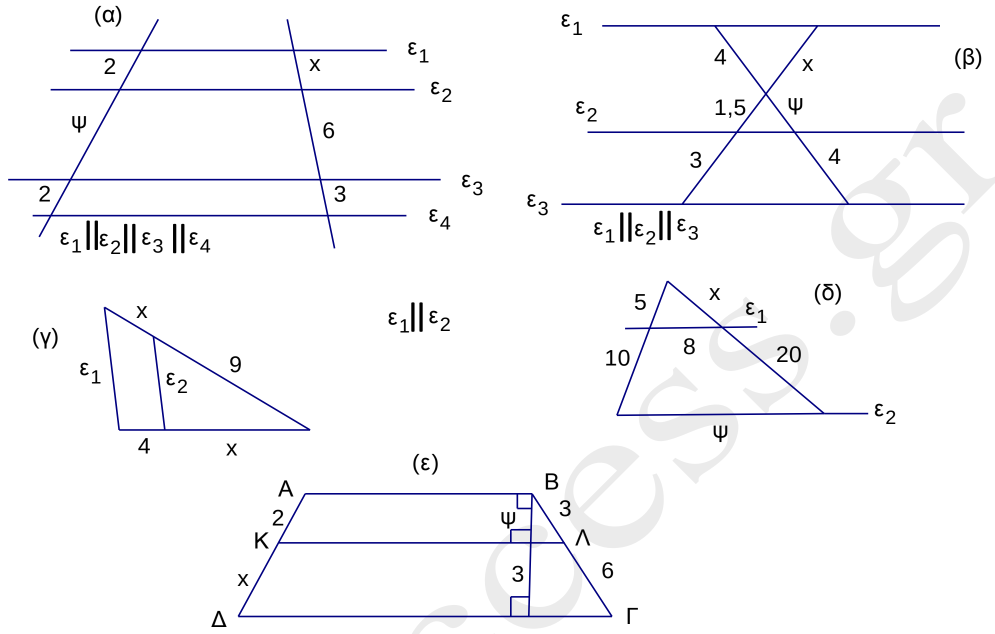
7.7
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 156

Ερωτήσεις Κατανόησης

1.

Στα παρακάτω σχήματα να βρείτε τα x, ψ



Απάντηση

Στο σχήμα (α) με εφαρμογή του θεωρήματος Θαλή έχουμε

$$\frac{2}{2}=\frac{x}{3} \Leftrightarrow x=3 \quad \text{και} \quad \frac{\psi}{2}=\frac{6}{3} \Leftrightarrow \psi=4$$

Στο σχήμα (β) ομοίως έχουμε $\frac{1{,}5}{3}=\frac{\psi}{4} \Leftrightarrow \psi=2$ και $\frac{x}{1{,}5}=\frac{4}{2} \Leftrightarrow x=3$

Στο σχήμα (γ) : $\frac{9}{x}=\frac{x}{4} \Leftrightarrow x^2=36 \Leftrightarrow x=6$

Στο σχήμα (δ) : $\frac{5}{5+10}=\frac{x}{x+20}=\frac{8}{\psi}$ απ' όπου

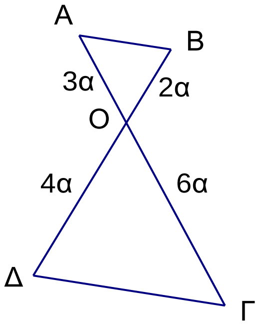
$$\frac{5}{5+10}=\frac{x}{x+20} \Leftrightarrow x=10 \quad \text{και} \quad \frac{5}{5+10}=\frac{8}{\psi} \Leftrightarrow \psi=24$$

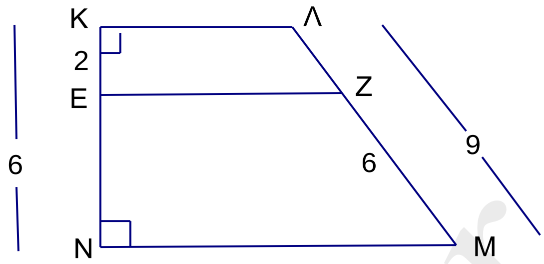
Στο σχήμα (ε) είναι ΑΒ || ΚΛ || ΔΓ διότι και τα τρία τμήματα είναι

κάθετα στην ίδια ευθεία, οπότε $\frac{2}{x}=\frac{3}{6} \Leftrightarrow x=4$ και $\frac{\psi}{3}=\frac{3}{6} \Leftrightarrow \psi=1{,}5$

2.

