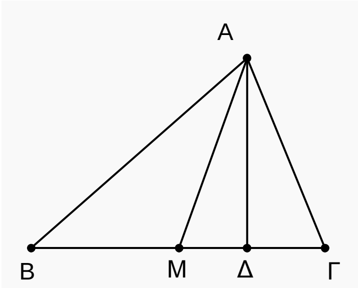
9.5 – 9.6
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 198 – 199

Ερωτήσεις κατανόησης

1.

Στο παρακάτω σχήμα η ΑΜ είναι διάμεσος και ΑΔ ύψος . Ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστή . Αιτιολογήστε την απάντηση σας .



i) $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

ii) $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + 2A\Delta^2$

iii) $AB^2 + A\Gamma^2 = 2B\Gamma \cdot M\Delta$

iv) $AB^2 - A\Gamma^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

Λύση

Σωστή σχέση είναι η (i) διότι : $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \dfrac{B\Gamma^2}{2}$

$$= 2AM^2 + \frac{(2BM)^2}{2}$$

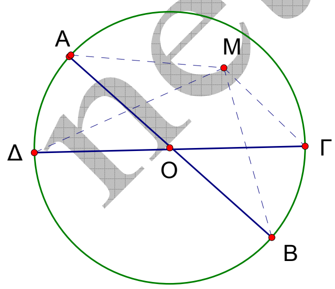
$$= 2AM^2 + \frac{4BM^2}{2}$$

$$= 2AM^2 + 2BM^2$$

2.

Στο παρακάτω σχήμα να συμπληρώστε τα κενά .

Να εξηγήσετε γιατί $MA^2 + MB^2 = M\Gamma^2 + M\Delta^2$



i) $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

ii) $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 2MO^2 + \dfrac{\Delta\Gamma^2}{2}$

Εξήγηση

Αφού $AB = \Gamma\Delta$, τα δεύτερα μέλη των (i) και (ii) είναι ίσα, άρα και τα πρώτα.

3.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2$

Τότε

α. $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha}{2}$ β. $\mu_\alpha = \dfrac{3\alpha}{4}$ γ. $\mu_\alpha = \dfrac{3\alpha}{2}$ δ. $\mu_\alpha = \dfrac{2\alpha}{3}$

Κυκλώστε την σωστή απάντηση και δικαιολογήστε την απάντηση σας

Λύση

$$\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = \frac{2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2}{4}$$

$$= \frac{10\alpha^2 - \alpha^2}{4} = \frac{9\alpha^2}{4} \quad \text{οπότε } \mu_\alpha = \frac{3\alpha}{2}$$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\beta = 7$, $\gamma = 6$ και $\mu_\alpha = \frac{7}{2}$. Να υπολογισθούν

i) η πλευρά α **ii)** η προβολή της διαμέσου μ_α στη ΒΓ.

Λύση

i)

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow 2\beta^2 + 2\gamma^2 = 4\mu_\alpha^2 + \alpha^2 \Rightarrow$$

$$2\beta^2 + 2\gamma^2 - 4\mu_\alpha^2 = \alpha^2$$

$$\alpha^2 = 2 \cdot 7^2 + 2 \cdot 6^2 - 4 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= 2 \cdot 49 + 2 \cdot 36 - 4 \cdot \frac{49}{4}$$

$$= 98 + 72 - 49 = 121 \qquad \text{Άρα } \alpha = 11$$

ii)

Έστω x η προβολή της διαμέσου μ_α στη ΒΓ.

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha x \Rightarrow 7^2 - 6^2 = 2 \cdot 11 \cdot x$$

$$49 - 36 = 22x$$

$$13 = 22x \Rightarrow x = \frac{13}{22}$$

2.

