1.2
Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδας 26 – 27

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.
Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

i) $f(x) = 3x + 1$ στο $x = 3$

ii) $g(x) = x^2 + 5$ στο $x = –2$

iii) $\sigma(x) = x^2 + 2x$ στο $x = 4$

Λύση

i)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(3+h)+1-3\cdot 3-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{9+3h+1-9-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0}3 = 3$$

Άρα $f\,'(3) = 3$

ii)

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(-2+h)-g(-2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(-2+h)^2+5-(-2)^2-5}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4-4h+h^2+5-4-5}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-4h+h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(-4+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(-4+h) = -4$$

Άρα $g'(–2) = – 4$

iii)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sigma(4+h)-\sigma(4)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2+2(4+h)-16-8}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{16+8h+h^2+8+2h-16-8}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+10h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(h+10)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+10) = 0 + 10 = 10$$

Άρα $\sigma'(4) = 10$

2.

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(t)=\frac{1}{t+1}$ στο $t=1$

Λύση

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+h+1}-\frac{1}{1+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2-2-h}{2(2+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{2h(2+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}$$

άρα $f\,'(1)=-\frac{1}{4}$

3.

i) Το μήκος L ενός κύκλου ακτίνας r είναι $L = 2\pi r$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του L ως προς r όταν $r = 3$.

ii) Το εμβαδόν E ενός κύκλου ακτίνας r είναι $E = \pi r^2$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ως προς r όταν $r = 2$.

Λύση

i)

$$\lim_{h\to 0}\frac{L(3+h)-L(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\pi(3+h)-2\pi\cdot 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{6\pi+2\pi h-6\pi}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\pi h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\pi h}{h} = \lim_{h\to 0}(2\pi) = 2\pi.$$

Άρα $L'(3) = 2\pi$, δηλαδή ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι $L'(3) = 2\pi$

ii)

$$\lim_{h\to 0}\frac{E(2+h)-E(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\pi(2+h)^2-\pi\cdot 2^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\pi(4+4h+h^2)-4\pi}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4\pi+4\pi h+\pi h^2-4\pi}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4\pi h+\pi h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to o}\frac{h(4\pi+\pi h)}{h} = \lim_{h\to 0}(4\pi+\pi h) = 4\pi + \pi\cdot 0 = 4\pi$$

Άρα ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι $E'(2) = 4\pi$

4.

i) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ενός τετραγώνου πλευράς x, ως προς x , όταν x = 5

ii) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου V ενός κύβου πλευράς x, ως προς x, όταν x = 10 .

Λύση

i)

Είναι $E(x) = x^2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{E(5+h)-E(5)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(5+h)^2-5^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{25+10h+h^2-25}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{10h+h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(10+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(10+h) = 10 .$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού, όταν $x = 5$, είναι $E'(5) = 10$

ii)

Είναι $V(x) = x^3$

$$\lim_{h\to 0}\frac{V(10+h)-V(10)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(10+h)^3-10^3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1000+300h+30h^2+h^3-10^3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(300+30h+h^2)}{h} .$$
$$= \lim_{h\to 0}(300+30h+h^2) = 300 + 30\cdot 0 + 0^2 = 300$$

Άρα ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι $V'(10) = 300$.

5.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στην γραφική παράσταση της συνάρτησης

i) $f(x) = x^2$ στο $A(3, f(3))$

ii) $f(x) = 2\sqrt{x}$ στο $A(4, f(4))$

Λύση

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

i)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2-9}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(6+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6+0 = 6$$

Άρα $f'(x_0) = f'(3) = 6$, και $f(x_0) = f(3) = 3^2 = 9$

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y - 9 = 6(x-3) \Leftrightarrow y - 9 = 6x - 18 \Leftrightarrow y = 6x - 9$$

ii)

Είναι $f(x_0) = f(4) = 2\sqrt{4} = 2 \cdot 2 = 4$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sqrt{4+h}-4}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2\sqrt{4+h}-4)(2\sqrt{4+h}+4)}{h(2\sqrt{4+h}+4)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4(4+h)-16}{h(2\sqrt{4+h}+4)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{16+4h-16}{h(2\sqrt{4+h}+4)}$$

$$= \frac{4h}{h(2\sqrt{4+h}+4)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4}{2\sqrt{4+h}+4} = \frac{4}{4+4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Άρα $f'(4) = \frac{1}{2}$ επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x-4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$