Να δικαιολογήσετε γιατί ΑΒ || ΓΔ και ΕΖ || ΚΛ || ΜΝ στα παρακάτω σχήματα





Απάντηση

Στο πρώτο σχήμα έχουμε

$$\frac{OB}{O\Delta}=\frac{2\alpha}{4\alpha}=\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \frac{OA}{O\Gamma}=\frac{3\alpha}{6\alpha}=\frac{1}{2} \quad \text{άρα} \quad \frac{OB}{O\Delta}=\frac{OA}{O\Gamma}$$

Από το αντίστροφο του Θαλή έχουμε ΑΒ || ΓΔ

Στο δεύτερο σχήμα έχουμε $\frac{KE}{KN}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ και $\frac{\Lambda Z}{\Lambda M}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ άρα

$$\frac{KE}{KN}=\frac{\Lambda Z}{\Lambda M}$$

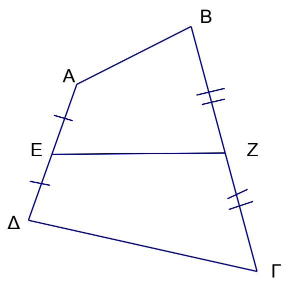
Και αφού ΚΛ || ΜΝ επειδή είναι κάθετες στην ίδια ευθεία , σύμφωνα με το αντίστροφο του Θαλή έχουμε και ΕΖ || ΚΛ || ΜΝ

3.

Στο διπλανό σχήμα είναι

i) $\frac{AE}{E\Delta}=\frac{BZ}{Z\Gamma}$ Σ Λ

ii) ΕΖ || ΓΔ Σ Λ



Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μία από τις προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας .

Απάντηση

i) Αφού $\frac{AE}{E\Delta}=1=\frac{BZ}{Z\Gamma}$, το (i) είναι σωστό

ii) Είναι λάθος διότι δεν είναι ΑΒ || ΓΔ

4.

Δίνεται τμήμα ΑΒ και δύο σημεία Γ και Δ ώστε $\frac{\Gamma A}{\Gamma B}=\frac{\Delta A}{\Delta B}$

Αρκεί η παραπάνω σχέση για να είναι τα Γ και Δ συζυγή αρμονικά των Α και Β ;

Απάντηση

Όχι , θα πρέπει το ένα να είναι εσωτερικό του τμήματος ΑΒ και το άλλο εξωτερικό

5.

Στο παρακάτω σχήμα είναι $K\Lambda = 4$, $\Lambda E = 2$. Να βρείτε σημείο Ζ ώστε τα σημεία (Ζ, Ε) να είναι συζυγή αρμονικά των (Κ, Λ)

Απάντηση

Πρέπει το Ζ να είναι εσωτερικό του ΚΛ και να ισχύει

$$\frac{ZK}{Z\Lambda}=\frac{EK}{E\Lambda} \Leftrightarrow \frac{ZK}{Z\Lambda}=\frac{6}{2}=3$$

$$\frac{ZK+Z\Lambda}{Z\Lambda}=\frac{6+2}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{Z\Lambda}=\frac{8}{2} \Leftrightarrow Z\Lambda=1$$ έτσι εντοπίζεται το σημείο Ζ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Στο διπλανό σχήμα είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$, $EZ \parallel AB$ και $ZH \parallel A\Gamma$.

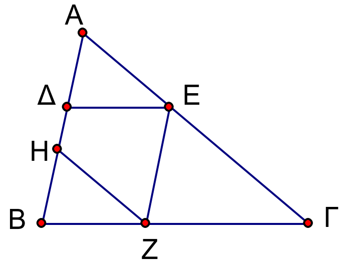
Να αποδείξετε ότι $\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{HB}{HA}$

Λύση

$\Delta E \parallel B\Gamma \Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{EA}{E\Gamma}$ **(1)**

$EZ \parallel AB \Rightarrow \frac{EA}{E\Gamma}=\frac{ZB}{Z\Gamma}$ **(2)**

$ZH \parallel A\Gamma \Rightarrow \frac{ZB}{Z\Gamma}=\frac{HB}{HA}$ **(3)**



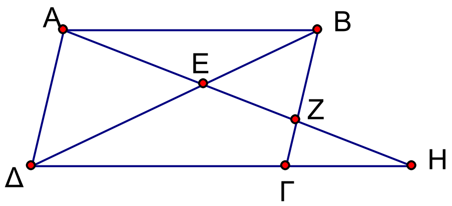
Από τις (1), (2), (3) $\Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{HB}{HA}$

2.

Από την κορυφή Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε ευθεία ε, η οποία τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο Ε, την πλευρά ΒΓ σο Ζ και την προέκταση της ΔΓ στο Η.