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\mu_\alpha^2 + \beta\gamma > \dfrac{\alpha^2}{4}$

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} + \beta\gamma > \dfrac{\alpha^2}{4}$

ή ότι $2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 + 4\beta\gamma > \alpha^2$

ή ότι $2\beta^2 + 2\gamma^2 + 4\beta\gamma > 2\alpha^2$

ή ότι $\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma > \alpha^2$

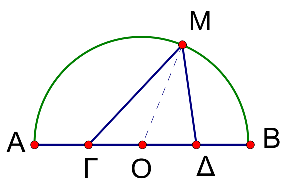
ή ότι $(\beta + \gamma)^2 > \alpha^2$

ή ότι $\beta + \gamma > \alpha$ που ισχύει από την τριγωνική ανισότητα.

3.

Δίνεται κύκλος (O, R), μια διάμετρός του AB και έστω Γ, Δ τα μέσα των OA και OB αντίστοιχα. Αν $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 5$, όπου M τυχαίο σημείο του κύκλου, να υπολογισθεί η ακτίνα του κύκλου.

Λύση



Στο τρ.$M\Gamma\Delta$: $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 2MO^2 + \dfrac{\Gamma\Delta^2}{2}$

$5 = 2R^2 + \dfrac{R^2}{2}$

$10 = 4R^2 + R^2$

$10 = 5R^2$

$R^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{2}$

4.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Θ το βαρύκεντρό του. Να αποδείξετε ότι:

i) $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$

ii) $\Theta A^2 + \Theta B^2 + \Theta\Gamma^2 = \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$

Λύση

i)

$$\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} + \frac{2\gamma^2 + 2\alpha^2 - \beta^2}{4} + \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 + 2\gamma^2 + 2\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2)$$

$$= \frac{1}{4}(3\alpha^2 + 3\beta^2 + 3\gamma^2) = \frac{3}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

ii)

$\Theta A = \frac{2}{3}\mu_\alpha \Rightarrow \Theta A^2 = \frac{4}{9}\mu_\alpha^2$ και κυκλικά

$$\Theta A^2 + \Theta B^2 + \Theta\Gamma^2 = \frac{4}{9}\mu_\alpha^2 + \frac{4}{9}\mu_\beta^2 + \frac{4}{9}\mu_\gamma^2$$

$$= \frac{4}{9}(\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2)$$

$$= \frac{4}{9}\,\frac{3}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60^o$, $\beta = 5$, $\gamma = 3$. Να υπολογισθεί η διάμεσός του μ_α.

Λύση

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}\,\hat{A} \Rightarrow \alpha^2 = 25 + 9 - 2\cdot 5\cdot 3\cdot \text{συν}60^o$$

$$= 34 - 30\cdot\frac{1}{2} = 34 - 15 = 19$$

$$\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = \frac{2\cdot 5^2 + 2\cdot 3^2 - 19}{4}$$

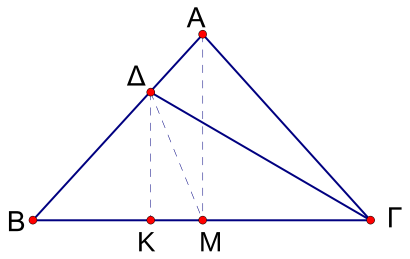
$$= \frac{2\cdot 25 + 2\cdot 9 - 19}{4}$$

$$= \frac{50 + 18 - 19}{4} = \frac{49}{4} \qquad \text{Άρα} \quad \mu_\alpha = \frac{7}{2}$$

2.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και τυχαίο σημείο Δ της ΑΒ. Να αποδείξετε ότι $ΔΓ^2 - ΔΒ^2 = \dfrac{ΒΓ^2 \cdot ΑΔ}{ΑΒ}$

Λύση



Έστω Μ το μέσο της ΒΓ και $ΔΚ \perp ΒΓ$.

