt{4\rho^2 - x^2} + x\frac{1}{2\sqrt{4\rho^2 - x^2}}(4\rho^2 - x^2)'$$

$$= \sqrt{4\rho^2 - x^2} + x\frac{1}{2\sqrt{4\rho^2 - x^2}}(-2x)$$

$$= \sqrt{4\rho^2 - x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{4\rho^2 - x^2}} = \sqrt{4\rho^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4\rho^2 - x^2}}$$

$$E'(x) = 0 \iff \sqrt{4\rho^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4\rho^2 - x^2}} = 0$$

$$4\rho^2 - x^2 - x^2 = 0$$

$$4\rho^2 = 2x^2$$

$$x^2 = 2\rho^2 \iff x = \rho\sqrt{2}$$

$E'(x) > 0 \iff$ ………………..$x < \rho\sqrt{2}$

Το πρόσημο της E' και η μονοτονία της E φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0	$\rho\sqrt{2}$	2ρ
E'	+	0	–
E	γν. αύξ		γν. φθίν

Άρα η E παρουσιάζει μέγιστο για $x = \rho\sqrt{2}$

Από (1) $\Rightarrow$ $y = \sqrt{4\rho^2 - (\rho\sqrt{2})^2} = \sqrt{4\rho^2 - 2\rho^2} = \sqrt{2\rho^2} = \rho\sqrt{2}$

Επομένως το ζητούμενο ορθογώνιο είναι το τετράγωνο

6.

Ένα σύρμα μήκους λ κόβεται σε δύο τμήματα με τα οποία σχηματίζουμε έναν κύκλο και ένα τετράγωνο αντιστοίχως. Να δείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι ελάχιστο, όταν η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου.

Λύση

Έστω x το τμήμα μήκος του κύκλου, οπότε $\frac{1}{4}(\lambda - x)$ θα είναι η πλευρά του τετραγώνου.

Αν ρ είναι η ακτίνα του κύκλου, τότε $x = 2\pi\rho \;\Rightarrow\; \rho = \frac{x}{2\pi}$

Εμβαδόν του κύκλου $= \pi\rho^2 = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \pi\frac{x^2}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi}x^2$

Εμβαδόν του τετραγώνου $= \frac{1}{16}(\lambda - x)^2 = \frac{1}{16}(x^2 - 2\lambda x + \lambda^2)$

$$= \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{8}\lambda x + \frac{1}{16}\lambda^2$$

Άθροισμα των εμβαδών : $E(x) = \left(\frac{1}{4\pi}+\frac{1}{16}\right)x^2 - \frac{1}{8}\lambda x + \frac{1}{16}\lambda^2$, όπου $0 < x < \lambda$

$E'(x) = \left(\frac{1}{4\pi}+\frac{1}{16}\right)2x - \frac{1}{8}\lambda$

$E'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{1}{4\pi}+\frac{1}{16}\right)2x - \frac{1}{8}\lambda = 0$

$(4+\pi)\,2x = 2\lambda\pi \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\lambda\pi}{4+\pi}$

$E'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\;$ …………………… $x > \frac{\lambda\pi}{4+\pi}$

Το πρόσημο της E' και η μονοτονία της E φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0	$\lambda\pi/(4+\pi)$	λ
E΄	–	0	+
E	γν. φθίν		γν. αύξ

Άρα η E παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \frac{\lambda\pi}{4+\pi}$

Τότε

η πλευρά του τετραγώνου $\frac{1}{4}(\lambda - x)$ γίνεται

$\frac{1}{4}\left(\lambda - \frac{\lambda\pi}{4+\pi}\right) = \frac{1}{4}\,\frac{4\lambda+\lambda\pi-\lambda\pi}{4+\pi} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4\lambda}{4+\pi} = \frac{\lambda}{4+\pi}$,

και η διάμετρος του κύκλου $2\rho = 2\cdot\frac{x}{2\pi} = \frac{x}{\pi} = \frac{\frac{\lambda\pi}{4+\pi}}{\pi} = \frac{\lambda}{4+\pi}$, άρα ίσες

8.

