ΜΙΧΑΛΗΣ ΚΑΡΑΜΑΥΡΟΣ
ΣΑΚΗΣ ΛΙΠΟΡΔΕΖΗΣ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Έργο του καλλιτέχνη Άγγελου Γεωργίου

ΓΙΑ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΙΣ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
2001 ΡΟΣΗΜΟ
www.2001.gr

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Η ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ γράφτηκε σαν ένα ξεχωριστό εγχειρίδιο γιατί αφ' ενός η τριγωνομετρία αποτελεί ένα ξεχωριστό κλάδο των μαθηματικών και αφ' ετέρου επειδή αποτελεί ένα μεγάλο κομμάτι της ύλης της Β΄ Λυκείου, το οποίο δυσκολεύει περισσότερο από όλα τα άλλα κεφάλαια τους μαθητές. Το βιβλίο περιλαμβάνει το τυπολόγιο της Τριγωνομετρίας και μνημονικούς κανόνες απομνημόνευσης. Επίσης πολλές ερωτήσεις κατανόησης της θεωρίας και τέλος μία πολλή καλή σειρά ασκήσεων, οι περισσότερες των οποίων είναι των συγγραφέων καθώς και επιλεγμένες ασκήσεις από την ελληνική και διεθνή βιβλιογραφία. Οι ασκήσεις αυτές καλό είναι να διδάσκονται από τους καθηγητές ή να μελετώνται από τους μαθητές αφού έχουν λυθεί κάποια απλά παραδείγματα από το σχολικό εγχειρίδιο π.χ. *Α΄ ΟΜΑΔΑΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ*.

Είμαστε πεπεισμένοι ότι θα είναι πολύτιμο βοήθημα και ιδίως για την επανάληψη πριν τις εξετάσεις.

Τελειώνοντας θέλαμε να ευχαριστήσουμε την συνάδελφο Κική Σουλτανίδου για τις διορθώσεις και τις γραμματείς Αθηνά Αλμπανίδου και Νίκη Λαζαρίδου για την καλλιτεχνική παρουσίαση του βιβλίου.

Στη διάθεσή σας για επικοινωνία στο e-mail:

info@ekp2001-orosimo.gr

Οι συγγραφείς

ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΠΕΡΙΕΧΕΙ:

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

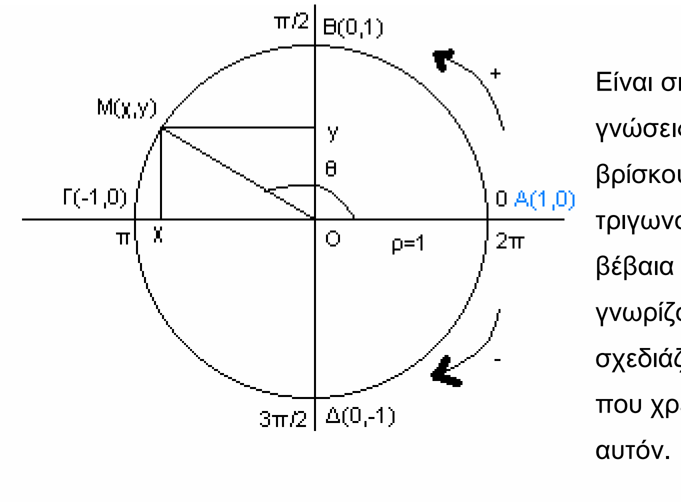
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΟΘΕΩΡΙΕΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ



Είναι σημαντικό τις περισσότερες γνώσεις τις τριγωνομετρίας να τις βρίσκουμε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο, τον οποίο βέβαια πρέπει να γνωρίζουμε καλά και να τον σχεδιάζουμε πρόχειρα κάθε φορά που χρειαζόμαστε κάτι πάνω σ' αυτόν.

Σχήμα 1

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

- **Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας**

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} \Leftrightarrow y = \rho\eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\chi}{\rho} \Leftrightarrow \chi = \rho\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\varepsilon\phi\omega = \frac{y}{\chi} \Leftrightarrow y = \chi\varepsilon\phi\omega$$

$$\sigma\phi\omega = \frac{\chi}{y} \Leftrightarrow \chi = y\sigma\phi\omega$$

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

1. $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega \\ \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega \end{cases}$
2. $\varepsilon\phi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}, \omega \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \kappa \in Z$
3. $\sigma\phi\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}, \omega \neq \kappa\pi, \kappa \in Z$
4. $\varepsilon\phi\omega.\sigma\phi\omega = 1 \;\; \mu\varepsilon \;\; \omega \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} \;\;\; \kappa\alpha\iota \;\;\; \omega \neq \kappa\pi, \kappa \in Z$
5. $1 + \varepsilon\phi^2\omega = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}, \omega \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \kappa \in Z$
6. $1 + \sigma\phi^2\omega = \dfrac{1}{\eta\mu^2\omega}, \omega \neq \kappa\pi, \kappa \in Z$

Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

$\eta\mu(-\chi)=-\eta\mu\chi$	$\sigma\upsilon\nu(-\chi)=\sigma\upsilon\nu\chi$	$\varepsilon\phi(-\chi)=-\varepsilon\phi\chi$	$\sigma\phi(-\chi)=-\sigma\phi\chi$
$\eta\mu(\pi-\chi)=\eta\mu\chi$	$\sigma\upsilon\nu(\pi-\chi)=-\sigma\upsilon\nu\chi$	$\varepsilon\phi(\pi-\chi)=-\varepsilon\phi\chi$	$\sigma\phi(\pi-\chi)=-\sigma\phi\chi$
$\eta\mu(\pi+\chi)=-\eta\mu\chi$	$\sigma\upsilon\nu(\pi+\chi)=-\sigma\upsilon\nu\chi$	$\varepsilon\phi(\pi+\chi)=\varepsilon\phi\chi$	$\sigma\phi(\pi+\chi)=\sigma\phi\chi$
$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right)=\sigma\upsilon\nu\chi$	$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right)=\eta\mu\chi$	$\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right)=\sigma\phi\chi$	$\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right)=\varepsilon\phi\chi$

Μνημονικός κανόνας

i. Αν έχουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς τόξων της μορφής $\frac{\pi}{2}\pm\theta$ ή $\frac{3\pi}{2}\pm\theta$ τότε θα αλλάζουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό που έχουμε, δηλαδή το ημίτονο θα γίνει συνημίτονο (και αντιστρόφως) και η εφαπτομένη θα γίνει συνεφαπτομένη (και αντιστρόφως).

ii. Αν έχουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς τόξων της μορφής $\pi\pm\theta$ ή $2\pi\pm\theta$ οι τριγωνομετρικοί αριθμοί δεν αλλάζουν. Το ημίτονο παραμένει ημίτονο κ.λ.π.
Το πρόσημο και στις δυο περιπτώσεις εξαρτάται από το τεταρτημόριο στο οποίο λήγει το τόξο.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών τόξων

χ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συνχ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
ημχ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
εφχ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται	0	Δεν ορίζεται	0
σφχ	Δεν ορίζεται	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Δεν ορίζεται	0	Δεν ορίζεται

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟΥ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1^o

Το ημίτονο τόξου θ με πέρας το σημείο Μ(x,y) είναι η τεταγμένη του σημείου Μ ενώ το συνημίτονο είναι η τετμημένη του Μ δηλαδή ημθ = y και συνθ = x. Έτσι όταν θέλω το ημ$\frac{3\pi}{2}$ βρίσκω στο κύκλο το πέρας του τόξου $\frac{3\pi}{2}$ που είναι το σημείο Δ και η τεταγμένη του Δ που είναι -1 είναι το ημ$\frac{3\pi}{2}$. Έτσι ημ$\frac{3\pi}{2}$ = - 1.

Άλλο παράδειγμα: θέλω συν5π. Βρίσκω το πέρας του τόξου 5π που είναι το σημείο Γ

και επειδή η τετμημένη του Γ είναι – 1 έχω συν5π = - 1. Όταν θέλω εφ ή σφ κάποιου τόξου προκύπτει από το ότι εφθ = $\frac{y}{x}$ (με $x \neq 0$) και σφθ = $\frac{x}{y}$ (με $y \neq 0$). (Σχήμα 1)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2^o

Συχνά θα χρειάζομαι στις ασκήσεις το πρόσημο ενός τριγωνομετρικού αριθμού. Αφού το ημ είναι η τεταγμένη του πέρατος του τόξου, το συν είναι η τετμημένη του πέρατος του τόξου, η εφ και η σφ είναι το πηλίκο αυτών θα μπορώ να βρω το πρόσημό τους πάνω στο τριγωνομετρικό κύκλο.

Π.χ. Θέλω το πρόσημο του συν(3π – θ). Το τόξο 3π – θ βρίσκεται στο 2^o τεταρτημόριο. Οι τετμημένες των σημείων του τριγωνομετρικού κύκλου που βρίσκονται στο 2^o τεταρτημόριο παρατηρούμε ότι είναι αρνητικές. Έτσι το συν(3π – θ) είναι αρνητικό. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς μεγάλων τόξων και πρέπει να κάνουμε αναγωγή του τόξου στο 1^o τεταρτημόριο πάλι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τριγωνομετρικό κύκλο αντί να απομνημονεύουμε πολλούς πίνακες γεμάτους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3^o

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το ημ$\frac{31\pi}{2}$.

Είναι ημ$\frac{31\pi}{2}$=ημ($\frac{28\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}$)=ημ(14π+$\frac{3\pi}{2}$)=ημ(7·2π+$\frac{3\pi}{2}$)=ημ$\frac{3\pi}{2}$=-1 διότι ημ(2κπ+θ)=ημθ και το πέρας του τόξου $\frac{3\pi}{2}$ είναι το σημείο Δ με τεταγμένη – 1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4^o

ημ(π + θ) = - ημθ γιατί π + θ είναι τόξο στο 3^o τεταρτημόριο όπου το ημίτονο είναι αρνητικό.
συν(2π - θ) = συνθ διότι 2π - θ είναι τόξο στο 4^o τεταρτημόριο όπου το συνημίτονο είναι θετικό.
εφ($\frac{3\pi}{2}$-θ) = σφθ διότι επειδή είναι τόξο της μορφής $\frac{3\pi}{2}$ - θ η εφαπτόμενη γίνεται συνεφαπτόμενη και $\frac{3\pi}{2}$ - θ είναι τόξο στο 3^o τεταρτημόριο όπου η εφαπτόμενη είναι θετική.
σφ(3π - θ) = σφ(2π + π - θ) = σφ(π - θ) = - σφθ διότι το τόξο π - θ είναι στο 2^o τεταρτημόριο που η συνεφαπτόμενη είναι αρνητική. Έτσι λοιπόν επειδή σε μία άσκηση μπορεί να εμφανιστούν αρκετοί τέτοιοι υπολογισμοί ούτε η απομνημόνευση των πινάκων, ούτε η αποδεικτική διαδικασία ενδείκνυται για τον υπολογισμό τέτοιων τριγωνομετρικών αριθμών.

