Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής Γενικής Παιδείας**,

Ημ/νία: 23 Μαίου 2012

Απαντήσεις Θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ. 31

Α2. Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ. 148

Α3. Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ. 96

Α4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Επειδή η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν, προκύπτει ότι $\delta = 25$.

Β2. Το μέγεθος του δείγματος ν ισούται με $\sum_{i=1}^{4} \nu_i = 7a + 4$

Από το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων % έχουμε ότι

$$F_2 = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{N_2}{\nu} = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{4a-2}{7a+4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 8$$

Ο πίνακας συχνοτήτων συμπληρώνεται με βάση το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων ($\boldsymbol{F_i}$%) και με χρήση των τύπων:

$$f_i\,\% = 100\,\frac{\nu_i}{\nu}, \qquad \text{για} \quad i = 1, \dots, 4$$

$$N_i = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_i, \qquad \text{για} \quad i = 1, \dots, 4$$

$$F_i\,\% = f_1\% + f_2\% + \cdots + f_i\%\,, \text{για} \quad i = 1, \dots, 4$$

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$x_i \cdot \nu_i$
$[5,15)$	10	12	20	12	20	120
$[15,25)$	20	18	30	30	50	360
$[25,35)$	30	24	40	54	90	720
$[35,45)$	40	6	10	60	100	240
	Σύνολο	60	100			1440

Β3. Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i = \frac{1}{60}\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i = 24$$

Για τον υπολογισμό της διακύμανσης έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i = \frac{1}{60}\sum_{i=1}^{4} (x_i - 24)^2 \cdot \nu_i = 84$$

Άρα: $s = \sqrt{84} = 9{,}17$

Β4. Έστω y το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν χρόνο στο διάστημα $[37,45)$.

Επειδή θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα σε κάθε κλάση έχουμε:

$$\frac{45-37}{45-35} = \frac{y}{10} \Leftrightarrow y = 8$$

Άρα, το 8% των μαθητών χρειάστηκε τουλάχιστον 37 λεπτά για να λύσει το μαθηματικό πρόβλημα.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω τα ενδεχόμενα :

Γ: ο μαθητής μαθαίνει Γαλλικά με: $P(\Gamma) = \frac{3\nu}{\nu^2+1}$

Ι: ο μαθητής μαθαίνει Ισπανικά με: $P(I) = \frac{\nu+2}{\nu^2+1}$

Δίνεται ότι: $P(\Gamma \cap I) = \frac{\nu+1}{\nu^2+1}$

Γ1. Είναι:

$$P(\Gamma \cup I) = \lim_{x\to -1}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x} = \lim_{x\to -1}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x^2+x)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \lim_{x\to -1}\frac{2(x-1)}{x\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

και άρα το ενδεχόμενο $\Gamma \cup I$ είναι το βέβαιο ενδεχόμενο.

Γ2. Σύμφωνα με τον προσθετικό νόμο είναι:

$$P(\Gamma \cup I) = P(\Gamma) + P(I) - P(\Gamma \cap I) \Leftrightarrow 1 = \frac{3\nu}{\nu^2+1} + \frac{\nu+2}{\nu^2+1} - \frac{\nu+1}{\nu^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \nu^2 + 1 = 3\nu + \nu + 2 - \nu - 1 \Leftrightarrow \nu^2 - 3\nu = 0 \Leftrightarrow \nu(\nu-3) = 0 \overset{\nu\neq 0}{\Longleftrightarrow} \nu = 3$$

Γ3. Ισχύει:

$P\left((\Gamma - I)\cup(I-\Gamma)\right) = P(\Gamma - I) + P(I - \Gamma)$ *(Τα ενδεχόμενα $\Gamma - I, I - \Gamma$ είναι ασυμβίβαστα)*

$= P(\Gamma) - P(\Gamma \cap I) + P(I) - P(\Gamma \cap I) = P(\Gamma) + P(I) - 2P(\Gamma \cap I)$

Για $\nu = 3$ είναι: $P(\Gamma) = \frac{9}{10}, P(I) = \frac{5}{10}, P(\Gamma \cap I) = \frac{4}{10}$