Ένα ορισμένο όχημα, όταν ταξιδεύει με ταχύτητα υ km/h, καταναλώνει την ώρα $6 + 0{,}0001\,\upsilon^3$ λίτρα καύσιμα.

i) Να βρείτε τη συνολική ποσότητα καυσίμων που χρειάζεται για να διανύσει μια απόσταση 1000 km με σταθερή ταχύτητα υ.

ii) Να βρείτε την τιμή του υ για την οποία έχουμε την οικονομικότερη κατανάλωση καυσίμων, καθώς και την ποσότητα καυσίμων που χρειάζεται το όχημα για να διανύσει τα 1000km.
Να σχολιάσετε αν η απάντηση στο ερώτημα ii) είναι εφαρμόσιμη λόγω της μεγάλης απόστασης.

Λύση

i)

Για να διανύσει 1000km θα χρειαστεί $\frac{1000}{\upsilon}$ ώρες,

άρα θα καταναλώσει $\Lambda(\upsilon) = (6 + 0{,}0001\,\upsilon^3)\cdot\frac{1000}{\upsilon}$ λίτρα

$$\Lambda(\upsilon) = \frac{6000}{\upsilon} + 0{,}1\,\upsilon^2 \quad \textbf{(1)}$$

ii)

$\Lambda'(\upsilon) = 6000\cdot\left(-\frac{1}{\upsilon^2}\right) + 0{,}1\cdot 2\,\upsilon = -\,6000\cdot\frac{1}{\upsilon^2} + 0{,}2\,\upsilon$

$\Lambda'(\upsilon) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\,6000\cdot\frac{1}{\upsilon^2} + 0{,}2\,\upsilon = 0$

$-\,6000 + 0{,}2\,\upsilon^3 = 0$

$0{,}2\,\upsilon^3 = 6000$

$2\,\upsilon^3 = 60000$

$\upsilon^3 = 30000 \quad \Leftrightarrow \quad \upsilon = \sqrt[3]{30000} = 10\sqrt[3]{30} \simeq 31$ km/h

$\Lambda'(\upsilon) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \upsilon > 10\sqrt[3]{30}$

Το πρόσημο της Λ' και η μονοτονία της Λ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

υ	0		$10\sqrt[3]{30}$		$+\infty$
Λ'		–	0	+	
Λ		γν. φθίν		γν. αύξ	

Άρα η Λ παρουσιάζει ελάχιστο για $\upsilon = 10\sqrt[3]{30}$ km/h (η οικονομικότερη ταχύτητα)
Η ποσότητα καυσίμων που χρειάζεται το όχημα για να διανύσει τα 1000km με την οικονομικότερη ταχύτητα είναι,

από την (1): $\Lambda(10\sqrt[3]{30}) = \frac{6000}{10\sqrt[3]{30}} + 0{,}1\,(10\sqrt[3]{30})^2$

Σχολιασμός : Δεν είναι εφαρμόσιμη λόγω της μικρής ταχύτητας και της μεγάλης απόστασης.

9.

Δύο ηλεκτρικές αντιστάσεις πρέπει να έχουν άθροισμα 450 Ω. Πως πρέπει να επιλεγούν ώστε, όταν συνδεθούν εν παραλλήλω να δίνουν τη μέγιστη ολική αντίσταση;

Λύση

Έστω x, y δύο αντιστάσεις με $x + y = 450 \Rightarrow y = 450 - x$

Όταν συνδεθούν εν παραλλήλω, η ολική αντίσταση θα είναι

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{450 - x}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{450 - x}$ που εκφράζει την ολική αντίσταση σε παράλληλη συνδεσμολογία

$$\alpha'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' + \left(\frac{1}{450 - x}\right)'$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(450 - x)^2}(450 - x)'$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(450 - x)^2}(-1) = \frac{1}{(450 - x)^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$\alpha'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(450 - x)^2} - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 - (450 - x)^2 = 0$$

$$x^2 = (450 - x)^2$$

$$x = 450 - x$$

$$2x = 450 \Leftrightarrow x = 225$$

$\alpha'(x) > 0 \Leftrightarrow$ …………… $x > 225$

Το πρόσημο της α΄ και η μονοτονία της α φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