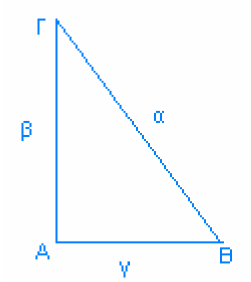
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5ο

Μου δίνουν ένα τριγωνομετρικό αριθμό και ζητούν τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Έστω μου δίνουν την εφθ. Για να βρω από την εφθ το συνημίτονο πρέπει να αναζητήσω σχέση που συνδέει αυτούς τους δύο τριγωνομετρικούς αριθμούς. Η σχέση είναι $εφ^2θ = \frac{1}{συν^2θ} - 1$. Όταν βρω το συνθ, για να βρω το ημθ πρέπει να αναζητήσω σχέση ημθ και συνθ που είναι ο γνωστός ως θεμελιώδης τύπος $ημ^2θ + συν^2θ = 1$ ή αλλιώς επειδή από την εφθ βρήκα το συνθ, από την σχέση $εφθ = \frac{ημθ}{συνθ}$ βρίσκω ημθ = εφθ·σφθ. Επίσης από εφθ μπορώ να βρω σφθ από τη σχέση εφθ·σφθ = 1.

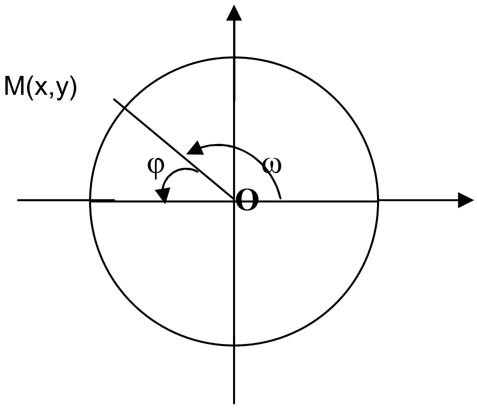
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. (Συμπλήρωσης κενού)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ
Συμπληρώστε τις ισότητες
ημΒ = , συνΒ = , εφΒ = , σφΒ =
ημΓ = , συνΓ = , εφΓ = , σφΓ =



2. (Διάζευξης).
Δίνεται σημείο Μ(x,y) του τριγωνομετρικού κύκλου.



Απαντήστε αν είναι σωστές ή λάθος οι ισότητες.

1. ημω = y Σωστό ή Λάθος

2. συνφ = x Σωστό ή Λάθος

3. Το συνημίτονο και το ημίτονο ενός τόξου $\overset{\frown}{AM}$ με πέρας το σημείο Μ(x,y) είναι τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου Μ αντίστοιχα. Σωστό ή Λάθος

4. εφω = $\frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$ Σωστό ή Λάθος

5. σφω = $\frac{x}{y}(y \neq 0)$ Σωστό ή Λάθος

6. ημφ = y Σωστό ή Λάθος

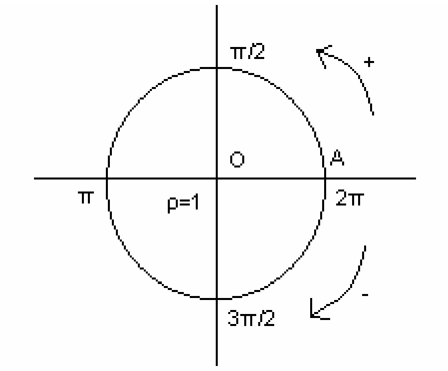
3. (Συμπλήρωση κενού)
Συμπληρώστε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών του παρακάτω πίνακα:

	1^{o} τεταρτημόριο	2^{o} τεταρτημόριο	3^{o} τεταρτημόριο	4^{o} τεταρτημόριο
ημω				
συνω				
εφω				
σφω				

4. (Συμπλήρωση κενού).

Συμπληρώστε στον παρακάτω πίνακα τους υπολογισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών των τόξων που φαίνονται στον πίνακα. Όπου δεν ορίζεται κάποιος τριγωνομετρικός αριθμός βάλτε (-).

ω	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$-\frac{\pi}{2}$	- π	$-\frac{3\pi}{2}$	- 2π
ημω									
συνω									
εφω									
σφω									



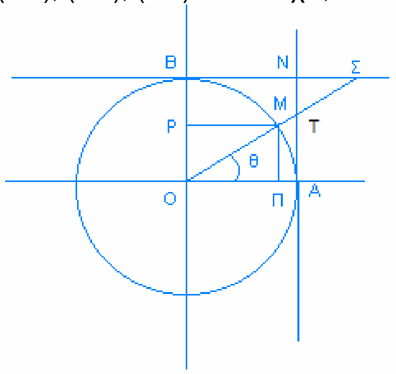
5. (Αντιστοίχισης).

Σε κάθε ένα από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς που γράφονται στη στήλη Ι αντιστοιχεί ένα από τα αποτελέσματα που γράφονται στη στήλη ΙΙ.

ΣΤΗΛΗ Ι	ΣΤΗΛΗ ΙΙ
1. συν (2001π)	**α)** 1
2. ημ($-\frac{7\pi}{2}$)	**β)** 0
3. σφ$\frac{13\pi}{2}$	**γ)** - 1
4. εφ$\frac{31\pi}{2}$	**δ)** δεν ορίζεται
5. ημ 1890^o	
6. συν(-810^o)	

6. (Αντιστοίχισης)

Σε κάθε ένα τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας θ ποιο από τα μήκη των τμημάτων (ΟΠ), (ΟΡ), (ΒΣ), (ΑΤ), (ΟΒ), (ΟΑ), (ΟΤ), (ΟΣ), (ΑΝ) αντιστοιχεί;



7. (πολλαπλής επιλογής).

1) Ένα τόξο α ακτινίων (rad) σε μοίρες είναι:

α) μ = $\frac{\alpha\pi}{180^o}$; **β)** μ = $\frac{180^o\alpha}{\pi}$; **γ)** μ = $\frac{\alpha}{180^o\pi}$; **δ)** μ = $\frac{180^o\pi}{a}$;

2) Ο τύπος που μετατρέπει ακτίνια σε μοίρες είναι:

α) $\frac{\alpha}{\mu}=\frac{180^o}{\pi}$; **β)** $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\mu}{180^o}$; **γ)** $\frac{\mu}{180^o}=\frac{\pi}{\alpha}$; **δ)** $\frac{\pi}{180^o}=\frac{\mu}{\alpha}$;

8. (Διάζευξης).

Σε κάθε μία από τις παρακάτω ισότητες συμπληρώστε με κύκλο το Σ αν είναι σωστή ή το Λ αν είναι λάθος.

1.	ημ$\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$	Σ	ή	Λ
2.	συνπ = 0	Σ	ή	Λ
3.	εφ$\frac{\pi}{4}$ = 1	Σ	ή	Λ
4.	σφ$\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	Σ	ή	Λ
5.	συν$\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$	Σ	ή	Λ
6.	εφ$\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	Σ	ή	Λ
7.	ημ$\frac{\pi}{4}=1$	Σ	ή	Λ
8.	σφ$\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$	Σ	ή	Λ

9. (πολλαπλής επιλογής και διάταξης).

Αν θ είναι τόξο οξείας γωνίας με πέρας το σημείο Μ(x,y) τότε το συμμετρικό του ως προς :

α) άξονα xx΄
β) άξονα yy΄
γ) αρχή των αξόνων
δ) διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων είναι πέρας τόξου

1) π – θ; **2)** 2π – θ; **3)** $\frac{\pi}{2}$ - θ; **4)** π + θ; **5)** $\frac{\pi}{2}$ + θ; **6)** 2π + θ;

10. (πολλαπλής επιλογής)

Τα συμμετρικά σημεία του τριγωνομετρικού κύκλου ως προς τον άξονα xx΄ έχουν:
α) το ίδιο ημίτονο; **β)**το ίδιο συνημίτονο; **γ)** την ίδια εφαπτομένη; **δ)** την ίδια συνεφαπτομένη;

11. (αντιστοίχισης ή σύζευξης).
Σε κάθε ένα από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς 1 έως 8 αντιστοιχεί ένα από τα αποτελέσματα α έως η. Να κάνετε τη σωστή αντιστοιχία.

1. ημ(π + θ)	**α**. ημθ
2. συν(2π – θ)	**β**. συνθ
3. εφ(π – θ)	**γ**. εφθ
4. σφ(- θ)	**δ**. σφθ
5. ημ($\frac{\pi}{2}$ + θ)	**ε**. – ημθ
6. συν($\frac{3\pi}{2}$ - θ)	**στ**. – συνθ
7. εφ($\frac{\pi}{2}$ - θ)	**ζ**. – εφθ
8. σφ($\frac{3\pi}{2}$ +θ)	**η**. – σφθ

12. (πολλαπλής επιλογής).
Τα συμμετρικά σημεία του τριγωνομετρικού κύκλου ως προς την αρχή των αξόνων έχουν :
α) το ίδιο ημίτονο; **β)**το ίδιο συνημίτονο; **γ)** την ίδια εφαπτομένη; **δ)** την ίδια συνε- φαπτομένη; **ε)** αντίθετα ημίτονα; **στ)** αντίθετα συνημίτονα; **ζ)** α,β,γ,δ; **η)** γ, δ, ε, στ;

13. Σε κάθε ένα από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς 1 έως 8 αντιστοιχεί ένα από τα αποτελέσματα α έως η. Να κάνετε τη σωστή αντιστοιχία.

1. ημ(- θ)	**α**. ημθ
2. συν(π + θ)	**β**. συνθ
3. εφ(2π + θ)	**γ**. εφθ
4. σφ(2π – θ)	**δ**. σφθ
5. ημ($\frac{3\pi}{2}$ - θ)	**ε**. – ημθ
6. συν($\frac{\pi}{2}$ + θ)	**στ**. – συνθ
7. εφ($\frac{3\pi}{2}$ + θ)	**ζ**. - εφθ
8. σφ($\frac{\pi}{2}$ - θ)	**η**. – σφθ

14. Αν Μ(x,y) είναι το πέρας τόξου $\overset{\frown}{AM}$ μιας οξείας γωνίας θ $\neq \frac{\pi}{4}$ τότε να βρείτε :

α) Το συμμετρικό Μ΄του σημείου Μ ως προς τη διχοτόμο y = x της 1ης γωνίας των αξόνων.

β) Το τόξο $\overset{\frown}{AM}$ ΄ είναι $\frac{\pi}{2}$ + θ ; ή $\frac{\pi}{2}$ - θ; ή - θ;

γ) Να συγκριθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των τόξων θ = $\overset{\frown}{AM}$ και ω = $\overset{\frown}{AM}$ ΄.

15. Σε κάθε ένα από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς 1 έως 8 αντιστοιχεί ένα από τα αποτελέσματα α έως η. Να κάνετε τη σωστή αντιστοιχία.

1. ημ(90^o– θ)	**α**. ημθ
2. συν(270^o+ θ)	**β**. συνθ
3. εφ(90^o+ θ)	**γ**. εφθ
4. σφ(270^o– θ)	**δ**. σφθ
5. ημ(180^o+ θ)	**ε**. – ημθ
6. συν(360^o– θ)	**στ**. – συνθ
7. εφ(180^o– θ)	**ζ**. – εφθ
8. σφ(360^o+ θ)	**η**. – σφθ

16. Απαντήστε αν είναι σωστή ή λάθος κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις.

1. Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. **Σ** ή **Λ**;

2. Οι γωνίες που έχουν άθροισμα 180^o έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς **Σ** ή **Λ**;

3. Στις γωνίες που έχουν άθροισμα 90^o το ημίτονο καθεμιάς ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτόμενη καθεμίας με τη συνεφαπτόμενη της άλλης. **Σ** ή **Λ**;

4. Γωνίες που διαφέρουν κατά 180^o έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο και την ίδια εφαπτόμενη και συνεφαπτόμενη. **Σ** ή **Λ**;

5. Τα τόξα θ και π – θ αντιστοιχούν σε γωνίες που διαφέρουν κατά 180^o. **Σ** ή **Λ**;

6. Τα τόξα θ και $\frac{\pi}{2}$ + θ αντιστοιχούν σε τόξα που έχουν άθροισμα 90^o. **Σ** ή **Λ**;

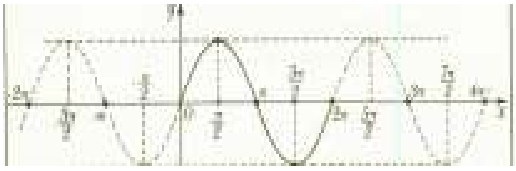
7. Τα τόξα θ και π + θ αντιστοιχούν σε σημεία του τριγωνομετρικού κύκλου που είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων

8. $ημ(\frac{3\pi}{2} + θ) = συνθ$. **Σ** ή **Λ**;

9. συν$\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}$ **Σ** ή **Λ**;

10. Τα τόξα $\frac{5\pi}{4} \kappa\alpha\iota \frac{\pi}{4}$ διαφέρουν κατά τόξο ενός ημικυκλίου. **Σ** ή **Λ**;

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ



Η συνάρτηση **f(χ)=ημχ** έχει

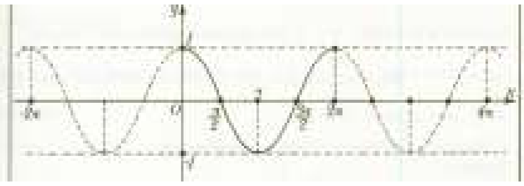
σύνολο ορισμού Α=$\Re$

Μέγιστη τιμή την y=1 και ελάχιστη την y=-1 αφού

$-1 \le \eta\mu\chi \le 1$ για κάθε $\chi \in \Re$.

Είναι περιοδική με περίοδο Τ=2π

Περιττή συνάρτηση διότι $\eta\mu(-\chi) = -\eta\mu\chi$



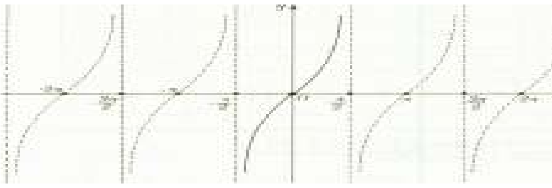
Η συνάρτηση **f(χ)=συνχ** έχει

σύνολο ορισμού Α=$\Re$

Μέγιστη τιμή την y=1 και ελάχιστη την y=-1 αφού

$-1 \le \sigma\upsilon\nu\chi \le 1$ για κάθε $\chi \in \Re$.

Άρτια αφού $\sigma\upsilon\nu(-\chi) = \sigma\upsilon\nu\chi$



Η συνάρτηση **f(χ)=εφχ** έχει σύνολο ορισμού

Α={ $\chi \in \Re$ με χ$\neq$ κπ+$\frac{\pi}{2}$, κ$\in Z$}.

Περίοδο Τ=π.

Περιττή συνάρτηση αφού $\varepsilon\phi(-\chi) = -\varepsilon\phi\chi$

και είναι γνησίως αύξουσα κατά διαστήματα

Η συνάρτηση **f(χ)=σφχ** έχει σύνολο ορισμού

Α={ $\chi \in \Re$ με χ$\neq$ κπ , κ$\in Z$}.

Περίοδο Τ=π.

Περιττή συνάρτηση αφού $\sigma\phi(-\chi) = -\sigma\phi\chi$

και είναι γνησίως φθινουσα κατά διαστήματα

Οι συναρτήσεις $f(\chi) = \rho\eta\mu\omega\chi$ και $g(\chi) = \rho\sigma\upsilon\nu\omega\chi$, $\rho, \omega > 0$ είναι περιοδικές με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$ και έχουν μέγιστη τιμή $y = \rho$ και ελάχιστη τιμή $y = -\rho$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ημx = ημθ ⇔ x = 2κπ + θ ή x = 2κπ + π – θ, κ ∈ Z.
συνx = συνθ ⇔ x = 2κπ + θ ή x = 2κπ – θ, κ ∈ Z.
εφx = εφθ ⇔ x = κπ + θ, κ ∈ Z.
σφx = σφθ ⇔ x = κπ + θ, κ ∈ Z.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Απαντήστε αν είναι σωστή $\boxed{\Sigma}$ ή λάθος $\boxed{\Lambda}$ κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις.

i Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται περιοδική όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός Τ > 0 τέτοιος ώστε για κάθε x∈A να ισχύει: f(x+T)=f(x-T)=f(x). Ο πραγματικός αριθμός Τ λέγεται περίοδος της συνάρτησης f . **Σ** ή **Λ**;

ii Η περίοδος της συνάρτησης f(x) = ημx είναι 2π **Σ** ή **Λ**;

iii Η περίοδος της συνάρτησης f(x) = συνx είναι π **Σ** ή **Λ**;

iv Η περίοδος της συνάρτησης f(x) = εφx είναι 2π **Σ** ή **Λ**;

v Η περίοδος της συνάρτησης f(x) = σφx είναι π **Σ** ή **Λ**;

2. Ομοίως

i Η συνάρτηση f(x) = ημx παρουσιάζει μέγιστη τιμή για x = $\frac{\pi}{2}$ και ελάχιστη τιμή για x = $\frac{3\pi}{2}$. **Σ** ή **Λ**;

ii Η συνάρτηση f(x) = εφx παρουσιάζει μέγιστη τιμή για x = 0 και ελάχιστη για x = π. **Σ** ή **Λ**;

iii Η συνάρτηση f(x) = συνx είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [0, π] και γνησίως αύξουσα στο [π, 2π]. **Σ** ή **Λ**;

iv Η συνάρτηση f(x) = σφx είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0, π). **Σ** ή **Λ**;

v Η περίοδος της συνάρτησης f(x) = ρημωx είναι $T = \frac{2\pi}{\omega}$ **Σ** ή **Λ**;

3. Κάθε ένας από τους πίνακες Α και Β αντιστοιχεί σε μία από τις συναρτήσεις :
1) f(x) = ημx **2)** f(x) = συνx **3)** f(x) = εφx **4)** f(x) = σφx.

Να κάνετε τη σωστή αντιστοιχία.

A.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
?	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

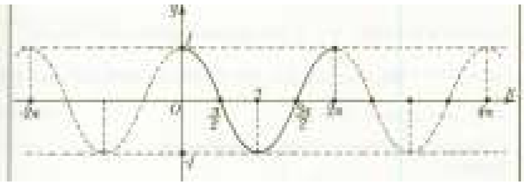
B.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
?	1	↘	0	↘	- 1	↗	0	↗	1

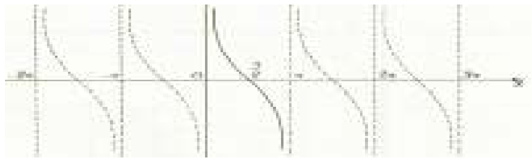
4. (αντιστοίχισης).
Σε κάθε μία από τις γραφικές παραστάσεις Α, Β, Γ, Δ αντιστοιχεί μία από τις συναρτήσεις :

1. f(x) = ημx **2.** f(x) = συνx **3.** f(x) = εφx **4.** f(x) = σφx. Να κάνετε τη σωστή αντιστοιχία.

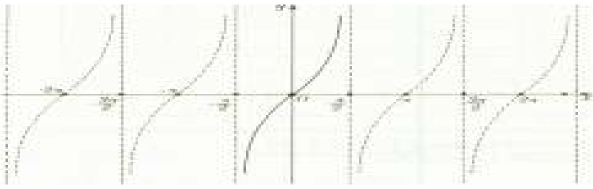
Α.



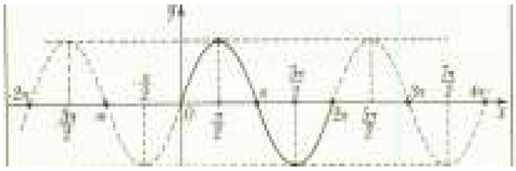
Β.



Γ.



Δ.



5. (πολλαπλής επιλογής).
α) Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f(x) = 3ημ2x είναι αντίστοιχα :
$\boxed{Α}$ 1 και – 1; $\boxed{Β}$ 2 και – 2; $\boxed{Γ}$ 3 και – 3; $\boxed{Δ}$ 5 και – 5;

β) Η περίοδος της συνάρτησης f(x) = 3ημ2x είναι :

$\boxed{Α}$ Τ = $\frac{2\pi}{3}$; $\boxed{Β}$ Τ = $\frac{3\pi}{2}$; $\boxed{Γ}$ Τ = π; $\boxed{Δ}$ Τ = 2π;

6. (Διάζευξης).
Συμπληρώστε με κύκλο το Σ ή το Λ ανάλογα με το αν είναι σωστή ή λάθος κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

i Η ευθεία x = $\frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) = εφx. **Σ** ή **Λ;**

ii Η ευθεία x = π είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) = σφx. **Σ** ή **Λ;**

iii Η ευθεία x = - $\frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) = εφx. **Σ** ή **Λ;**

iv Η συνάρτηση f(x) = σφx είναι γνησίως φθίνουσα κατά διαστήματα. **Σ** ή **Λ;**

v Η συνάρτηση f(x) = συνx είναι άρτια συνάρτηση**.** **Σ** ή **Λ;**

vi Η συνάρτηση f(x) = εφx είναι περιττή. **Σ** ή **Λ**;

vii Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) = ημx έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων ενώ η συνάρτηση f(x) = συνx έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα yy΄. **Σ** ή **Λ**;

7. (αντιστοίχισης).
Σε κάθε μία από τις εξισώσεις 1, 2, 3, 4 αντιστοιχεί ένας ή περισσότεροι από τους τύπους Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λύσεων αυτών. Να κάνετε τη σωστή αντιστοιχία.

i ημx = ημθ	**Α**. x = κπ + θ	κ ∈ Ζ.
ii συνx = συνθ	**Β**. x = κπ – θ	κ ∈ Ζ.
iii εφx = εφθ	**Γ**. x = 2κπ + θ	κ ∈ Ζ.
iv σφx = σφθ	**Δ**. x = 2κπ – θ	κ ∈ Ζ.
	Ε. x = 2κπ + π – θ	κ ∈ Ζ.
	Ζ. x = 2κπ + π + θ	κ ∈ Ζ.