$2^ο$ θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΔΒΓ:

$ΔΓ^2 - ΔΒ^2 = 2\,ΒΓ \cdot ΜΚ$

Αρκεί να δειχθεί ότι $2\,ΒΓ \cdot ΜΚ = \dfrac{ΒΓ^2 \cdot ΑΔ}{ΑΒ}$

$2\,ΜΚ \cdot ΑΒ = ΒΓ \cdot ΑΔ$

$ΜΚ \cdot ΑΒ = \dfrac{ΒΓ}{2}\,ΑΔ$

$ΜΚ \cdot ΑΒ = ΜΒ \cdot ΑΔ$

$\dfrac{ΜΚ}{ΑΔ} = \dfrac{ΜΒ}{ΑΒ}$

που ισχύει από θεώρημα Θαλή, αφού ΔΚ || ΑΜ

3.

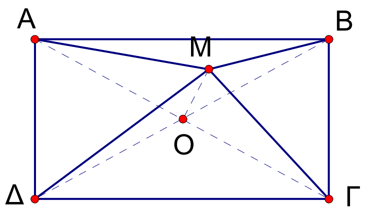
i) Αν ΑΒΓΔ ορθογώνιο και Μ τυχαίο σημείο, να αποδείξετε ότι

$MA^2 + M\Gamma^2 = MB^2 + M\Delta^2$

ii) Αν ΑΒΓΔ τετράγωνο και σημείο Μ στο εσωτερικό του, ώστε ΜΑ = 1, ΜΒ = $\sqrt{2}$ και ΜΓ = $\sqrt{3}$, να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου.

Λύση

i)



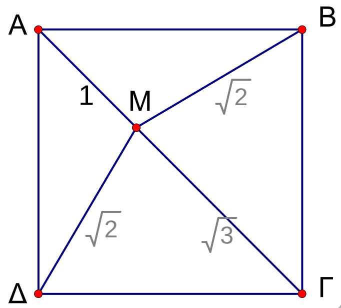
Φέρουμε τις διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ, οι οποίες διχοτομούνται στο Ο.

τρ.ΜΑΓ: $MA^2 + M\Gamma^2 = 2\,MO^2 + \dfrac{A\Gamma^2}{2}$

τρ.ΜΒΔ: $MB^2 + M\Delta^2 = 2\,MO^2 + \dfrac{B\Delta^2}{2}$

Τα δεύτερα μέλη είναι ίσα, άρα και τα πρώτα.

ii)



i) $\Rightarrow$ $MA^2 + M\Gamma^2 = MB^2 + M\Delta^2$

$1 + 3 = 2 + M\Delta^2$

$M\Delta^2 = 2$

$M\Delta = \sqrt{2}$

Έτσι είναι ΜΔ = ΜΒ, άρα το Μ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του τμήματος ΔΒ, δηλαδή σημείο της διαγωνίου ΑΓ.

Έστω α η πλευρά του τετραγώνου.

Τότε $A\Gamma = \alpha\sqrt{2} \Rightarrow 1 + \sqrt{3} = \alpha\sqrt{2}$

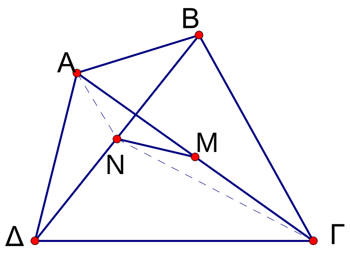
$$\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

4.

Αν M, N είναι τα μέσα των διαγωνίων $ΑΓ$, $ΒΔ$ ενός τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$, να αποδείξετε ότι $AB^2 + ΒΓ^2 + ΓΔ^2 + ΔΑ^2 = ΑΓ^2 + ΒΔ^2 + 4\ MN^2$.

(Θεώρημα Euler)

Λύση



Τρ.ΑΒΔ με διάμεσο ΑΝ:

$$AB^2 + AΔ^2 = 2\ AN^2 + \frac{BΔ^2}{2}$$

Τρ.ΓΒΔ με διάμεσο ΓΝ:

$$ΓB^2 + ΓΔ^2 = 2\ ΓN^2 + \frac{BΔ^2}{2}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη