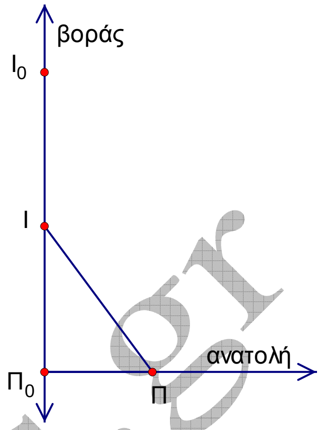
x	0	225	450
α΄	–	0	+
α	γν. φθίν		γν. αύξ

Άρα η α παρουσιάζει ελάχιστο για x = 225

10.

Το μεσημέρι ένα ιστιοφόρο βρίσκεται 20 χιλιόμετρα βορείως ενός φορτηγού πλοίου. Το ιστιοφόρο ταξιδεύει νότια με 40 km/h, και το φορτηγό ανατολικά με 20 km/h. Αν η ορατότητα είναι 10 km, θα έχουν οι άνθρωποι οπτική επαφή σε κάποια στιγμή;

Λύση



Το μεσημέρι (χρονική στιγμή $t_0 = 0$), το πλοίο βρίσκεται σε θέση Π_0 και το ιστιοφόρο σε θέση I_0 ώστε $(\Pi_0 I_0) = 20$.

Σε χρόνο t, το πλοίο θα διανύσει απόσταση $(\Pi_0 \Pi) = 20t$ και το ιστιοφόρο απόσταση $(I_0 I) = 40t$, άρα

$$(\Pi_0 I) = (\Pi_0 I_0) - (I_0 I) = 20 - 40t = 20(1-2t)$$

Πυθαγόρειο:

$$(I\,\Pi) = \sqrt{(\Pi_0 I)^2 + (\Pi_0 \Pi)^2} = \sqrt{[20(1-2t)]^2 + (20t)^2} = \sqrt{400(1-4t+4t^2)+400t^2} = 20\sqrt{1-4t+4t^2+t^2} = 20\sqrt{5t^2-4t+1}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $d(t) = 20\sqrt{5t^2-4t+1}$ με $t > 0$ που εκφράζει την απόσταση $(I\,\Pi)$

$$d'(t) = 20\frac{1}{2\sqrt{5t^2-4t+1}}(5t^2-4t+1)' = 10\frac{1}{\sqrt{5t^2-4t+1}}(10t-4)$$

$$d'(t) = 0 \Leftrightarrow 10t-4=0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5}$$

$$d'(t) > 0 \Leftrightarrow 10t-4>0 \Leftrightarrow t > \frac{2}{5}$$

Το πρόσημο της d΄ και η μονοτονία της d φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

t	0	2/5	$+\infty$
Λ΄	–	0	+
Λ	γν. φθίν		γν. αύξ

Άρα η d παρουσιάζει ελάχιστο για $t = \frac{2}{5}$

Η ελάχιστη απόσταση d θα είναι

$$d\left(\frac{2}{5}\right) = 20\sqrt{5\left(\frac{2}{5}\right)^2 - 4\cdot\frac{2}{5}+1} = 20\sqrt{5\cdot\frac{4}{25} - 4\cdot\frac{2}{5}+1} =$$

$$20\sqrt{\frac{4}{5}-\frac{8}{5}+\frac{5}{5}} = 20\sqrt{\frac{1}{5}} = 20\frac{1}{\sqrt{5}} = 20\frac{\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5} = \sqrt{16\cdot 5} = \sqrt{80} < \sqrt{100} = 10$$

Η ελάχιστη λοιπόν απόσταση τους είναι $<$ της ορατότητας 10, άρα κάποια στιγμή θα έχουν οπτική επαφή.