8. (Διάζευξης).
Απαντήστε αν είναι σωστές $\boxed{\Sigma}$ ή λάθος $\boxed{\Lambda}$ οι παρακάτω ισοδυναμίες:

1. ημx = συνθ $\Leftrightarrow$ ημx = ημ$\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$. **Σ** ή **Λ;**

2. ημx = -συνθ $\Leftrightarrow$ ημx = συν(π – θ). **Σ** ή **Λ;**

3. συνx = ημθ $\Leftrightarrow$ συνx = συν $\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$. **Σ** ή **Λ;**

4. εφx = σφθ $\Leftrightarrow$ εφx = εφ$\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)$. **Σ** ή **Λ;**

5. σφx = - σφθ $\Leftrightarrow$ σφx = σφ(π – θ). **Σ** ή **Λ;**

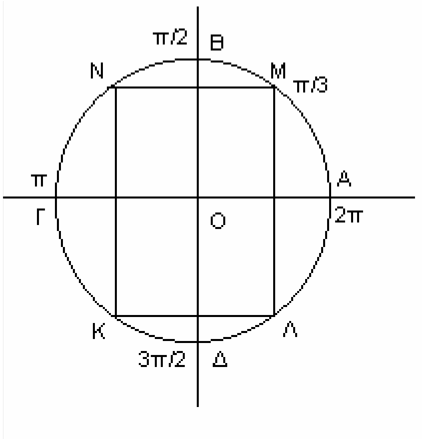
6. εφx = - εφθ $\Leftrightarrow$ εφx = εφ(π + θ). **Σ** ή **Λ;**

7. συνx = - $\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ συνx = συν $\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$. **Σ** ή **Λ;**

9. (πολλαπλής επιλογής).
Αν ημx ·συνx = 0 τότε:

$\boxed{A}$ x = κ$\frac{\pi}{2}$, κ $\in$ Ζ. $\boxed{B}$ x = κπ, κ $\in$ Ζ. $\boxed{\Gamma}$ x = 2κπ, κ $\in$ Ζ. $\boxed{\Delta}$ x = κ $\frac{3\pi}{2}$, κ $\in$ Ζ.

10. (πολλαπλής επιλογής).
Η λύση της ανίσωσης συνx ≥ $\frac{1}{2}$ είναι :

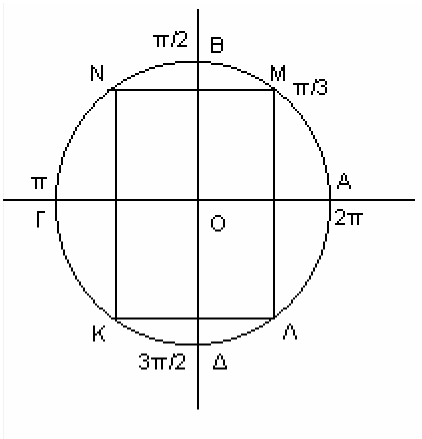


$\boxed{A}$ το τόξο $\overset{\frown}{\Lambda A M}$; $\boxed{B}$ το τόξο $\overset{\frown}{M B N}$;

$\boxed{\Gamma}$ το τόξο $\overset{\frown}{N \Gamma K}$; $\boxed{\Delta}$ το τόξο $\overset{\frown}{K \Delta \Lambda}$;

$\boxed{E}$ το τόξο $\overset{\frown}{M \Gamma \Lambda}$; $\boxed{Z}$ το τόξο $\overset{\frown}{N \Delta M}$;

11. (πολλαπλής επιλογής).
Η λύση της ανίσωσης 2ημx - $\sqrt{3}$ ≤ 0 είναι



$\boxed{A}$ το τόξο $\overset{\frown}{\Lambda A M}$; $\boxed{B}$ το τόξο $\overset{\frown}{M B N}$;

$\boxed{\Gamma}$ το τόξο $\overset{\frown}{N \Gamma K}$; $\boxed{\Delta}$ το τόξο $\overset{\frown}{K \Delta \Lambda}$;

$\boxed{E}$ το τόξο $\overset{\frown}{M \Gamma \Lambda}$; $\boxed{Z}$ το τόξο $\overset{\frown}{N \Delta M}$;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1 Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\alpha+\beta\eta\mu(\gamma\chi)$, όπου α,β,γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί . Αν η συνάρτηση έχει περίοδο $\mathrm{T}=\pi$ και ελάχιστη τιμή $y=0$ και μέγιστη, $y=4$, να δείξετε ότι:

α) $\alpha=\beta=\gamma=2$

β) Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες παίρνει μέγιστη τιμή

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(\chi)=\rho\eta\mu(\omega\chi)$ έχει περίοδο $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{\omega}$.

Άρα $\pi=\frac{2\pi}{\gamma}$ ή $1=\frac{2}{\gamma}$ ή $\gamma=2$

Είναι $-1\le\eta\mu(\gamma\chi)\le1\Leftrightarrow-\beta\le\beta\eta\mu(\gamma\chi)\le\beta$, όπου $\beta>0$ $\Leftrightarrow\alpha-\beta\le\alpha+\beta\eta\mu(\gamma\chi)\le\beta+\alpha$

$\Leftrightarrow\alpha-\beta\le f(\chi)\le\beta+\alpha$

από όπου προκύπτει ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι $\alpha-\beta$ και η μέγιστη $\alpha+\beta$

Συνεπώς έχουμε $\begin{matrix}\alpha-\beta=0\\ \alpha+\beta=4\end{matrix}\Leftrightarrow 2\alpha=4\Leftrightarrow\alpha=2$ και $\beta=4-\alpha\Leftrightarrow\beta=2$

Άρα $\alpha=\beta=\gamma=2$

β) Είναι

$$f(\chi)=2+2\eta\mu(2\chi)\Leftrightarrow4=2+2\eta\mu(2\chi)\Leftrightarrow2=2\eta\mu(2\chi)\Leftrightarrow1=\eta\mu(2\chi)\Leftrightarrow\eta\mu\frac{\pi}{2}=\eta\mu(2\chi)$$

$$\Leftrightarrow2\chi=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\chi=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\kappa\in Z$$

1.2 Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=\kappa+2\lambda\eta\mu(\omega\chi)$ με $\lambda,\omega>0$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από της αρχή των αξόνων, έχει περίοδο $\mathrm{T}=3\pi$ και ελάχιστη τιμή $y=\lambda-3$, να βρείτε

α) τους κ,λ,ω

β) τον τύπο της συνάρτησης $f(\chi)$

γ) τις τιμές $f(\pi)$ και $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

ΛΥΣΗ

α) $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{\omega}\Leftrightarrow3\pi=\frac{2\pi}{\omega}\Leftrightarrow3=\frac{2}{\omega}\Leftrightarrow\omega=\frac{2}{3}$

Ο τύπος της f επαληθεύεται για $\chi=0$ και $y=0$,

έτσι έχουμε $0=\kappa+2\lambda\eta\mu0$ ή $\kappa=0$ οπότε $f(\chi)=2\lambda\eta\mu\left(\frac{2}{3}\chi\right)$ η οποία έχει ελάχιστη τιμή $y=-2\lambda$. Άρα

$\lambda-3=-2\lambda\Leftrightarrow3\lambda=3\Leftrightarrow\lambda=1$

Ώστε βρήκαμε $\omega=\frac{2}{3}$, $\kappa=0$, $\lambda=1$ και $f(\chi)=2\eta\mu\left(\frac{2}{3}\chi\right)$

Οπότε $f(\pi)=2\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\eta\mu\frac{\pi}{3}=2\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ και $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)=2\eta\mu\frac{\pi}{6}=2\frac{1}{2}=1$

1.3 Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ και τύπο $f(\chi) = 3\eta\mu\chi + 2\sigma\upsilon\nu\chi - 1$. Να βρείτε

α) την μέγιστη τιμή της

β) την ελάχιστη τιμή της

γ) την αριθμητική τιμή της f για $\chi = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π και $\frac{\pi}{3}$

ΛΥΣΗ

Είναι $-1 \le \eta\mu\chi \le 1 \Leftrightarrow -3 \le 3\eta\mu\chi \le 3$

και $-1 \le \sigma\upsilon\nu\chi \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2\sigma\upsilon\nu\chi \le 2$

οπότε $-5 \le 3\eta\mu\chi + 2\sigma\upsilon\nu\chi \le 5 \Leftrightarrow -6 \le 3\eta\mu\chi + 2\sigma\upsilon\nu\chi - 1 \le 4 \Leftrightarrow -6 \le f(\chi) \le 6$

α) Άρα έχει μέγιστη τιμή $y = 6$

β) Άρα έχει ελάχιστη τιμή $y = -6$

γ) $f(0) = 3\eta\mu 0 + 2\sigma\upsilon\nu 0 - 1 = 0 + 2 - 1 = 1$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\eta\mu\frac{\pi}{2} + 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - 1 = 3 + 0 - 1 = 2$$

$$f(\pi) = 3\eta\mu\pi + 2\sigma\upsilon\nu\pi - 1 = 0 - 2 - 1 = -3$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\eta\mu\frac{\pi}{3} + 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - 1 = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} - 1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

1.4 Σε μια πισίνα δημιουργείται τεχνητό κύμα που το ύψος του κύματος σε μέτρα την κάθε χρονική στιγμή δίνεται από τον τύπο $f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ όπου t ο χρόνος σε sec και $t \in [0,180]$. Να βρεθούν

α) Το μέγιστο και το ελάχιστο ύψος της στάθμης του νερού κατά τη δημιουργία της κύμανσης

β) Ποια χρονική στιγμή έχουμε την μέγιστη στάθμη;

γ) Ποιο το ύψος του κύματος την χρονική στιγμή $t = 13$ sec;

δ) Κάθε πόσο χρονικό διάστημα επαναλαμβάνεται η ίδια κύμανση;

ΛΥΣΗ

α) $-1 \le \eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right) \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right) \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right) \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \le f(t) \le 1$

β) Για να έχουμε μέγιστη στάθμη πρέπει να ισχύει:

$$1 = f(t) \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right) \Leftrightarrow 1 = \eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right) \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{t}{6} = 2\kappa + \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = 12\kappa + 3, \kappa \in Z$$

και επειδή $t \in [0,180]$ έχουμε

$$0 \le 12\kappa + 3 \le 180 \Leftrightarrow -3 \le 12\kappa \le 177 \Leftrightarrow -\frac{3}{12} \le \kappa \le \frac{177}{12} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le \kappa \le 14,75$$

Άρα κ = 0, 1, 2, 3,…, 14 οπότε t = 3sec, ή 15sec ή …ή t =171sec

γ) $f(13) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\eta\mu\left(\frac{\pi 13}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\eta\mu\left(\frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}cm \text{ ή } 75cm$$

δ) Η περίοδος της συνάρτησης είναι $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=\frac{12\pi}{\pi}=12$, συνεπώς κάθε $12\sec$ επαναλαμβάνεται η ίδια κύμανση.