Να αποδείξετε ότι **i)** $\dfrac{AZ}{AH} = \dfrac{AB}{\Delta H}$ **ii)** $AE^2 = EZ\,.\,EH$

Λύση



i)

$$Z\Gamma\,\text{Ρ}\,A\Delta \;\Rightarrow\; \frac{AZ}{AH} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta H}$$

αλλά $\Delta\Gamma = AB$

άρα $\dfrac{AZ}{AH} = \dfrac{AB}{\Delta H}$

ii)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{AE}{EZ} = \dfrac{EH}{AE}$

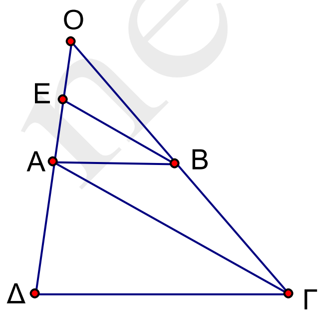
$B Z \parallel A\Delta \;\Rightarrow\; \dfrac{AE}{EZ} = \dfrac{\Delta E}{EB}$ και $AB \parallel \Delta H \;\Rightarrow\; \dfrac{EH}{AE} = \dfrac{E\Delta}{EB}$

Άρα $\dfrac{AE}{EZ} = \dfrac{EH}{AE}$

3.

Οι μη παράλληλες πλευρές ΑΔ, ΒΓ τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Ο. Η παράλληλη από το Β προς την ΑΓ τέμνει την ΑΔ στο Ε. Να αποδείξετε ότι το ΟΑ είναι μέσο ανάλογο των ΟΔ και ΟΕ.

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $OA^2 = O\Delta . OE$

ή $\dfrac{OA}{O\Delta} = \dfrac{OE}{OA}$

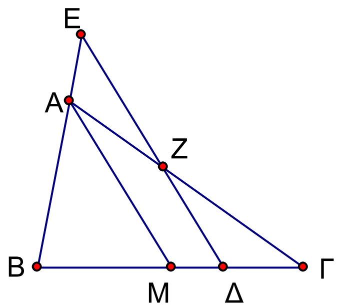
$AB \parallel \Delta\Gamma \;\Rightarrow\; \dfrac{OA}{O\Delta} = \dfrac{OB}{O\Gamma}$

$EB \parallel A\Gamma \;\Rightarrow\; \dfrac{OE}{OA} = \dfrac{OB}{O\Gamma}$

Άρα $\dfrac{OA}{O\Delta} = \dfrac{OE}{OA}$

4.
Από σημείο Δ της πλευράς $ΒΓ$ τριγώνου $ΑΒΓ$ φέρουμε την παράλληλη προς τη διάμεσο $ΑΜ$, που τέμνει τις ευθείες $ΑΒ$ και $ΑΓ$ στα σημεία $Ε$ και $Ζ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\frac{ΑΕ}{ΑΖ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$.

Λύση



Στην αποδεικτέα αναλογία αλλάζουμε μέσους, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{ΑΕ}{ΑΒ}=\frac{ΑΖ}{ΑΓ}$.

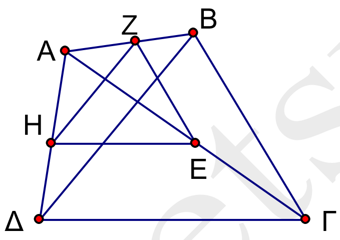
$$ΑΜ \parallel Ε\Delta \Rightarrow \frac{ΑΕ}{ΑΒ}=\frac{Μ\Delta}{ΜΒ}$$

$$Ζ\Delta \parallel ΑΜ \Rightarrow \frac{ΑΖ}{ΑΓ}=\frac{Μ\Delta}{ΜΓ}=\frac{Μ\Delta}{ΜΒ}, \text{ αφού } ΜΓ=ΜΒ$$

Άρα $\frac{ΑΕ}{ΑΒ}=\frac{ΑΖ}{ΑΓ}$.

5.
Δίνεται τετράπλευρο $ΑΒΓ\Delta$ και σημείο $Ε$ της διαγωνίου $ΑΓ$. Οι παράλληλες από το $Ε$ προς τις $ΒΓ$, $Γ\Delta$ τέμνουν τις $ΑΒ$, $Α\Delta$ στα $Ζ$ και $Η$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $ΖΗ \parallel \DeltaΒ$.

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{ΑΗ}{Η\Delta}=\frac{ΑΖ}{ΖΒ}$

$$ΗΕ \parallel \DeltaΓ \Rightarrow \frac{ΑΗ}{Η\Delta}=\frac{ΑΕ}{ΕΓ}$$

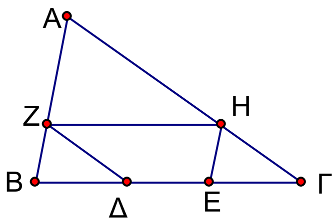
$$ΖΕ \parallel ΒΓ \Rightarrow \frac{ΑΕ}{ΕΓ}=\frac{ΑΖ}{ΖΒ}$$

Άρα $\frac{ΑΗ}{Η\Delta}=\frac{ΑΖ}{ΖΒ}$

6.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε της πλευράς ΒΓ, ώστε $ΒΔ = ΓΕ < \frac{ΒΓ}{2}$. Οι παράλληλες από τα Δ, Ε προς τις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα τέμνουν την ΑΒ στο Ζ κα την ΑΓ στο Η. Να αποδείξετε ότι ΖΗ || ΒΓ.

