ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2014

ΘΕΜΑ Α.

$\mathbf{A1}$. Απόδειξη σελίδα 251

$\mathbf{A2}$. Ορισμός σελίδα 273

$\mathbf{A3}$. Ορισμός σελίδα 150

$\mathbf{A4}$. **α) Λ**

β) Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Λ

ΘΕΜΑ Β.

Β1.

$\mathbf{2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0}$ **(**Έστω $z = x + yi$ $x, y \in \mathbb{R}$ **)**

$\mathbf{2(x^2 + y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0}$

$\mathbf{(2x^2 + 2y^2 - 4) + (2x - 2)i = 0}$

Άρα $\mathbf{2x^2 + 2y^2 - 4 = 0}$ $(\mathbf{1})$ και $\mathbf{2x - 2 = 0}$

Διεύθυνση: Χρήστος Α. Χαρακόπουλος
Μ. Αλεξάνδρου 49, 3ος όροφος, Δράμα, τηλ.: 25210 21972, κιν.: 6973585563
www.akademia.gr / e-mail: info@akademia.gr

$2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$

Για $x=1$ $(1) \Leftrightarrow$

$2*1^2+2y^2-4=0$

$2y^2=2$

$y^2=1$

$y^2=\pm 1$

Δηλαδή $z=1+i$ ή $z=1-i$

Β2.

$w=3(\frac{z_1}{z_2})^{39}$

$w=3(\frac{1+i}{1-i})^{39}$

$w=3(\frac{2i}{2})^{39}$

$w=3(i)^{39}$

$w=3i^3$

$w=-3i$

Β3.

$$|u+w| = |4z_1 - z_2 - i|$$

$$|u-3i| = |4(1+i)-(1-i)-i|$$

$$|u-3i| = |3+4i|$$

$$|u-3i| = \sqrt{3^2+4^2}$$

$|u-3i| = 5$ **Κύκλος** $\mathrm{K}(0,3)$ $\quad \rho = 5$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$h(x) = x - ln(e^x+1)$$

$$h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1} > 0$$

$$h''(x) = -\frac{e^x}{e^x+1} < 0$$

Άρα $h(x)$ κοίλη σε όλο το $\mathbb{R}$

Διεύθυνση: Χρήστος Α. Χαρακόπουλος
Μ. Αλεξάνδρου 49, 3ος όροφος, Δράμα, τηλ.: 25210 21972, κιν.: 6973585563
www.akademia.gr / e-mail: info@akademia.gr

Γ2.

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1}$$

$ln\left(e^{h\left(2h'(x)\right)}\right) < ln\left(\frac{e}{e+1}\right)$ $\quad$ lnx γνησίως αύξουσα

$$h\big(2h'(x)\big) < ln\left(\frac{e}{e+1}\right)$$

$$h\big(2h'(x)\big) < h(1)$$

$2h'(x) < 1$ $\quad$ *Αφού* $h(x)$ ***γνησίως αύξουσα***

$$h'(x) < \frac{1}{2}$$

$$h'(x) < h'(0)$$

$x > 0$ $\quad$ Αφού $h'(x)$ γνησίως φθίνουσα

Γ3.

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\big(x - ln(e^x+1)\big)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\big(lne^x - ln(e^x+1)\big)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} ln\frac{e^x}{e^x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} ln\left(1 - \frac{1}{e^x+1}\right)$$

$= ln1 = 0 \Rightarrow$ $\quad$ $y = 0$ (Οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$)

Διεύθυνση: Χρήστος Α. Χαρακόπουλος
Μ. Αλεξάνδρου 49, 3ος όροφος, Δράμα, τηλ.: 25210 21972, κιν.: 6973585563
www.akademia.gr / e-mail: info@akademia.gr

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{ln(e^x+1)}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}ln(e^x+1)\right)$$

$$=1-0*0=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}(h(x)-1x)=\lim_{x\to-\infty}(x-ln(e^x+1)-x)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-ln(e^x+1)\right)$$

$$=0$$

Άρα $y=x$ πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

Γ4.