Π.χ. Την χρονική στιγμή $t=1$ η κύμανση είναι $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}m$

Την χρονική στιγμή $t=1+12=13\sec$ είναι πάλι $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\eta\mu\frac{13\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}m$

1.5 Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^2\chi-\eta\mu^2\chi=0$, $\chi\in[0,\pi]$

ΛΥΣΗ

Α' τρόπος

$\sigma\upsilon\nu^2\chi-\eta\mu^2\chi=0\Leftrightarrow(\sigma\upsilon\nu\chi-\eta\mu\chi)(\sigma\upsilon\nu\chi+\eta\mu\chi)=0\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\chi-\eta\mu\chi=0$ ή $\sigma\upsilon\nu\chi+\eta\mu\chi=0\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\chi=\eta\mu\chi$ ή $\sigma\upsilon\nu\chi=-\eta\mu\chi\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\chi=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right)$ ή $\sigma\upsilon\nu\chi=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\chi\right)\Leftrightarrow$

$\chi=2\kappa\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right)$, $\kappa\in Z$ ή $\chi=2\lambda\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}+\chi\right)$, $\lambda\in Z\Leftrightarrow$

$\chi=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-\chi$ ή $\chi=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}+\chi$, $\kappa\in Z$ ή $\chi=2\lambda\pi+\frac{\pi}{2}+\chi$ ή $\chi=2\lambda\pi-\frac{\pi}{2}-\chi$, $\lambda\in Z$

$\Leftrightarrow 2\chi=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ ή $\frac{\pi}{2}=2\kappa\pi$, $\kappa\in Z$ ή $2\lambda\pi=-\frac{\pi}{2}$ ή $2\chi=2\lambda\pi-\frac{\pi}{2}$, $\lambda\in Z$

$\Leftrightarrow \chi=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$, $\kappa\in Z$ ή $\kappa=-\frac{1}{4}$ αδύνατο ή $\lambda=-\frac{1}{4}$ αδύνατο ή $\chi=\lambda\pi-\frac{\pi}{4}$, $\lambda\in Z$

Άρα οι λύσεις είναι $\chi=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$, $\kappa\in Z$ ή $\chi=\lambda\pi-\frac{\pi}{4}$, $\lambda\in Z$

Όμως επειδή $\chi\in[0,\pi]$ έχουμε $0\le\chi\le\pi\Leftrightarrow 0\le\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\le\pi\Leftrightarrow 0\le\kappa+\frac{1}{4}\le 1\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\le\kappa\le\frac{3}{4}$

Άρα $\kappa=0$ αφού $\kappa\in Z$ οπότε $\chi=\frac{\pi}{4}$

Όμοια $0\le\chi\le\pi\Leftrightarrow 0\le\lambda\pi-\frac{\pi}{4}\le\pi\Leftrightarrow 0\le\lambda-\frac{1}{4}\le 1\Leftrightarrow\frac{1}{4}\le\lambda\le\frac{5}{4}$. Άρα $\lambda=1$ $\lambda\in Z$ οπότε $\chi=\frac{3\pi}{4}$

Οι ζητούμενες λύσεις $\chi=\frac{\pi}{4}$ και $\chi=\frac{3\pi}{4}$

Β' τρόπος

$\sigma\upsilon\nu^2\chi - \eta\mu^2\chi = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\chi - \left(1 - \sigma\upsilon\nu^2\chi\right) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\chi - 1 + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 0 \Leftrightarrow$

$2\sigma\upsilon\nu^2\chi - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\chi = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ή $\sigma\upsilon\nu\chi = -\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και επειδή $\chi \in [0, \pi]$

Οι ζητούμενες λύσεις είναι $\chi = \frac{\pi}{4}$ και $\chi = \frac{3\pi}{4}$

1.6 Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\phi^2\chi - \varepsilon\phi\chi - \sqrt{3}\varepsilon\phi\chi + \sqrt{3} = 0$

ΛΥΣΗ

$\varepsilon\phi^2\chi - (1+\sqrt{3})\varepsilon\phi\chi + \sqrt{3} = 0$

Θέτουμε $\varepsilon\phi\chi = \omega$ και έχω $\omega^2 - \left(1+\sqrt{3}\right)\omega + \sqrt{3} = 0$

$\Delta = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2$ οπότε $\omega_1 = \sqrt{3}$ και $\omega_2 = 1$

Έτσι έχουμε

$$\varepsilon\phi\chi = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi\chi = \varepsilon\phi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in Z$$

$$\varepsilon\phi\chi = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi\chi = \varepsilon\phi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}, \lambda \in Z$$

1.7 Να λύσετε την εξίσωση $3\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi - 5\sigma\upsilon\nu\chi = 0$, $\chi \in \left(-\pi, \pi\right)$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση γράφεται $\quad 3(1 - \sigma\upsilon\nu^2\chi) - \sigma\upsilon\nu^2\chi - 5\sigma\upsilon\nu\chi = 0$

$\Leftrightarrow 3 - 3\sigma\upsilon\nu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi - 5\sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Leftrightarrow -2\sigma\upsilon\nu^2\chi - 5\sigma\upsilon\nu\chi + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\chi + 5\sigma\upsilon\nu\chi - 3 = 0$

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu\chi = \omega$ και παίρνουμε $2\omega^2 + 5\omega - 3 = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = -3$ και $\omega_2 = \frac{1}{2}$

Έτσι έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\chi = -3 \text{ αδύνατη γιατί } -1 \le \sigma\upsilon\nu\chi \le 1, \text{ για κάθε } \chi \in \Re$$

$$\text{και } \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in Z$$

Συνεπώς από $\chi \in \left(-\pi, \pi\right) \Leftrightarrow -\pi < \chi < \pi \Leftrightarrow -\pi < 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow -1 < 2\kappa + \frac{1}{3} < 1$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{3} < 2\kappa < \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < \kappa < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \kappa = 0 \text{ αφού } \kappa \in Z \text{ άρα } \chi = \frac{\pi}{3}$$

Συνεπώς από $\chi \in \left(-\pi, \pi\right) \Leftrightarrow -\pi < \chi < \pi \Leftrightarrow -\pi < 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow -1 < 2\kappa - \frac{1}{3} < 1$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} < 2\kappa < \frac{4}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < \kappa < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \kappa = 0 \text{ αφού } \kappa \in Z \text{ άρα } \chi = -\frac{\pi}{3}$$

1.8 Να λύσετε την εξίσωση $1-\sigma\upsilon\nu\chi=\eta\mu\chi \;\; , \;\; \chi\in(0,2\pi]$

ΛΥΣΗ

Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο και έχουμε

$1+\sigma\upsilon\nu^2\chi-2\sigma\upsilon\nu\chi=\eta\mu^2\chi$

$\Leftrightarrow 1+\sigma\upsilon\nu^2\chi-2\sigma\upsilon\nu\chi=1-\sigma\upsilon\nu^2\chi$

$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\chi-2\sigma\upsilon\nu\chi=0$

$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu\chi(\sigma\upsilon\nu\chi-1)=0$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi=0$ ή $\sigma\upsilon\nu\chi=1$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu\chi=\sigma\upsilon\nu 0$

$\Leftrightarrow \chi=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}, \kappa\in Z$ ή $\chi=2\lambda\pi,\ \lambda\in Z$

Επειδή $\chi\in(0,2\pi]$ έχουμε $0<\chi\le 2\pi \Leftrightarrow 0<2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\le 2\pi \Leftrightarrow 0<2\kappa+\frac{1}{2}\le 2 \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{2}<2\kappa\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<\kappa\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow \kappa=0$ άρα $x=\frac{\pi}{2}$

Όμοια έχουμε $0<\chi\le 2\pi \Leftrightarrow 0<2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\le 2\pi \Leftrightarrow 0<2\kappa-\frac{1}{2}\le 2 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}<2\kappa\le\frac{5}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{4}<\kappa\le\frac{5}{4}\Leftrightarrow \kappa=1$ άρα $\chi=2\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$

Για $\chi=2\lambda\pi$ από $0<\chi\le 2\pi\Leftrightarrow 0<2\lambda\pi\le 2\pi\Leftrightarrow 0<2\lambda\le 2\Leftrightarrow 0<\lambda\le 1\Leftrightarrow \lambda=1$ οπότε $\chi=2\pi$

Επειδή υψώσαμε στο τετράγωνο μπορεί να έχουμε παραπάνω λύση γι' αυτό κάνουμε επαλήθευση

$1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=\eta\mu\frac{\pi}{2}$ ή $1-0=1$ ισχύει και

$1-\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}=\eta\mu\frac{3\pi}{2}$ ή $1-0=-1$ ή $1=-1$ που δέν ισχύει

άρα η λύση $\chi=\frac{3\pi}{2}$ απορίπτεται

Και $1-\sigma\upsilon\nu 2\pi=\eta\mu 2\pi$ ή $1-1=0$ ισχύει

1.9 Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu^2\chi-2\eta\mu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi-3\sigma\upsilon\nu^2\chi=0$

ΛΥΣΗ

α' τρόπος

Αποκλείεται να είναι $\sigma\upsilon\nu\chi=0$ διότι τότε από την εξίσωση θα είχαμε $\eta\mu^2\chi=0\Leftrightarrow\eta\mu\chi=0$ άτοπο να είναι $\sigma\upsilon\nu\chi=0$ και $\eta\mu\chi=0$

Γι' αυτό μπορούμε και να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το $\sigma\upsilon\nu^2\chi$ και παίρνουμε

$\varepsilon\phi^2\chi-2\varepsilon\phi\chi-3=0$ οπότε θέτοντας $\varepsilon\phi\chi=\omega$ παίρνουμε

$\omega^2-2\omega-3=0 \Leftrightarrow \omega_1=3$ και $\omega_2=-1$ οπότε $\varepsilon\varphi\chi=3 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\chi=\varepsilon\varphi\phi$,
(όπου φ τόξο για το οποίο $\varepsilon\varphi\phi=3$ μπορούμε να το βρούμε σε πίνακες).

Έτσι $\varepsilon\varphi\chi=\varepsilon\varphi\phi \Leftrightarrow \chi=\kappa\pi+\phi,\quad \kappa\in Z$ και $\varepsilon\varphi\chi=-1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\chi=\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \chi=\kappa\pi+\frac{3\pi}{4},\ \kappa\in Z$

β' τρόπος

$\eta\mu^2\chi-2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi-3\sigma\upsilon\nu^2\chi=0 \Leftrightarrow$

$\eta\mu^2\chi-2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi-4\sigma\upsilon\nu^2\chi=0$

$(\eta\mu\chi-\sigma\upsilon\nu\chi)^2-(2\sigma\upsilon\nu\chi)^2=0 \Leftrightarrow (\eta\mu\chi-\sigma\upsilon\nu\chi-2\sigma\upsilon\nu\chi)(\eta\mu\chi-\sigma\upsilon\nu\chi+2\sigma\upsilon\nu\chi)=0 \Leftrightarrow$ και κατόπιν

$\eta\mu\chi=3\sigma\upsilon\nu\chi$ ή $\eta\mu\chi=-\sigma\upsilon\nu\chi \Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi\chi=3$ ή $\varepsilon\varphi\chi=-1$

όπως προηγουμένως

1.10 1)Για ποιες τιμές του $\chi\in\left(-2\pi,\frac{\pi}{2}\right]$ η συνάρτηση $f(\chi)=2-3\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της; 2) Ποια η περίοδος της συνάρτησης; 3) Ποια η μέγιστη τιμή της; 4) Για ποιες τιμές του χ η γραφική παράσταση τέμνει την ευθεία $y=\frac{1}{2}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

1)Είναι $-1\le\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}\le1 \Leftrightarrow 3\ge-3\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}\ge-3 \Leftrightarrow 5\ge2-3\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}\ge-1 \Leftrightarrow -1\le f(\chi)\le5$

οπότε $y=-1$ η ελάχιστη τιμή της

Για $y=-1 \Leftrightarrow 2-3\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}=-1 \Leftrightarrow 3=3\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}=\sigma\upsilon\nu0 \Leftrightarrow$

$\frac{\chi}{2}=2\kappa\pi \Leftrightarrow \chi=4\kappa\pi,\quad \kappa\in Z$

Επειδή $\chi\in\left(-2\pi,\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow -2\pi<4\kappa\pi\le\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -2<4\kappa\le\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<\kappa\le\frac{1}{8} \Leftrightarrow \kappa=0$

Αφού $\kappa\in Z$ για $\chi=0$ έχουμε την ελάχιστη τιμή.