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{ΑΖ}{ΖΒ} = \frac{ΑΗ}{ΗΓ}$

$ΖΔ \parallel ΑΓ \Rightarrow \frac{ΑΖ}{ΖΒ} = \frac{ΓΔ}{ΔΒ}$

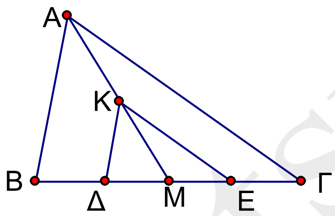
$ΕΗ \parallel ΒΑ \Rightarrow \frac{ΑΗ}{ΗΓ} = \frac{ΒΕ}{ΕΓ}$

Τα δεύτερα μέλη ίσα, άρα και τα πρώτα.

7.

Από τυχαίο σημείο Κ της διαμέσου ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΒ και ΑΓ, που τέμνουν τη ΒΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΜΔ = ΜΕ.

Λύση



ΚΔΡΑΒ $\Rightarrow \frac{ΜΚ}{ΜΑ} = \frac{ΜΔ}{ΜΒ}$

ΚΕ ΡΑΓ $\Rightarrow \frac{ΜΚ}{ΜΑ} = \frac{ΜΕ}{ΜΓ}$

Τα πρώτα μέλη ίσα, άρα και τα δεύτερα, άρα

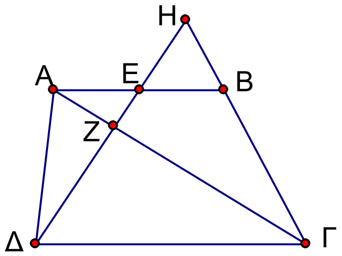
$\frac{ΜΔ}{ΜΒ} = \frac{ΜΕ}{ΜΓ}$ και επειδή ΜΒ = ΜΓ

θα είναι ΜΔ = ΜΕ.

8.

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ || ΓΔ) και Ε το μέσο της μικρής βάσης ΑΒ. Αν η ΔΕ τέμνει τη ΑΓ στο Ζ και την προέκταση της ΓΒ στο Η, να αποδείξετε ότι τα Ζ, Η είναι συζυγή αρμονικά των Δ, Ε.

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{ΖΔ}{ΖΕ} = \dfrac{ΗΔ}{ΗΕ}$

ΑΕ || ΔΓ $\Rightarrow$ τα τρίγωνα ΖΑΕ, ΖΓΔ έχουν πλευρές ανάλογες $\Rightarrow$

$$\frac{ΖΔ}{ΖΕ} = \frac{ΔΓ}{ΑΕ} \quad \textbf{(1)}$$

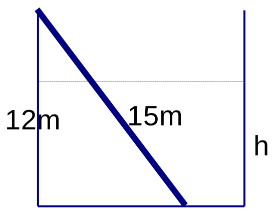
ΕΒ || ΔΓ $\Rightarrow$ τα τρίγωνα ΗΕΒ, ΗΔΓ έχουν πλευρές ανάλογες $\Rightarrow$

$$\frac{ΗΔ}{ΗΕ} = \frac{ΔΓ}{ΕΒ} \quad \textbf{(2)}$$

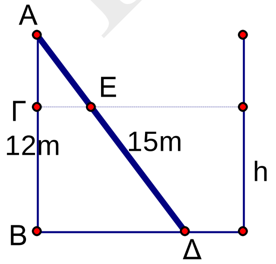
Τα δεύτερα μέλη ίσα, άρα και τα πρώτα.

9.

Δεξαμενή ύψους υ = 12m περιέχει νερό που φτάνει σε ύψος h. Ράβδος μήκους 15m τοποθετείται στη δεξαμενή, όπως στο διπλανό σχήμα. Βγάζουμε τη ράβδο και παρατηρούμε ότι το τμήμα που βρέχτηκε έχει μήκος 10m. Μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος h του νερού;



Λύση



ΑΒ = 12 το ύψος της δεξαμενής

ΓΒ = h το ύψος του νερού

ΑΔ = 15 η ράβδος. Τότε ΕΔ = 10

$$ΓΕΡΒΔ \Rightarrow \frac{ΓΒ}{ΕΔ} = \frac{ΑΒ}{ΑΔ} \Rightarrow \frac{h}{10} = \frac{12}{15} \Rightarrow$$

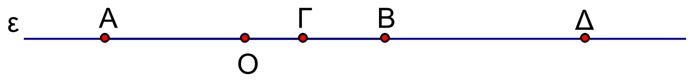
$$15h = 120 \Rightarrow h = 8$$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Αν τα Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α, Β και Ο είναι το μέσο του ΑΒ, να αποδείξετε ότι τα Γ και Δ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του Ο.