$$AB^2 + BΓ^2 + ΓΔ^2 + ΔA^2 = 2(AN^2 + ΓN^2) + BΔ^2 \quad \textbf{(1)}$$

τρ.ΝΑΓ διάμεσο ΝΜ : $NA^2 + NΓ^2 = 2\,NM^2 + \frac{AΓ^2}{2}$

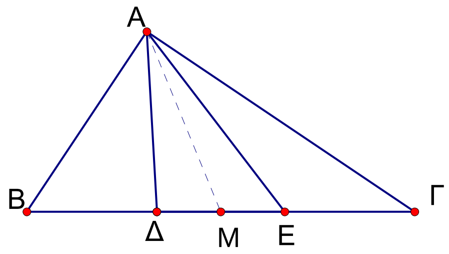
$$(1) \Rightarrow AB^2 + BΓ^2 + ΓΔ^2 + ΔA^2 = 2\left(2\,NM^2 + \frac{AΓ^2}{2}\right) + BΔ^2$$

$$AB^2 + BΓ^2 + ΓΔ^2 + ΔA^2 = 4\,NM^2 + AΓ^2 + BΔ^2$$

5.

Στην υποτείνουσα ΒΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια, ώστε ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ. Να αποδείξετε ότι $ΑΔ^2 + ΑΕ^2 = \frac{5}{9}ΒΓ^2$.

Λύση



Μ μέσο του ΔΕ άρα και της ΒΓ = α

Τρ.ΑΔΕ με διάμεσο ΑΜ:

$$ΑΔ^2 + ΑΕ^2 = 2\,ΑΜ^2 + \frac{ΔΕ^2}{2}$$

αλλά $ΑΜ = \frac{α}{2}$ και $ΔΕ = \frac{α}{3}$

$$\text{Άρα}\quad ΑΔ^2 + ΑΕ^2 = 2\left(\frac{α}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{α}{3}\right)^2}{2}$$

$$= 2\,\frac{α^2}{4} + \frac{\frac{α^2}{9}}{2}$$

$$= \frac{α^2}{2} + \frac{α^2}{18}$$

$$= \frac{9α^2 + α^2}{18}$$

$$= \frac{10α^2}{18} = \frac{5α^2}{9}$$

6.

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $β^2 + γ^2 = 2α\,μ_α$, να υπολογισθεί η γωνία $\hat{Α}$.

Λύση

Είναι $β^2 + γ^2 = 2\,μ_α^2 + \frac{α^2}{2}$

Η υπόθεση $β^2 + γ^2 = 2α\,μ_α$ γίνεται $2μ_α^2 + \frac{α^2}{2} = 2α\,μ_α$

$$4μ_α^2 + α^2 = 4α\,μ_α$$

$$4μ_α^2 + α^2 - 4α\,μ_α = 0$$

$$(2μ_α - α)^2 = 0$$

$$2μ_α - α = 0$$

$$2μ_α = α$$

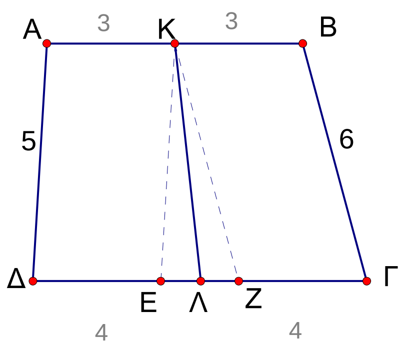
$$μ_α = \frac{α}{2} \quad \Rightarrow \quad \hat{Α} = 90^{\circ}$$

Σύνθετα Θέματα

1.

Δύο αδέλφια κληρονόμησαν αγροτεμάχιο σχήματος τραπεζίου και αποφάσισαν να το μοιράσουν ανοίγοντας δρόμο που θα ενώνει τα μέσα των παράλληλων πλευρών του. Αν οι βάσεις είναι 8km και 6km, ενώ οι μη παράλληλες πλευρές 5km και 6km, πόσο θα στοιχίσει η διάνοιξη του δρόμου, αν ένα χιλιόμετρο δρόμου κοστίζει 50.000 δρχ.