2) Η περίοδος της f είναι $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

3) Από την σχέση $-1\le f(\chi)\le5$ που κατασκευάσαμε στο 1ο ερώτημα προκύπτει ότι $y=5$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης

4) Πρέπει

$$y=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2-3\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{3}{2}=3\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\chi}{2}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{\chi}{2}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3},\ \kappa\in Z$$

άρα $\chi=4\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}$ ή $\chi=4\kappa\pi-\frac{2\pi}{3}$, $\kappa\in Z$

Σχόλιο: αν η έναρξη του 1ου ερωτήματος ήταν πριν τη λέξη ‘παίρνει’ τότε ο περιορισμός $\chi\in\left(-2\pi,\frac{\pi}{2}\right]$ θα ήταν για όλα τα ερωτήματα

1.11 Βρείτε το σύνολο ορισμού των συναρτήσεων

1) $f(\chi)=\frac{3}{2\sigma\upsilon\nu\chi+1}$ και 2) $g(\chi)=\sqrt{2\eta\mu\chi-1}$

ΛΥΣΗ

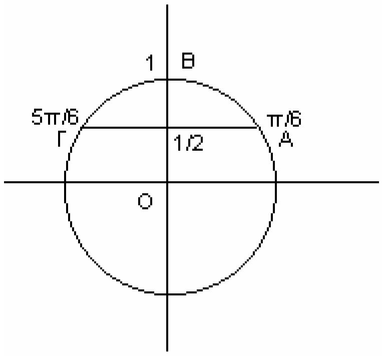
1)Πρέπει $2\sigma\upsilon\nu\chi+1\neq 0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi\neq-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi\neq\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow \chi\neq 2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3},\ \kappa\in Z$ Άρα το σύνολο ορισμού της f είναι $A=\left\{\chi\in\Re \text{ με } \chi\neq 2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3},\ \kappa\in Z\right\}$

2) Πρέπει $2\eta\mu\chi-1\geq 0\Leftrightarrow \eta\mu\chi\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu\chi\geq\eta\mu\frac{\pi}{6}$

Η λύση της ανίσωσης είναι το τόξο ΑΒΓ . Δηλαδή

$$\frac{\pi}{6}\leq\chi\leq\frac{5\pi}{6} \quad \text{ή}$$

$$2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\leq\chi\leq 2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6},\ \kappa\in Z$$



Τα σημεία αυτού του τόξου

$$A=\left[2\kappa\pi+\frac{\pi}{6},\ 2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\right],\kappa\in Z$$

1.12 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi)=2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi+\eta\mu\chi-2\sigma\upsilon\nu\chi-1$ και $g(\chi)=2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi+\eta\mu\chi$. Να βρείτε

1) Τα σημεία στα οποία τέμνουν τους άξονες χ΄χ και y΄y οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
2) Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων
3) Για ποιες τιμές του χ η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από την γραφική παράσταση της g

ΛΥΣΗ

1) Για $\chi=0$ έχουμε $f(0)=2\eta\mu 0\sigma\upsilon\nu 0+\eta\mu 0-2\sigma\upsilon\nu 0-1\Rightarrow f(0)=-2-1=-3$

Άρα η γραφική παράσταση της $f(\chi)$ τέμνει τον y΄y στο σημείο $B(0,-3)$

Όμοια για $\chi = 0$ έχουμε $g(0) = 2\eta\mu 0 \sigma\upsilon\nu 0 + \eta\mu 0 = 0$

Άρα η γραφική παράσταση της $g(\chi)$ τέμνει τον y΄y στο σημείο $A(0,0)$

Για $y = 0$ έχουμε

$$0 = 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi - 2\sigma\upsilon\nu\chi - 1 \Leftrightarrow 0 = 2\sigma\upsilon\nu\chi(\eta\mu\chi - 1) + \eta\mu\chi - 1 \Leftrightarrow 0 = (\eta\mu\chi - 1)(2\sigma\upsilon\nu\chi + 1) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\chi - 1 = 0 \quad ή \quad 2\sigma\upsilon\nu\chi + 1 = 0$$

$$\eta\mu\chi = 1 \quad ή \quad \sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{1}{2}$$

$$\eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{2} \quad ή \quad \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$$

$$\chi = 2\kappa_1\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa_1 \in Z \quad ή \quad \chi = 2\kappa_2\pi + \pi - \frac{\pi}{2},\ \kappa_2 \in Z \quad ή$$

$$\chi = 2\kappa_3\pi + \frac{2\pi}{3},\ \kappa_3 \in Z \quad ή \quad \chi = 2\kappa_4\pi - \frac{2\pi}{3},\ \kappa_4 \in Z$$

Παρατηρούμε ότι ο χ΄χ τέμνεται από την γραφική παράσταση της f σε άπειρα σημεία.

Όμοια για $y = 0$ έχουμε

$$0 = 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi \Leftrightarrow 0 = \eta\mu\chi(2\sigma\upsilon\nu\chi + 1) \Leftrightarrow \eta\mu\chi = 0 \quad ή \quad 2\sigma\upsilon\nu\chi + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\chi = \eta\mu 0 \quad ή \quad \sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \quad \chi = 2\kappa_1\pi,\ \ \kappa_1 \in Z \quad ή\ \chi = 2\kappa_2\pi + \pi,\ \ \kappa_2 \in Z\ ή$$

$$\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\chi = 2\kappa_1\pi,\ \ \kappa_1 \in Z\ ή\ \chi = 2\kappa_2\pi\ ή\ \chi = 2\kappa_3\pi + \frac{2\pi}{3},\ \ \kappa_2 \in Z \quad ή \quad \chi = 2\kappa_3\pi - \frac{2\pi}{3},\ \ \kappa_3 \in Z$$

2) Πρέπει

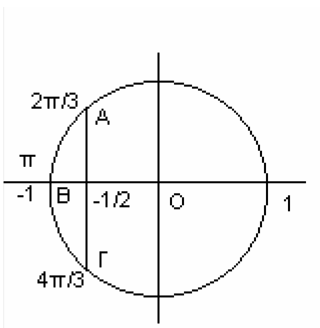
$$f(\chi) = g(\chi) \Leftrightarrow 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi - 2\sigma\upsilon\nu\chi - 1 = 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi \Leftrightarrow$$

$$-2\sigma\upsilon\nu\chi - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad \kappa \in Z$$

3) Πρέπει

$$f(\chi) > g(\chi) \Leftrightarrow 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi - 2\sigma\upsilon\nu\chi - 1 > 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi \Leftrightarrow$$

$$-2\sigma\upsilon\nu\chi - 1 > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi < \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$$



Η λύση αυτής της ανίσωσης είναι τα σημεία του τόξου ΑΒΓ. Δηλαδή

$$\frac{2\pi}{3} \le \chi \le \frac{4\pi}{3} \quad ή \quad 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \le \chi \le \frac{4\pi}{3} + 2\kappa\pi, \quad \kappa \in Z$$

που είναι οι ζητούμενες τιμές του χ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από την γραφική παράσταση της g

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Η γραφική παράσταση μια περιοδικής συνάρτησης f με περίοδο 401 διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Επομένως $f(2005)=0$. **Σ** ή **Λ**

2. Η περίοδος της συνάρτησης $f(\chi)=3\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}$ είναι

Α. 3π **Β.** $\frac{\pi}{2}$ **Γ.** 4π **Δ.** 6π

3. Για κάθε $\chi\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι η συνάρτηση $\sigma\upsilon\nu\chi>\eta\mu\chi$ **Σ** ή **Λ**

4. Η συνάρτηση $f(\chi)=2-3\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{5}$ έχει ελάχιστη τιμή

Α. -1 **Β.** 5 **Γ.** 2 **Δ.** –3

5. Αν $A=\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right]$ ώστε $\phi,\omega\in A$ με $\phi<\omega$ τότε $\eta\mu\phi<\eta\mu\omega$ **Σ** ή **Λ**

6. Αν $f(\chi)=1-2\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{3}$ τότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι

Α. $[-2\ ,\ 1]$ **Β.** $[1\ ,\ 3]$ **Γ.** $[-2\ ,\ 3]$ **Δ.** $[-1\ ,\ 3]$

7. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα τότε $f\left(\frac{\pi}{11}\right)<f\left(\frac{3\pi}{29}\right)$ **Σ ή Λ**

8. Η περίοδος της συνάρτησης $f(\chi)=\eta\mu\frac{\chi}{5}+\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{3}$ είναι

Α. 5π **Β.** 3π **Γ.** 15π **Δ.** 30π

9. Η συνάρτηση $f(\chi)=\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{6}\right)-\eta\mu\left(\chi-\frac{\pi}{6}\right)$ είναι περιττή **Σ ή Λ**

10. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi)=1-3\alpha\sigma\upsilon\nu5\chi$ διέρχεται από το σημείο $A(\pi,0)$ τότε η τιμή του α είναι

Α. $\frac{1}{3}$ **Β.** $\frac{2}{3}$ **Γ.** $-\frac{1}{3}$ **Δ.** 0

11. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε συνάρτηση της στήλης **Α** την μέγιστη τιμή από την στήλη **Β** και την ελάχιστη από την στήλη **Γ**

	ΣΤΗΛΗ Α	**ΣΤΗΛΗ Β**	**ΣΤΗΛΗ Γ**
Α	$f(\chi)=2\eta\mu\frac{\chi}{3}$	**i)** **2**	**α)** **4**
Β	$g(\chi)=3-\sigma\upsilon\nu\chi$	**ii)** **-1**	**β)** **5**
Γ	$h(\chi)=2-3\eta\mu\chi$	**iii)** **2**	**γ)** **-2**
Δ	$\phi(\chi)=3\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}$	**iv)** **-3**	**δ)** **3**

12. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε συνάρτηση της στήλης Α με την περίοδο της από την στήλη Β

	ΣΤΗΛΗ Α	**ΣΤΗΛΗ Β**
Α	$f(\chi)=3\eta\mu\frac{\chi}{2}$	**12π**
Β	$g(\chi)=2-5\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{3}$	**6π**
Γ	$h(\chi)=\eta\mu\frac{\chi}{3}+\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}$	**4π**
Δ	$\phi(\chi)=\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi$	**2π**
		π
		3π

13. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε συνάρτηση της στήλης Α με το σημείο από **το** οποίο διέρχεται που είναι στην στήλη Β

	ΣΤΗΛΗ Α	**ΣΤΗΛΗ Β**
Α	$f(\chi)=-2+5\eta\mu\frac{\chi}{3}$	$\text{Α}(2005\pi\ ,\ -3)$
Β	$g(\chi)=\eta\mu\frac{\chi}{2}-\sigma\upsilon\nu\chi$	$\text{Β}\left(\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)$
Γ	$h(\chi)=2\sigma\upsilon\nu\chi-1$	$\Gamma\left(\frac{\pi}{3}\ ,\ 0\right)$
Δ	$\phi(\chi)=2\eta\mu\chi-\varepsilon\phi\chi$	$\Delta\left(\frac{\pi}{4}\ ,\ 0\right)$

14. Οι συναρτήσεις που γράφονται στη στήλη Α διέρχονται από το σημείο $\text{Α}\left(\frac{\pi}{3}\ ,\ 0\right)$. Να αντιστοιχίσετε την τιμή του λ από την στήλη Β που προκύπτει για κάθε συνάρτηση