Λύση



Έστω $ΓΑ > ΓΒ$, τότε $ΓΑ > ΑΟ$, άρα Γ δεξιά του Ο.

$$ΓΑ > ΓΒ \Rightarrow \frac{ΓΑ}{ΓΒ} > 1 \quad \text{αλλά}$$

$$\frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{ΔΑ}{ΔΒ} \Rightarrow \frac{ΔΑ}{ΔΒ} > 1 \Rightarrow ΔΑ > ΔΒ \Rightarrow Δ \text{ δεξιά του Β}$$

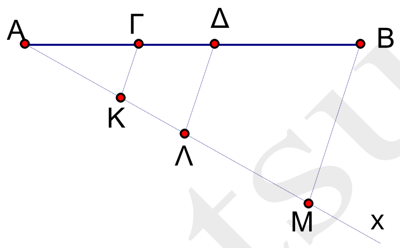
άρα και του Ο.

2.

Να διαιρεθεί ευθύγραμμο τμήμα $ΑΒ = α$ σε τμήματα $x, y, ω$ τέτοια, ώστε $4x = 6y = 3ω$.

Λύση

$$4x = 6y = 3ω \Leftrightarrow \frac{4x}{12} = \frac{6y}{12} = \frac{3ω}{12} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{ω}{4} \qquad \textbf{(1)}$$



Έστω $ΑΒ = α$.

Γράφουμε τυχαία ημιευθεία $Αx$.

Πάνω στην $Αx$ θεωρούμε τα διαδοχικά τμήματα $ΑΚ = 3μ$, $ΚΛ = 2μ$, $ΛΜ = 4μ$, όπου $μ$ τυχαία μονάδα.

Γράφουμε τη ΜΒ και από τα Λ, Κ παράλληλές της που τέμνουν το τμήμα ΑΒ στα Δ, Γ αντίστοιχα.

Υποστηρίζουμε (και θα το αποδείξουμε) ότι $ΑΓ = x$, $ΓΔ = y$ και $ΔΒ = ω$

$$\text{Θεώρημα Θαλή} \Rightarrow \frac{ΑΓ}{ΑΚ} = \frac{ΓΔ}{ΚΛ} = \frac{ΔΒ}{ΛΜ} \Rightarrow \frac{ΑΓ}{3μ} = \frac{ΓΔ}{2μ} = \frac{ΔΒ}{4μ} \Rightarrow$$

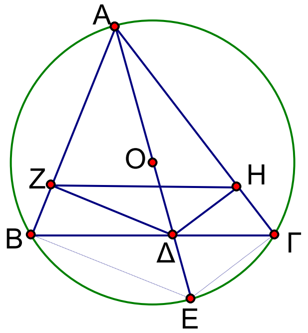
$$\frac{ΑΓ}{3} = \frac{ΓΔ}{2} = \frac{ΔΒ}{4} \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις (1) και (2) $\Rightarrow$ $ΑΓ = x$, $ΓΔ = y$, $ΔΒ = ω$

3.

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και έστω Δ η τομή της διαμέτρου AE με τη $B\Gamma$. Αν Z και H είναι οι προβολές του Δ στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $ZH \parallel B\Gamma$.

Λύση



$A\hat{B}E = 1\llcorner$ διότι βαίνει σε ημικύκλιο $\Rightarrow$

$EB \perp AB$

Αλλά και $\Delta Z \perp AB$

άρα $EB \parallel \Delta Z \Rightarrow \dfrac{AZ}{ZB} = \dfrac{A\Delta}{\Delta E}$

Ομοίως $\dfrac{AH}{H\Gamma} = \dfrac{A\Delta}{\Delta E}$

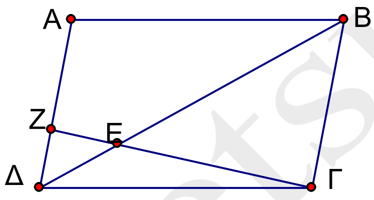
Άρα $\dfrac{AZ}{ZB} = \dfrac{AH}{H\Gamma} \Rightarrow$

$ZH \parallel B\Gamma$ (αντίστροφο του Θ. Θαλή στο τρ.$AB\Gamma$)

4.

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο E της $B\Delta$ τέτοιο, ώστε $\Delta E = \dfrac{1}{5}\Delta B$. Αν η ΓE τέμνει την $A\Delta$ στο Z, να αποδείξετε ότι $AZ = 3\Delta Z$.