Λύση



ΑΒΓΔ το αγροτεμάχιο - τραπέζιο
Κ, Λ τα μέσα των βάσεων

Φέρουμε $KE \parallel A\Delta$ και $KZ \parallel B\Gamma$.
Τότε δύο παραλληλόγραμμα, άρα

$KE = A\Delta = 5$, $KZ = B\Gamma = 6$ και
$\Lambda E = \Lambda Z = \Lambda\Gamma - Z\Gamma = 4 - KB = 4 - 3 = 1$

ΚΛ διάμεσος του τριγώνου ΚΕΖ $\Rightarrow$

$$K\Lambda^2 = \frac{2KE^2 + 2KZ^2 - EZ^2}{4} = \frac{2\cdot 5^2 + 2\cdot 6^2 - 2^2}{4} = \frac{50+72-4}{4} = \frac{118}{4} = \frac{59}{4}$$

Άρα $K\Lambda = \dfrac{\sqrt{59}}{2}$ km..

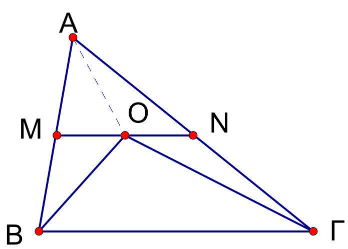
Οπότε κόστος διάνοιξης $= \dfrac{\sqrt{59}}{2}\cdot 50000 = 272500$ δραχ περίπου

2.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $A\Gamma > AB$ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αν Ο το μέσο του ΜΝ, να αποδείξετε ότι

$$O\Gamma^2 - OB^2 = \frac{A\Gamma^2 - AB^2}{2}$$

Λύση



Φέρουμε το ΟΑ.
ΟΜ διάμεσος του τριγώνου ΟΑΒ $\Rightarrow$

$$OA^2 + OB^2 = 2\,OM^2 + \frac{AB^2}{2} \quad \textbf{(1)}$$

ΟΝ διάμεσος του τριγώνου ΟΑΓ $\Rightarrow$

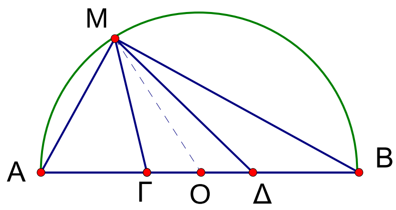
$$OA^2 + O\Gamma^2 = 2\,ON^2 + \frac{A\Gamma^2}{2} \quad \textbf{(2)}$$

$$(1) - (2) \quad \Rightarrow \quad O\Gamma^2 - OB^2 = \frac{A\Gamma^2 - AB^2}{2}$$

3.

Σε ημικύκλιο διαμέτρου $AB = 2\alpha$ θεωρούμε τυχαίο σημείο M. Χωρίζουμε τη διάμετρο AB σε τρία ίσα τμήματα $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2$ είναι σταθερό.

Λύση



Πυθαγόρειο στο τρ.MAB:

$$MA^2 + MB^2 = (2\alpha)^2 = 4\alpha^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Έστω O το κέντρο του ημικυκλίου.

1^{o} Θ. διαμέσων στο τρ.$M\Gamma\Delta$:

$$M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 2\,MO^2 + \frac{\Gamma\Delta^2}{2} \Rightarrow$$

$$M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 2\,\alpha^2 + \frac{\left(\frac{2\alpha}{3}\right)^2}{2}$$

$$= 2\,\alpha^2 + \frac{\frac{4\alpha^2}{9}}{2}$$

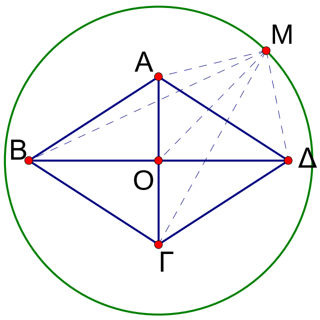
$$= 2\,\alpha^2 + \frac{2\alpha^2}{9} = \frac{20\alpha^2}{9} \qquad \textbf{(2)}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 4\,\alpha^2 + \frac{20\alpha^2}{9} = \frac{56\alpha^2}{9} \text{ σταθερό.}$$

4.

