1.1
Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδας 17 – 18

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.
Αν $f(x) = x^3 - 3x$, να υπολογίσετε τις τιμές $f(1)$, $f(2)$, $f(-1)$

Λύση

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2$

$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$

2.
Αν $\varphi(t) = t^2 - 5t + 6$, να υπολογίσετε τις τιμές $\varphi(0)$ και $\varphi(1)$. Για ποιες τιμές του t είναι $\varphi(t) = 0$;

Λύση

$\varphi(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 0 - 0 + 6 = 6$

$\varphi(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 5 + 6 = 2$

$\varphi(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 5t + 6 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4.1\,6 = 25 - 24 = 1$, $\quad t = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{5 \pm \sqrt{1}}{2.1} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = 3$ ή 2

3.

Αν $h(\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta$, να υπολογίσετε τις τιμές $h(0)$ και $h\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Για ποιες τιμές της γωνίας $\theta \in [0, 2\pi]$ είναι $h(\theta) = 0$**;**

Λύση

$h(0) = \sigma\upsilon\nu 0 - \eta\mu 0 = 1 - 0 = 1$

$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - \eta\mu\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$

$h(\theta) = 0 \iff \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta = 0 \iff \sigma\upsilon\nu\theta = \eta\mu\theta$ **(1)**

- Όταν $\sigma\upsilon\nu\theta = 0$, η (1) $\iff 0 = \eta\mu\theta$
  Η ταυτότητα $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Rightarrow 0 + 0 = 1$ που είναι άτοπο.
- Όταν $\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$, η (1) $\iff 1 = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$
  $\varepsilon\varphi\theta = 1$
  $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

  και επειδή $\theta \in [0, 2\pi]$, θα είναι οι $\theta = \frac{\pi}{4}$ ή $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

4.

Αν $f(x) = \frac{1}{2}\ln x^2$, να υπολογίσετε τις τιμές $f(1)$ και $f(e)$

Λύση

$f(1) = \frac{1}{2}\ln 1^2 = \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$

$f(e) = \frac{1}{2}\ln e^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\ln e = 1\cdot 1 = 1$

5.

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x}{(x-1)(x-2)}$;

Λύση

Πρέπει να είναι $(x-1)(x-2) \neq 0 \iff$
$x - 1 \neq 0$ και $x - 2 \neq 0$
$x \neq 1$ και $x \neq 2$

Άρα το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης είναι $A = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

6.

Για ποιες τιμές του x είναι αρνητική η συνάρτηση $f(x) = (x-3)(x-7)$ **;**

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\sigma(x) = \sqrt{(x-3)(x-7)}$ **;**

Λύση

$f(x) = (x-3)(x-7) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = x^2 - 10x + 21$

Πρόσημο του τριωνύμου f(x)

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
f(x)		+	0	–	0	+	

Άρα $f(x) < 0$ όταν $3 < x < 7$

Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\sigma(x) = \sqrt{(x-3)(x-7)}$:

Πρέπει $(x-3)(x-7) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 3$.η $x \geq 7$.

Άρα $A_\sigma = (-\infty\ ,\ 3] \cup [7\ ,+\infty)$

7.

Αν $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ και $g(x) = 2x - 1$, να βρείτε τις συναρτήσεις

$$f(x) + g(x) \quad , \quad f(x) + g(x) \quad , \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

Λύση

Είναι φανερό ότι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g είναι

$A_f = \mathbb{R}$ και $A_g = \mathbb{R}$

Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η συνάρτηση f + g.

Είναι δε $f(x) + g(x) = (3x^2 - 2x - 1) + (2x - 1)$

$= 3x^2 - 2x - 1 + 2x - 1$

$= 3x^2 - 2$

Επίσης για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η συνάρτηση f.g

Είναι δε $f(x)\, g(x) = (3x^2 - 2x - 1)\,(2x - 1)$

$= 6x^3 - 3x^2 - 4x^2 + 2x - 2x + 1$

$= 6x^3 - 7x^2 + 1$

Για να ορίζεται η συνάρτηση $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, θα πρέπει να είναι

$g(x) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \dfrac{1}{2}$

Οπότε $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{2x - 1}$

8.

Να υπολογίσετε τα όρια

i) $\lim_{x\to 0}(x^2-3x+4)$ **ii)** $\lim_{x\to -2}[(2x-1)(x+4)]$ **iii)** $\lim_{x\to 4}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

iv) $\lim_{x\to 0}(2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x)$ **v)** $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}(3\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$

Λύση

i) $\lim_{x\to 0}(x^2-3x+4)=0^2-3\cdot 0+4=4$

ii) $\lim_{x\to -2}[(2x-1)(x+4)]=[2(-2)-1](-2+4)=(-4-1)(-2+4)=(-5)\cdot 2=-10$

iii) $\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})=\sqrt{4}+\frac{1}{\sqrt{4}}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

iv) $\lim_{x\to 0}(2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x)=2\eta\mu 0+3\sigma\upsilon\nu 0=2\cdot 0+3\cdot 1=3$

v) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}(3\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}(3\eta\mu\frac{\pi}{4}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4})=3\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

9.

Να υπολογίσετε τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3(x-2)}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2}{x^2+1}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to 0}[(x+1)\sigma\upsilon\nu x]$

iv) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$ **v)** $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}$ **vi)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x-2}$

Λύση

i) $$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{3(x-2)}=\frac{(-2)^2-4}{3(-2-2)}=\frac{4-4}{-12}=\frac{0}{12}=0$$

ii) $$\lim_{x\to -1}\frac{5x^2}{x^2+1}=\frac{5(-1)^2}{(-1)^2+1}=\frac{5}{2}$$

iii) $$\lim_{x\to 0}[(x+1)\sigma\upsilon\nu x]=(0+1)\sigma\upsilon\nu 0=1\cdot 1=1$$

iv) $$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=4+4=8$$

v) $$\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x+5}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -5}\frac{(x+5)(x-5)}{x+5}=\lim_{x\to -5}(x-5)=-5-5=-10$$

vi) $$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)\quad \textbf{(1)}$$

Αναλύσουμε τον αριθμητή σε γινόμενο **:** $2x^2-3x-2=(x-2)(2x+1)$

$$(1)\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(2x+1)=2\cdot 2+1=5$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.