και τελικά: $P\left((\Gamma - I)\cup(I-\Gamma)\right) = \frac{9}{10} + \frac{5}{10} - \frac{8}{10} = \frac{6}{10}$

Γ4. Είναι: $P(\Gamma \cap I) = \frac{4}{10}$

Επειδή τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα έχουμε ότι:

$$P(\Gamma \cap I) = \frac{N(\Gamma \cap I)}{N(\Omega)} = \frac{32}{N(\Omega)}$$

και άρα:

$$\frac{32}{N(\Omega)} = \frac{4}{10} \Leftrightarrow 4\,N(\Omega) = 320 \Leftrightarrow N(\Omega) = 80$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = \dfrac{1+\ln^2 x}{x}$ με $A_f = (0,+\infty)$ και $f(1) = 1$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξη παραγωγισίμων με:

$$f'(x) = \frac{2\ln x - 1 - \ln^2 x}{x^2},\ \text{για κάθε } x > 0$$

$$f'(x) = -\frac{(\ln x - 1)^2}{x^2} < 0 \ \text{ για κάθε } x \neq e \ \textit{και} \ x > 0,\quad f'(1) = -1$$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Δ2. Για το εμβαδό του ορθογωνίου έχουμε:

$E(x) = x \cdot f(x)$, με $x > 0$ και $f(x) > 0$

$E(x) = 1 + \ln^2 x$

$E'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$,για κάθε $x > 0$

Λύνουμε την εξίσωση:

$E'(x) = 0$, με $x > 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Επίσης: $E'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x}{x} > 0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Επομένως, κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας:

x	0		1	
$E'(x)$	‖	$-$	0	$+$
$E(x)$	‖	↘	Ελάχιστο	↗

Το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστο όταν $x = 1$ οπότε το ορθογώνιο $OKM\Lambda$ με κορυφές $O(0,0)$, $K(1,0)$, $M(1,1)$, $\Lambda(0,1)$ είναι τετράγωνο.

Δ3. Η εφαπτομένη (η) της C_f στο σημείο της $\Sigma(1\,,f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία

$(\varepsilon):\ \psi = \lambda x + \beta$ με $\beta \neq 10$

Άρα: $\lambda_\eta = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow f'(1) = \lambda \Leftrightarrow \lambda = -1$

Εφόσον $(\varepsilon):\ \psi = -x + \beta$ οι παρατηρήσεις έχουν τη μορφή:

$\psi_i = -x_i + \beta$ για $i = 1, \dots, 10$

Οπότε με βάση την εφαρμογή 3 (σελ 99) του σχολικού βιβλίου προκύπτει:
$\overline{\psi} = -\overline{x} + \beta = -10 + \beta$

και $S_\psi = |-1| \cdot S_x = S_x = 2.$

Για να είναι το δείγμα ομοιογενές θα πρέπει: $CV_\psi \leq 10\,\%$

$$CV_\psi \leq \frac{10}{100} \Leftrightarrow \frac{2}{|\beta - 10|} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow |\beta - 10| \geq 20 \Leftrightarrow \beta \leq -10 \text{ ή } \beta \geq 30$$

Δ4. Επειδή $A \subseteq A \cup B$ είναι: $P(A) \leq P(A \cup B)$ με $P(A), P(A \cup B) \in (0,1] \subseteq (0, +\infty)$

Εφόσον η f είναι γνησίως φθίνουσα θα ισχύει:

$$f\big(P(A)\big) \geq f\big(P(A \cup B)\big), \quad (1)$$

Ομοίως, επειδή: $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$ είναι: $P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$

με $P(A \cap B), P(A \cup B) \in (0,1] \subseteq (0, +\infty)$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα θα ισχύει:

$$f(P(A \cap B)) \geq f\big(P(A \cup B)\big), \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$$

Επιμέλεια:

Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Μάριος Παπαδιαμαντής, Χρήστος Αναστασίου,

Ηρώ Μαρκάκη