Δίνεται ρόμβος $ΑΒΓΔ$ πλευράς $α$, $Ο$ το κέντρο του και κύκλος $(Ο, λα)$, $λ > 0$. Αν για τυχαίο σημείο $Μ$ του κύκλου ισχύει $ΜΑ^2 + ΜΒ^2 + ΜΓ^2 + ΜΔ^2 = 18α^2$, να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός $λ$.

Λύση



$1^ο$ Θ. διαμέσων στο τρ.ΜΑΓ:

$$ΜΑ^2 + ΜΓ^2 = 2\ ΜΟ^2 + \frac{ΑΓ^2}{2} =$$

$$= 2\ ΜΟ^2 + \frac{1}{2}(2ΟΑ)^2 =$$

$$= 2\ ΜΟ^2 + 2ΟΑ^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Ομοίως $1^ο$ Θ. διαμέσων στο τρ.ΜΒΔ:

$$ΜΒ^2 + ΜΔ^2 = 2\ ΜΟ^2 + 2ΟΒ^2 \qquad \textbf{(2)}$$

$(1) + (2) \quad \Rightarrow \quad ΜΑ^2 + ΜΒ^2 + ΜΓ^2 + ΜΔ^2 = 4\ ΜΟ^2 + 2(ΟΑ^2 + ΟΒ^2) \qquad$ **(3)**

Πυθαγόρειο στο τρ.ΟΑΒ: $\quad ΟΑ^2 + ΟΒ^2 = ΑΒ^2 = α^2$.

$(3) \quad \Rightarrow \quad ΜΑ^2 + ΜΒ^2 + ΜΓ^2 + ΜΔ^2 = 4\,(λα)^2 + 2α^2$

$$18\ α^2 = 4λ^2\ α^2 + 2α^2$$

$$18 = 4λ^2 + 2$$

$$4λ^2 = 16$$

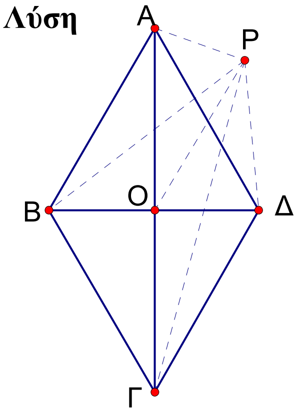
$$λ^2 = 4 \quad \text{άρα} \quad λ = 2$$

5.

Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ πλευράς α, με διαγώνιο ΒΔ = α. Έστω τυχαίο σημείο Ρ.

Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = (\text{PA}^2 - \text{PB}^2) + (\text{P}\Gamma^2 - \text{P}\Delta^2)$.

Λύση



Αρκεί να δειχθεί ότι $\alpha^2 = \text{PA}^2 + \text{P}\Gamma^2 - (\text{PB}^2 + \text{P}\Delta^2)$

1^o Θ. διαμέσων στο τρ.ΡΑΓ:

$$\text{PA}^2 + \text{P}\Gamma^2 = 2\ \text{PO}^2 + \frac{\text{A}\Gamma^2}{2} = 2\ \text{PO}^2 + \frac{1}{2}(2\text{OA})^2 =$$

$$2\ \text{PO}^2 + 2\,\text{OA}^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Ομοίως 1^o Θ. διαμέσων στο τρ.ΡΒΔ:

$$\text{PB}^2 + \text{P}\Delta^2 = 2\ \text{PO}^2 + 2\,\text{OB}^2 \qquad \textbf{(2)}$$

$$(1) - (2) \quad \Rightarrow \quad \text{PA}^2 + \text{P}\Gamma^2 - (\text{PB}^2 + \text{P}\Delta^2) = 2\,\text{OA}^2 - 2\,\text{OB}^2$$

$$= 2\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$= 2\,\frac{3\alpha^2}{4} - 2\,\frac{\alpha^2}{4}$$

$$= \frac{3\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} = 2\,\frac{\alpha^2}{2} = \alpha^2 .$$