Αν $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$,   να αποδείξετε ότι $f(x) + f(-x) = 1$

Λύση

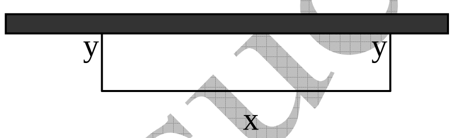
$$f(x)+f(-x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{1}{1+e^{-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{1}{1+\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}$$

$$= \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{1}{\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}}} = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1$$

2.

Έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα μήκους 100 m μία ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της. Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Αν το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x , να εκφράσετε το εμβαδόν της περιοχής σαν συνάρτηση του x .

Λύση



Η περιοχή που έχουμε περιφράξει έχει μήκος $x + 2y$.

Αφού το σύρμα που χρησιμοποιήσαμε ήταν 100 m, θα έχουμε $x + 2y = 100$ **(1)** .

Το εμβαδόν της ορθογώνιας περιοχής είναι $E = xy$.

Όμως από την (1) έχουμε ότι $y=\dfrac{100-x}{2}$

Άρα $E(x)=x\left(\dfrac{100-x}{2}\right)=\dfrac{100x-x^2}{2}$, $0<x<100$

3.
Ένα κυλινδρικό φλιτζάνι , ανοικτό προς τα πάνω , κατασκευάζεται έτσι ώστε το ύψους του και το μήκος της βάσης του να έχουν άθροισμα 20 cm . Αν το φλιτζάνι έχει ύψος h**,** να εκφράσετε τον όγκο του φλιτζανιού ως συνάρτηση του h . Αν η ακτίνα της βάσης είναι r να εκφράσετε το εμβαδόν της επιφάνειας ως συνάρτηση του r

Λύση

Το μήκος της βάσης του κυλίνδρου είναι $2\pi r$.

Επομένως $h + 2\pi r = 20$ **(1)** $\Rightarrow$ $r = \frac{20-h}{2\pi}$ **(2)**

Ο όγκος του κυλίνδρου είναι $V = \pi r^2 h \overset{(2)}{\Rightarrow}$

$$V(h) = \pi\left(\frac{20-h}{2\pi}\right)^2 h \quad \text{με} \quad 0 < h < 20$$

Το εμβαδόν της ζητούμενης επιφάνειας είναι

$E_{ζητουμ} = E_{παραπλ} + E_{βαση}$.

Αλλά $E_{παραπ} = 2\pi rh$ και $E_{βαση} = \pi r^2$.

Άρα $E_{ζητουμ} = 2\pi rh + \pi r^2$. **(3)**

(1) $\Rightarrow$ $h = 20 - 2\pi r$

(3) $\Rightarrow$ $E(r) = 2\pi r(20 - 2\pi r) + \pi r^2$

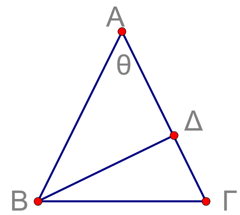
Όμως από την (1) προκύπτει ότι $0 < 2\pi r < 20$ άρα $0 < r < \frac{20}{2\pi} \Leftrightarrow 0 < r < \frac{10}{\pi}$.

Επομένως τελικά έχουμε $E(r) = 2\pi r(20 - 2\pi r) + \pi r^2$ με $0 < r < \frac{10}{\pi}$.

4.

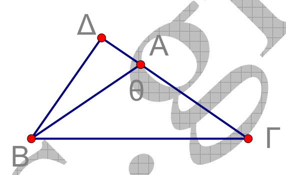
Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = ΑΓ = 10m. Αν $B\hat{A}\Gamma = \theta$, να εκφράσετε το ύψος υ του τριγώνου από την κορυφή Β καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου ως συνάρτηση του θ.

Λύση



- Όταν $\theta < 90^o$, από το τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $\eta\mu\theta = \dfrac{B\Delta}{AB} \Rightarrow$

  $(AB) = (B\Delta)\eta\mu\theta = 10\eta\mu\theta$



- Όταν $\theta > 90^o$, από το τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $\eta\mu(180^0 - \theta) = \dfrac{B\Delta}{AB}$.

  Και επειδή $\eta\mu(180^o - \theta) = \eta\mu\theta$,

  θα έχουμε $\eta\mu\theta = \dfrac{B\Delta}{AB} \Rightarrow$

  $(AB) = (B\Delta)\eta\mu\theta = 10\eta\mu\theta$

- Όταν $\theta = 90^o$, τότε το ύψος $B\Delta = AB$

  Οπότε $(B\Delta) = (AB) = 10 = 10\cdot 1 = 10\cdot \eta\mu 90^o = 10\eta\mu\theta$

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση είναι $\upsilon(\theta) = 10\eta\mu\theta$ με $0^0 < \theta < 180^0$

Για το εμβαδόν του τριγώνου θα έχουμε

$E = \frac{1}{2}(A\Gamma)\cdot(B\Delta) = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10\eta\mu\theta = 50\eta\mu\theta$, δηλαδή

$E(\theta) = 50\eta\mu\theta$, $0^0 < \theta < 180^0$.

5.

Να δείξετε ότι

i) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ **ii)** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\dfrac{1}{2}$

Λύση

i)

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\ .$$

ii)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)}$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$$