Λύση



$\Delta E = \dfrac{1}{5}\Delta B \Rightarrow \dfrac{\Delta E}{\Delta B} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow$

$\dfrac{\Delta E}{\Delta B - \Delta E} = \dfrac{1}{5-1} \Rightarrow \dfrac{\Delta E}{EB} = \dfrac{1}{4}$ **(1)**

$\Delta Z \parallel \Gamma B \Rightarrow \dfrac{\Delta Z}{\Gamma B} = \dfrac{\Delta E}{EB} \overset{(1)}{=} \dfrac{1}{4}$ **(2)**

(τα τρ. $E\Delta Z$, $E\Gamma B$ έχουν πλευρές ανάλογες)

Επειδή $\Gamma B = \Delta A$, η (2) $\Rightarrow \dfrac{\Delta Z}{\Delta A} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{\Delta Z}{\Delta A - \Delta Z} = \dfrac{1}{4-1} \Rightarrow$

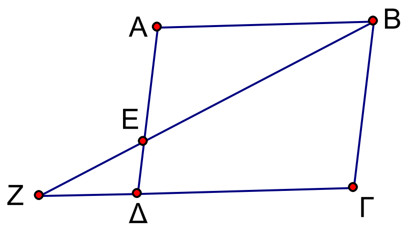
$\dfrac{\Delta Z}{AZ} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow AZ = 3\Delta Z.$

5.

Από την κορυφή $Β$ παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ φέρουμε ευθεία $ε$ που τέμνει την πλευρά $ΑΔ$ στο $Ε$ και την προέκταση της $ΓΔ$ στο $Ζ$. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{ΔΑ}{ΔΕ} - \frac{ΔΓ}{ΔΖ} = 1.$$

Λύση



$$ΔΖ \parallel ΒΑ \Rightarrow \frac{ΔΑ}{ΔΕ} = \frac{ΖΒ}{ΖΕ} \quad \textbf{(1)}$$

$$ΔΕ \parallel ΓΒ \Rightarrow \frac{ΔΓ}{ΔΖ} = \frac{ΕΒ}{ΕΖ} \quad \textbf{(2)}$$

$$(1)-(2) \Rightarrow \frac{ΔΑ}{ΔΕ} - \frac{ΔΓ}{ΔΖ} = \frac{ΖΒ}{ΖΕ} - \frac{ΕΒ}{ΕΖ} =$$

$$= \frac{ΖΒ-ΕΒ}{ΖΕ} = \frac{ΖΕ}{ΖΕ} = 1$$

6.

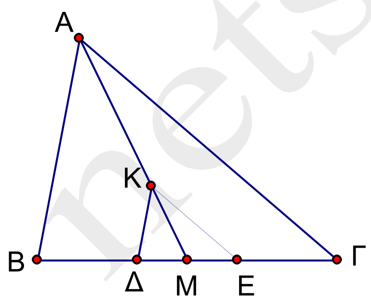
Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και τα σημεία $Δ$, $Ε$ της $ΒΓ$ ώστε $ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ$.

Η παράλληλη από το $Δ$ προς την $ΑΒ$ τέμνει τη διάμεσο $ΑΜ$ στο $Κ$. Να αποδείξετε ότι

i) το $Κ$ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $ΑΒΓ$

ii) $ΚΕ \parallel ΑΓ$

Λύση



i)

$Μ$ μέσο της $ΒΓ$ $\Rightarrow$ και μέσο του $ΔΕ$

Άρα $ΜΔ = \frac{1}{2}ΔΒ$ και $ΜΕ = \frac{1}{2}ΕΓ$ $\Rightarrow$

$$\frac{ΜΔ}{ΔΒ} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \frac{ΜΕ}{ΕΓ} = \frac{1}{2}$$

$$ΔΚ \parallel ΒΑ \Rightarrow \frac{ΜΚ}{ΚΑ} = \frac{ΜΔ}{ΔΒ} = \frac{1}{2} \Rightarrow Κ \text{ κ.βάρους}$$

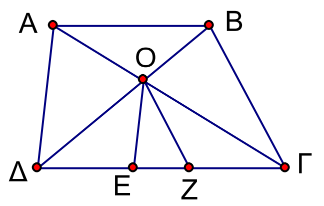
ii)

Αποδείχθηκε ότι $\frac{ΜΚ}{ΚΑ} = \frac{1}{2} = \frac{ΜΕ}{ΕΓ}$ $\Rightarrow$ $ΚΕ \parallel ΑΓ$ (αντίστροφο του $Θ.Θ$)

7.

Τραπεζίου $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ οι διαγώνιες $ΑΓ$, $ΒΔ$ τέμνονται στο $Ο$. Από το $Ο$ φέρουμε παράλληλες προς τις $ΑΔ$, $ΒΓ$ που τέμνουν τη $ΔΓ$ στα $Ε$ και $Ζ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $ΔΕ = ΓΖ$.