$\varphi(x)=e^x(h(x)+ln2)$

Έστω $f(x)=h(x)+ln2$

$f'(x)=h'(x)>0 \Longrightarrow$ **f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$**

Είναι $f(0)=h(0)+ln2=0-ln2+ln2=0$

Για $x\geq 0$ $\quad f(x)\geq 0$

Άρα $\varphi(x)\geq 0$, $x\in[0,1]$

$$E=\int_0^1 (e^x h(x)+e^x ln2)dx$$

$$=\int_0^1 e^x h(x)dx+\int_0^1 e^x ln2dx$$

$$=\int_0^1 (e^x)' h(x)dx+\int_0^1 e^x ln2dx$$

$$=[e^x h(x)]_0^1-\int_0^1 e^x h'(x)dx+[e^x ln2]_0^1$$

$$=[e^x h(x)]_0^1-\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx+[e^x ln2]_0^1$$

$$=[e^x h(x)]_0^1-[ln(e^x+1)]_0^1+[e^x ln2]_0^1$$

$$=e-(e+1)ln\frac{e+1}{2}$$

Διεύθυνση: Χρήστος Α. Χαρακόπουλος
Μ. Αλεξάνδρου 49, 3ος όροφος, Δράμα, τηλ.: 25210 21972, κιν.: 6973585563
www.akademia.gr / e-mail: info@akademia.gr

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} \overset{\frac{0}{0}}{=} 1$$

Είναι $f(0)=1$

Δηλαδή $f(x)$ συνεχής στο 0

Για $x \neq 0$

$$f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{x}\right)' = \frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$$

Έστω $g(x) = xe^x - e^x + 1$

$$g'(x) = e^x + xe^x - e^x$$
$$= xe^x$$

$$\left.\begin{array}{l} g'(x) \geq 0 \ \ \textbf{αν} \ \ x \geq 0 \\ g'(x) < 0 \ \ \textbf{αν} \ \ x < 0 \end{array}\right\} \quad \text{Ολικό ελάχιστο για } x = 0$$

$$g(x) \geq g(0) = 0$$

Άρα $f'(x) > 0$

Για $\boldsymbol{x = 0}$

$$\boldsymbol{f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{2}} > 0$$

Επομένως f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Δ2.

α)

Έστω $\boldsymbol{K(x) = \int_1^x f(u)du}$ $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{K'(x) = f(x) = \frac{e^x-1}{x}} \qquad \boldsymbol{x \neq 0}$$

$\boldsymbol{x} > 0$ είναι $\boldsymbol{e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x - 1} > 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{e^x-1}{x}} > 0 \Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}) > 0$

$\boldsymbol{x < 0}$ είναι $\boldsymbol{e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{e^x-1}{x}} > 0 \Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}) > 0$

Για $\boldsymbol{x = 0}$ $\boldsymbol{f(0) = 1 > 0}$

Άρα $\boldsymbol{K(x)}$ γνησίως αύξουσα

$$\int_{1}^{2f'(x)} f(u)du = 0$$

$$K(2f'(x)) = K(1)$$

$$2f'(x) = 1 \quad (K(x) \text{ γνησίως αύξουσα άρα και } 1-1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = f'(0)$$

$$x = 0 \quad (f \text{ κυρτή , άρα γνησίως μονότονη, άρα } 1-1)$$

β)

Αρκεί $x'(t) = 2(f(x(t))'$

$$x'(t) = 2f'(x(t))x'(t)$$

$$\frac{x'(t)}{x'(t)} = \frac{2f'(x(t))x'(t)}{x'(t)} \qquad (x'(t) > 0)$$

$$2f'(x(t)) = 1$$

$$f'(x(t)) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x(t)) = f'(0)$$

$$x(t) = 0 \quad (f' \quad 1-1)$$

Οπότε $M(0, f(0)) = M(0, 1)$

Δ3.

$$\boldsymbol{g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2(x-2)^2}$$

$$\boldsymbol{= (e^x - e)^2(x-2)^2}$$

$$\boldsymbol{g'(x) = 2(e^x - e)(x-2)(xe^x - e^x - e)}$$

Έστω $\boldsymbol{q(x) = xe^x - e^x - e}$

$\boldsymbol{q'(x) = xe^x > 0}$ για $\boldsymbol{x > 0}$

$\boldsymbol{q(x)}$ γνησίως αύξουσα

$\boldsymbol{q(1) = -e} < 0$

$\boldsymbol{q(2) = e(e-1)} > 0$

Bolzano έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$

$\boldsymbol{q(x)}$ $\boldsymbol{1-1}$ άρα και μοναδική

x	0		1		x_0		2		$+\infty$
$e^x - e$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$q(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	