Λύση



$$ΟΕ \parallel ΑΔ \Rightarrow \frac{ΕΔ}{ΕΓ} = \frac{ΟΑ}{ΟΓ} \quad \textbf{(1)}$$

$$ΟΖ \parallel ΒΓ \Rightarrow \frac{ΖΓ}{ΖΔ} = \frac{ΟΒ}{ΟΔ} \quad \textbf{(2)}$$

$$ΑΒ \parallel ΓΔ \Rightarrow \frac{ΟΑ}{ΟΓ} = \frac{ΟΒ}{ΟΔ} \quad \textbf{(3)}$$

Από την (3), τα δεύτερα μέλη των (1), (2) είναι ίσα, άρα και τα πρώτα

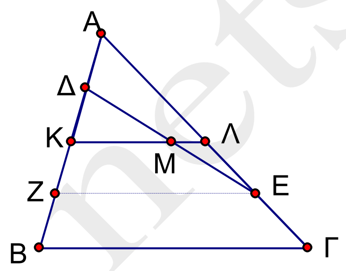
$$\frac{ΕΔ}{ΕΓ} = \frac{ΖΓ}{ΖΔ} \Rightarrow \frac{ΕΔ}{ΕΓ+ΕΔ} = \frac{ΖΓ}{ΖΔ+ΖΓ} \Rightarrow \frac{ΕΔ}{ΔΓ} = \frac{ΖΓ}{ΔΓ} \Rightarrow ΕΔ = ΖΓ$$

Σύνθετα Θέματα

1.

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και τα σημεία $Δ$ και $Ε$ των πλευρών του $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα, ώστε $\frac{ΔΑ}{ΔΒ} = \frac{ΕΓ}{ΕΑ}$. Να αποδείξετε ότι τα μέσα $Κ$, $Λ$, $Μ$ των $ΑΒ$, $ΑΓ$ και $ΔΕ$ αντίστοιχα, είναι συνευθειακά σημεία.

Λύση



Φέρουμε $ΕΖ \parallel ΒΓ \Rightarrow \frac{ΕΓ}{ΕΑ} = \frac{ΖΒ}{ΖΑ}$

Από υπόθεση είναι $\frac{ΕΓ}{ΕΑ} = \frac{ΔΑ}{ΔΒ}$

Άρα $\frac{ΖΒ}{ΖΑ} = \frac{ΔΑ}{ΔΒ} \Rightarrow \frac{ΖΒ}{ΖΑ+ΖΒ} = \frac{ΔΑ}{ΔΒ+ΔΑ} \Rightarrow$

$$\frac{ΖΒ}{ΑΒ} = \frac{ΔΑ}{ΑΒ} \Rightarrow ΖΒ = ΔΑ$$

Και επειδή $Κ$ μέσο της $ΑΒ \Rightarrow Κ$ μέσο και του $ΔΖ$.

Στο τρ. $ΔΖΕ$ το τμήμα $ΚΜ$ ενώνει τα μέσα $\Rightarrow ΚΜ \parallel ΖΕ Ρ ΒΓ$

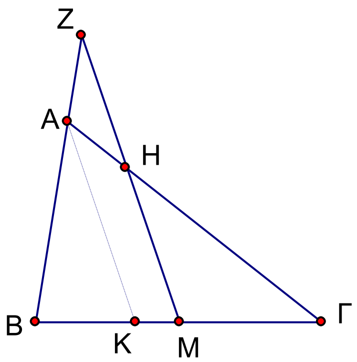
Στο τρ. $ΑΒΓ$ το τμήμα $ΚΛ$ ενώνει τα μέσα $\Rightarrow ΚΛ \parallel ΒΓ$

Άρα $Κ$, $Λ$, $Μ$ συνευθειακά.

2.

Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε τυχαία ευθεία, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΖΑ . ΗΓ = ΗΑ . ΖΒ

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{ZA}{ZB} = \frac{HA}{H\Gamma}$

Φέρουμε $AK \parallel ZHM$

$AK \parallel ZM \Rightarrow \frac{ZA}{ZB} = \frac{MK}{MB}$

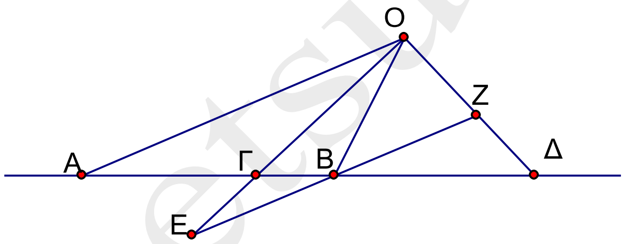
$AK \parallel HM \Rightarrow \frac{HA}{H\Gamma} = \frac{MK}{M\Gamma}$

Επειδή $MB = M\Gamma$, τα δεύτερα μέλη είναι ίσα άρα και τα πρώτα.

3.

Δίνεται ευθεία ε, τέσσερα διαδοχικά σημεία της Α, Γ, Β, Δ και σημείο Ο εκτός αυτής. Από το Β φέρουμε παράλληλη προς την ΟΑ, η οποία τέμνει τις ΟΓ, ΟΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α, Β, αν και μόνο αν ΒΕ = ΒΖ.

Λύση



$EB \parallel AO \Rightarrow \frac{AO}{EB} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B}$ **(1)**

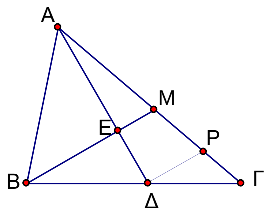
$BZ \parallel AO \Rightarrow \frac{AO}{BZ} = \frac{\Delta A}{\Delta B}$ **(2)**

Γ, Δ αρμονικά συζυγή των Α, Β $\Leftrightarrow \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B} \overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow} \frac{AO}{EB} = \frac{AO}{BZ} \Leftrightarrow EB = BZ$

4.

Αν ένα σημείο Δ χωρίζει εσωτερικά την πλευρά $\text{Β}\Gamma$ τριγώνου $\text{ΑΒ}\Gamma$ σε λόγο λ και ένα σημείο Ε χωρίζει εσωτερικά το $\text{Α}\Delta$ σε λόγο κ, να υπολογισθεί ο λόγος στον οποίο χωρίζει η ευθεία ΒΕ την πλευρά $\text{Α}\Gamma$.

Λύση



Έστω Μ το σημείο τομής των ΒΕ, $\text{Α}\Gamma$.

Αναζητάμε το λόγο $\dfrac{\text{ΜΑ}}{\text{Μ}\Gamma}$.

Μεταφέρουμε τους δοσμένους λόγους

$\dfrac{\Delta\text{Β}}{\Delta\Gamma}=\lambda$ και $\dfrac{\text{ΕΑ}}{\text{Ε}\Delta}=\kappa$ πάνω στην $\text{Α}\Gamma$, όπου

ανήκει και ο ζητούμενος $\dfrac{\text{ΜΑ}}{\text{Μ}\Gamma}$, φέρνοντας $\Delta\text{Ρ} \parallel \text{ΒΜ}$

$\Delta\text{Ρ} \parallel \text{ΒΜ} \Rightarrow \dfrac{\text{ΡΜ}}{\text{Ρ}\Gamma}=\dfrac{\Delta\text{Β}}{\Delta\Gamma}=\lambda$, $\text{ΕΜ} \parallel \Delta\text{Ρ} \Rightarrow \dfrac{\text{ΜΑ}}{\text{ΜΡ}}=\dfrac{\text{ΕΑ}}{\text{Ε}\Delta}=\kappa$

$\dfrac{\text{ΡΜ}}{\text{Ρ}\Gamma}=\dfrac{\lambda}{1}$ $\dfrac{\text{ΜΑ}}{\text{ΜΡ}}=\kappa$ **(2)**

$\dfrac{\text{ΡΜ}}{\text{Ρ}\Gamma+\text{ΡΜ}}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}$

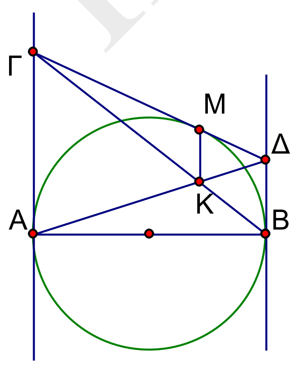
$\dfrac{\text{ΡΜ}}{\Gamma\text{Μ}}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}$ **(1)**

$(1).\ (2) \Rightarrow \dfrac{\text{ΡΜ}}{\Gamma\text{Μ}}\,\dfrac{\text{ΜΑ}}{\text{ΜΡ}}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\,\kappa \Rightarrow \dfrac{\text{ΜΑ}}{\text{Μ}\Gamma}=\dfrac{\lambda\kappa}{1+\lambda}$

5.

Η εφαπτομένη ενός κύκλου σε σημείο του Μ τέμνει τις εφαπτόμενες στα άκρα Α, Β μιας διαμέτρου ΑΒ, στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Αν Κ είναι το σημείο τομής των $\text{Β}\Gamma$, $\text{Α}\Delta$, να αποδείξετε ότι $\text{ΜΚ} \perp \text{ΑΒ}$.

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\text{ΜΚ} \parallel \Delta\text{Β}$

$\Gamma\text{Α} \parallel \Delta\text{Β}$ σαν κάθετες στην ΑΒ $\Rightarrow$

τα τρ. $\text{ΚΑ}\Gamma$, $\text{Κ}\Delta\text{Β}$ έχουν πλευρές ανάλογες,

δηλαδή $\dfrac{\text{Κ}\Gamma}{\text{ΚΒ}}=\dfrac{\text{Α}\Gamma}{\Delta\text{Β}}$ αλλά

$\text{Α}\Gamma=\Gamma\text{Μ}$ και $\Delta\text{Β}=\Delta\text{Μ}$ σαν εφαπτόμενα τμήματα

Άρα $\dfrac{\text{Κ}\Gamma}{\text{ΚΒ}}=\dfrac{\Gamma\text{Μ}}{\Delta\text{Μ}}$

Με το αντίστροφο του Θ.Θαλή στο τρ. $\Gamma\Delta\text{Β}$ έχουμε $\text{ΜΚ} \parallel \Delta\text{Β}$