	ΣΤΗΛΗ Α	**ΣΤΗΛΗ Β**
Α	$f(\chi)=\lambda-2\sigma\upsilon\nu\chi+1$	$\sqrt{3}$
Β	$g(\chi)=2\lambda-1+\eta\mu\frac{\chi}{2}$	$\frac{1}{4}$
Γ	$h(\chi)=(\lambda-3)\varepsilon\phi\chi$	3
		0

15. Η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi)=(1-\kappa)\sigma\upsilon\nu\frac{\lambda\chi}{2}$ και $|\kappa|<1$ έχει περίοδο π και ελάχιστη τιμή $y=2$. Να βρείτε

1) Την συνάρτηση f

2) Την μέγιστη τιμή της f

3) Να λύσετε την εξίσωση $f(\chi)=1 \quad \chi\in(-\pi\ ,\ 3\pi)$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\kappa+3\lambda\sigma\upsilon\nu(\omega\chi)$ με $\lambda<0$ και $\omega>0$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει μέγιστη τιμή $y=2$ και περίοδο $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{3}$. Να βρείτε

1) Τα κ, λ, ω
2) Την συνάρτηση f
3) Την ελάχιστη τιμή της f
4) Να λύσετε την εξίσωση $2f(\chi)-3=0$

17. Η θερμοκρασία μιας πόλης κατά την διάρκεια ενός εικοσιτετραώρου περιγράφεται από την συνάρτηση $f(t)=17+5\eta\mu\frac{\pi t}{6}$

1) Ποια είναι η ελάχιστη και η μέγιστη θερμοκρασία κατά την διάρκεια του 24-ώρου στην πόλη αυτή;
2) Ποιες ώρες είχαμε μέγιστη θερμοκρασία και ποιες ελάχιστη;
3) Ποια ώρα η θερμοκρασία ήταν 17°

18. Το τρενάκι ενός παιχνιδότοπου διαγράφει πορεία της ημιτονοειδούς συνάρτησης $f(t)=2-3\eta\mu(3\pi t)$ από την αφετερία Α μέχρι τον τερματισμό Τα σε 4 λεπτά. Να βρείτε

1) Πριν ξεκινήσει σε ποιο ύψος πάνω από το έδαφος βρίσκεται;
2) Το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει από το έδαφος καθώς και το ελάχιστο
3) Ποιες χρονικές στιγμές βρίσκεται στο ελάχιστο ύψος από το έδαφος;
4) Πόσος χρόνος μεσολαβεί για να βρεθεί από το υψηλότερο σημείο στο χαμηλότερο; Από το ψηλότερο και πάλι στο ψηλότερο;

19. Η μηνιαία κατανάλωση ρεύματος μιας βιομηχανίας δίνεται από τον τύπο $f(t)=60+20\eta\mu\frac{\pi t}{3}$ KWh όπου t ο χρόνος σε μήνες $t=1,2,3,\ldots,12$ που αντιστοιχεί στους 12 μήνες του έτους. Αξία KWh=0,5 ευρώ. Να βρείτε

1) Ποιους μήνες είχε την μεγαλύτερη κατανάλωση;
2) Ποιους μήνες είχε την μικρότερη κατανάλωση;
3) Ποιο το κόστος κατανάλωσης τον Αύγουστο;
4) Ποιο είναι το ετήσιο κόστος κατανάλωσης ηλεκτρικού της βιομηχανίας;

20. Να βρείτε το σύνολο ορισμού των συναρτήσεων

1) $f(\chi)=\sqrt{2\sigma\upsilon\nu\chi+1}$ 2) $f(\chi)=\frac{1}{\varepsilon\phi\chi-1}$

21. Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^2\chi-5\sigma\upsilon\nu\chi+6=0$ είναι αδύνατη **Σ ή Λ**

22. Αν για την γωνία A τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\eta\mu\mathrm{A}=\frac{1}{2}$ τότε $\mathrm{A}=30^{\circ}$ **Σ ή Λ**

23. Αν $\eta\mu\chi=\sigma\upsilon\nu\chi$ τότε $\chi=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathrm{Z}$ **Σ ή Λ**

24. Αν $\eta\mu\chi = \sigma\upsilon\nu\chi$ τότε $\chi = \kappa\frac{\pi}{2},\ \ \kappa \in Z$ **Σ ή Λ**

25. Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις της στήλης **Α** με την ρίζα τους στη στήλη **Β** με $\chi \in \left[\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi\right]$

	ΣΤΗΛΗ Α	**ΣΤΗΛΗ Β**
Α	$2\sigma\upsilon\nu\chi + 1 = 0$	$\frac{3\pi}{4}$
Β	$\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = 0$	$\frac{5\pi}{6}$
Γ	$\varepsilon\varphi\chi + \sigma\varphi\chi = 0$	π
Δ	$\eta\mu\chi - 1 = 0$	$\frac{2\pi}{3}$
		$\frac{\pi}{2}$

26. Να λύσετε την εξίσωση $3\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi - 5\sigma\upsilon\nu\chi = 0$

27. Ομοίως την εξίσωση $\varepsilon\varphi\left(2\chi - \frac{\pi}{3}\right) + \sigma\varphi\left(\chi - \frac{\pi}{6}\right) = 0,\ \ \chi \in [0\ ,\ 2\pi]$

28. Ομοίως την εξίσωση $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = 1,\ \ \chi \in (0\ ,\ 2\pi]$

29. Ομοίως την εξίσωση $\frac{2\sigma\upsilon\nu\chi}{1 + \sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{2}{3}$

30. Ομοίως την εξίσωση $\left(\sqrt{3}+1\right)\eta\mu^2\chi - 2\sqrt{3}\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \left(\sqrt{3}-1\right)\sigma\upsilon\nu^2\chi = 0$

31. Ομοίως την εξίσωση $3\eta\mu 5\chi - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu 5\chi = 0$

32. Ομοίως την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^2\chi + |\sigma\upsilon\nu\chi| - 1 = 0$

33. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu\chi\left(1 + \sigma\varphi^2\chi\right) - \sigma\varphi\chi = \eta\mu\chi$

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = 2005 + 2\eta\mu\frac{\chi}{2}$. Να λύσετε την εξίσωση $f(2\chi) = f\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right)$

35. Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\varphi^2\chi - \varepsilon\varphi 1^\circ \cdot \varepsilon\varphi 2^\circ \cdot \varepsilon\varphi 3^\circ ... \varepsilon\varphi 89^\circ = 1$

36. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu\chi = \rho_1 + \rho_2 + \rho_1\rho_2$ όπου ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\chi^2 - \left(1+\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)\chi + (1-\sigma\upsilon\nu\theta)\sigma\upsilon\nu\theta = 0$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΑΒΓ

1. $\eta\mu(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\eta\mu\Gamma$, $\quad \eta\mu(\mathrm{B}+\Gamma)=\eta\mu\mathrm{A}$, $\quad \eta\mu(\mathrm{A}+\Gamma)=\eta\mu\mathrm{B}$
2. $\sigma\upsilon\nu(\mathrm{A}+\mathrm{B})=-\sigma\upsilon\nu\Gamma$, $\sigma\upsilon\nu(\mathrm{B}+\Gamma)=-\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}$, $\sigma\upsilon\nu(\mathrm{A}+\Gamma)=-\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}$
3. $\eta\mu\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$, $\eta\mu\frac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{2}$, $\eta\mu\frac{\mathrm{A}+\Gamma}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{B}}{2}$
4. $\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}=\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}=\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}+\Gamma}{2}=\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{2}$

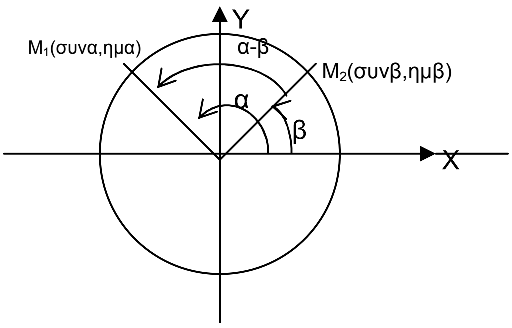
ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

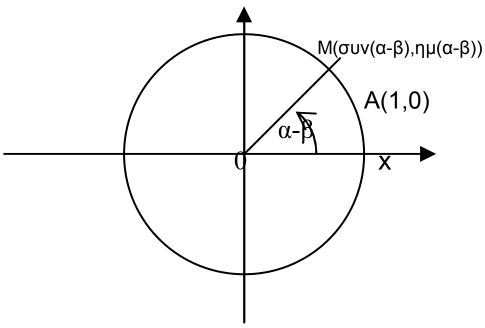
1. Από $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma=\pi$ ή $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\pi-\Gamma$ ή
$$\eta\mu(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\eta\mu(\pi-\Gamma) \text{ ή } \eta\mu(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\eta\mu\Gamma$$
2. Ίδια με την (1)
3. Από $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma=\pi$ ή $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\pi-\Gamma$ ή $\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\Gamma}{2}$ ή
$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\Gamma}{2}\right) \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}=\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$$
4. Ίδια με την (3)

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΤΟΞΩΝ

Συνημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Έστω δύο γωνίες α, β των οποίων οι τελικές πλευρές τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο στα σημεία M_1, M_2 αντιστοίχως. (σχ.1)
Έστω επιπλέον και η γωνία α-β που η τελική της πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο M (σχ.2)





Όπως είναι γνωστό, τα σημεία M_1, M_2, A, και M έχουν συντεταγμένες :

Το M_1: τετμημένη	$συνα$	και	τεταγμένη	$ημα$
Το M_2: τετμημένη	$συνβ$	και	τεταγμένη	$ημβ$
Το A : τετμημένη	1	και	τεταγμένη	0
Το M: τετμημένη	$συν(α-β)$	και	τεταγμένη	$ημ(α-β)$

Επειδή $M_2\hat{O}M_1 = A\hat{O}M = α-β$ θα είναι $(M_1M_2)=(AM)$
Άρα $(M_2M_1)^2=(AM)^2$
Ο τύπος που δίνει την απόσταση των σημείων $P_1(χ_1,y_1)$ και $P_2(χ_2,y_2)$
Είναι $(P_1P_2)=\sqrt{(χ_2-χ_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ συνεπώς έχουμε :

- $(M_2M_1)^2=(συνα-συνβ)^2+(ημα-ημβ)^2$
  $$=συν^2α+συν^2β-2συνασυνβ+ημ^2α+ημ^2β-2ημαημβ$$
  $=2-2(συνασυνβ+ημαημβ)$ και
- $(AM)^2=[συν(α-β)-1]^2+[ημ(α-β)-0]^2$
  $$συν^2(α-β)+1-2συν(α-β)+ημ^2(α-β)=2-2συν(α-β)$$

Έτσι η σχέση : $(M_2M_1)^2=(AM)^2$ γράφεται
$$2-2(συνασυβ+ημαημβ)=2-2συν(α-β)$$ ή
$$συνασυνβ+ημαημβ=συν(α-β)$$
Επομένως
$$\boxed{συν(α-β)=συνασυνβ+ημαημβ}$$
Η ισότητα αυτή, που αποδείξαμε για τις γωνίες α, β με $0 \le β < α < 360^\circ$, ισχύει και για οποιεσδήποτε γωνίες α, β.
Αν στην παραπάνω ισότητα αντικαταστήσουμε το β με το –β έχουμε :
$$συν(α-(-β))=συνασυν(-β)+ημαημ(-β)=συνασυνβ-ημαημβ$$
Επομένως
$$\boxed{συν(α+β)=συνασυνβ-ημαημβ}$$

Ημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Είναι $\eta\mu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)$

$$=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\eta\mu\beta=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$$

Επομένως

$$\boxed{\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}$$

Αν στην παραπάνω ισότητα αντικαταστήσουμε το β με το –β έχουμε :

Επομένως

$$\boxed{\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}$$

Εφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Με την προϋπόθεση ότι $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\neq 0,\quad \sigma\upsilon\nu\alpha\neq 0,\quad \sigma\upsilon\nu\beta\neq 0$ έχουμε:

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}=\frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}=$$

$$\frac{\dfrac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}+\dfrac{\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}-\dfrac{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$$

Επομένως

$$\boxed{\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}}$$

Αν στην παραπάνω ισότητα αντικαταστήσουμε το β με το –β έχουμε :

Επομένως

$$\boxed{\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}}$$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι :

$$\boxed{\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}}\qquad\boxed{\sigma\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\alpha-\sigma\varphi\beta}}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ

1. Κυκλώστε το **Σ** για τις σωστές από τις προτάσεις που ακολουθούν και **Λ** για τις λάθος

i. $\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta$ **Σ** ή **Λ**

ii. $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\alpha)=2\sigma\upsilon\nu\alpha$ **Σ** ή **Λ**

iii. $\eta\mu(\alpha+\alpha)=\eta\mu 2\alpha$ **Σ** ή **Λ**

iv. $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$ **Σ** ή **Λ**

v. $\varepsilon\phi\alpha+\varepsilon\phi\beta=\dfrac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}$ **Σ** ή **Λ**

2. Ομοίως

i. $\eta\mu 15^\circ=\eta\mu 45^\circ-\eta\mu 30^\circ$ **Σ** ή **Λ**

ii. $\varepsilon\phi 105^\circ=\varepsilon\phi(60^\circ+45^\circ)=\dfrac{\varepsilon\phi 60^\circ+\varepsilon\phi 45^\circ}{1-\varepsilon\phi 60^\circ\,\varepsilon\phi 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$ **Σ** ή **Λ**

iii. $\eta\mu(45^\circ+\alpha)=\sigma\upsilon\nu(45^\circ-\alpha)$ **Σ** ή **Λ**

iv. $\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{4\pi}{10}\right)=1$ **Σ** ή **Λ**

v. Για να ορίζεται η $\varepsilon\phi\chi$ πρέπει $\chi\neq\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \kappa\in Z$ **Σ** ή **Λ**

3. Ομοίως

i. $\eta\mu^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)+\eta\mu^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=1$ **Σ** ή **Λ**

ii. $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{6}+\chi\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{6}-\chi\right)-\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{6}+\chi\right)\cdot\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{6}-\chi\right)=\dfrac{1}{2}$ **Σ** ή **Λ**

iii. $\eta\mu(45^\circ+\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(45^\circ-\beta)+\sigma\upsilon\nu(45^\circ+\alpha)\cdot\eta\mu(45^\circ-\beta)=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$
Σ ή **Λ**

iv. $\sigma\upsilon\nu(15^\circ+\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(15^\circ-\alpha)+\sigma\upsilon\nu(75^\circ+\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(75^\circ-\alpha)=\sigma\upsilon\nu 2\alpha$
Σ ή **Λ**

v. $\varepsilon\phi(45^\circ+\chi)\cdot\sigma\phi(135^\circ+\chi)=1$ **Σ** ή **Λ**

4. Κυκλώστε την σωστή απάντηση σε κάθε μία από τις παρακάτω ερωτήσεις

i. $\varepsilon\phi(\alpha+\beta)\cdot\varepsilon\phi(\alpha-\beta)$ είναι ίση με

Α. $\varepsilon\phi(\alpha^2-\beta^2)$ **Β.** $\varepsilon\phi^2\alpha-\varepsilon\phi^2\beta$ **Γ.** $\dfrac{\varepsilon\phi^2\alpha-\varepsilon\phi^2\beta}{1-\varepsilon\phi^2\alpha\cdot\varepsilon\phi^2\beta}$ **Δ.** $\varepsilon\phi^2\alpha$

ii. $\varepsilon\phi(\alpha+\beta)\cdot\sigma\phi(\alpha-\beta)$ είναι ίση με

Α. $\eta\mu(\alpha-\beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$ **Β.** 1 **Γ.** $\dfrac{1}{2}$ **Δ.** $\sigma\phi(\alpha-\beta)^2$

iii. $\sigma\phi(\alpha-\beta)$ είναι ίση με

Α. $\dfrac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta+1}{\sigma\phi\beta-\sigma\phi\alpha}$ **Β.** $\dfrac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta+1}{\sigma\phi\alpha-\sigma\phi\beta}$ **Γ.** $\dfrac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta-1}{\sigma\phi\beta+\sigma\phi\alpha}$ **Δ.** $\dfrac{\sigma\phi\alpha-\sigma\phi\beta}{1+\sigma\phi\beta\sigma\phi\alpha}$

5. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε τύπο της στήλης I το ανάπτυγμα του από την στήλη II

ΣΤΗΛΗ I	ΣΤΗΛΗ II
$\eta\mu(\alpha+\beta)$	$\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$
$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$	$\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$
$\sigma\phi(\alpha+\beta)$	$\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$
$\eta\mu(\alpha-\beta)$	$\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$
$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$	$\dfrac{\varepsilon\phi\alpha+\varepsilon\phi\beta}{1-\varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta}$
$\varepsilon\phi(\alpha-\beta)$	$\dfrac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta+1}{\sigma\phi\beta-\sigma\phi\alpha}$
$\sigma\phi(\alpha-\beta)$	$\dfrac{\varepsilon\phi\alpha-\varepsilon\phi\beta}{1+\varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta}$
$\varepsilon\phi(\alpha+\beta)$	$\dfrac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta-1}{\sigma\phi\beta+\sigma\phi\alpha}$

6. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε παράσταση της στήλης I το αποτέλεσμα από την στήλη II

ΣΤΗΛΗ I	ΣΤΗΛΗ II
$\dfrac{\varepsilon\phi35^\circ+\varepsilon\phi10^\circ}{1-\varepsilon\phi35^\circ\cdot\varepsilon\phi10^\circ}$	$\dfrac{1}{2}$
$\eta\mu70^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu20^\circ+\sigma\upsilon\nu20^\circ\eta\mu70^\circ$	0
$\eta\mu40^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu50^\circ-\sigma\upsilon\nu40^\circ\eta\mu50^\circ$	1
$\sigma\upsilon\nu40^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu100^\circ+\eta\mu40^\circ\eta\mu100^\circ$	$-\dfrac{1}{2}$

7. Κυκλώστε την σωστή απάντηση: Η τιμή της παράστασης

$\mathrm{K}=\eta\mu(80-\chi)\sigma\upsilon\nu(70+\chi)+\eta\mu(10+\chi)\sigma\upsilon\nu(20-\chi)$ είναι

Α. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **Β.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **Γ.** $\dfrac{1}{2}$ **Δ.** $-\dfrac{1}{2}$

8. Απαντήστε αν είναι σωστή ή λάθος η ισότητα:

$$\varepsilon\phi97^\circ+\varepsilon\phi38^\circ=\varepsilon\phi97^\circ\cdot\varepsilon\phi38^\circ-1$$ **Σ** ή **Λ**

9. Ομοίως $\eta\mu85^\circ\sigma\upsilon\nu65^\circ+\eta\mu65^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu85^\circ=\eta\mu85^\circ\eta\mu35^\circ-\sigma\upsilon\nu85^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu35^\circ$

Σ ή **Λ**

10. Ομοίως $\dfrac{\varepsilon\phi30^\circ+\varepsilon\phi15^\circ}{1-\varepsilon\phi30^\circ\cdot\varepsilon\phi15^\circ}=\dfrac{\sigma\phi60^\circ\sigma\phi15^\circ-1}{\sigma\phi30^\circ-\sigma\phi15^\circ}$ **Σ** ή **Λ**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.13 Αν $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\beta = -\frac{15}{17}$ και $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των τόξων $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$

ΛΥΣΗ

Επειδή $\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$

$\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$

$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$

$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$

αρκεί να υπολογίσουμε το $\sigma\upsilon\nu\alpha$, $\eta\mu\beta$

Έχουμε λοιπόν: $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 - \eta\mu^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

οπότε $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{4}{5}$, αφού $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

και $\eta\mu^2\beta = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\beta = 1 - \frac{225}{289} = \frac{64}{289}$ οπότε $\eta\mu\beta = \frac{8}{17}$, αφού $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

Επομένως $\eta\mu(\alpha+\beta) = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{15}{17}\right) + \frac{8}{17}\cdot\frac{4}{5} = -\frac{13}{85}$

$$\eta\mu(\alpha-\beta) = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{15}{17}\right) - \frac{8}{17}\cdot\frac{4}{5} = -\frac{77}{85}$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{15}{17}\right) - \frac{3}{5}\cdot\frac{8}{17} = -\frac{84}{85}$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{15}{17}\right) + \frac{3}{5}\cdot\frac{8}{17} = -\frac{36}{85}$$

Άρα $\varepsilon\phi(\alpha+\beta) = \frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)} = \frac{13}{84}$, $\varepsilon\phi(\alpha-\beta) = \frac{\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)} = \frac{77}{36}$

$\sigma\phi(\alpha+\beta) = \frac{1}{\varepsilon\phi(\alpha+\beta)} = \frac{84}{13}$, $\sigma\phi(\alpha-\beta) = \frac{1}{\varepsilon\phi(\alpha-\beta)} = \frac{36}{77}$

1.14 Να αποδείξετε ότι :

i) $\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) + \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \frac{3}{4}$

ii) $\sigma\upsilon\nu^2 73^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 47^\circ + \sigma\upsilon\nu 73^\circ \sigma\upsilon\nu 47^\circ = \frac{3}{4}$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε: $\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=$

$$\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\frac{\pi}{3}\eta\mu\alpha\right)^2+\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\frac{\pi}{3}\eta\mu\alpha\right)^2+$$

$$+\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\frac{\pi}{3}\eta\mu\alpha\right)\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\frac{\pi}{3}\eta\mu\alpha\right)=$$

$$\left(\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\eta\mu\alpha\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\eta\mu\alpha\right)^2+\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\sigma\upsilon\nu\alpha\right)^2-\left(\eta\mu\frac{\pi}{3}\eta\mu\alpha\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\frac{3}{4}\eta\mu^2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+\frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\frac{3}{4}\eta\mu^2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+\frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\frac{3}{4}\eta\mu^2\alpha$$

$$=\frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\frac{3}{4}\eta\mu^2\alpha=\frac{3}{4}(\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha)=\frac{3}{4}\cdot 1=\frac{3}{4}$$

ii) Αν την ισότητα i) θέσουμε $\alpha=13^\circ$ έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu^2\left(60^\circ+13^\circ\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(60^\circ-13^\circ\right)+\sigma\upsilon\nu\left(60^\circ+13^\circ\right)\sigma\upsilon\nu\left(60^\circ-13^\circ\right)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 73^\circ+\sigma\upsilon\nu^2 47^\circ+\sigma\upsilon\nu 73^\circ\sigma\upsilon\nu 47^\circ=\frac{3}{4}$$

1.15 Να αποδείξετε ότι : $\frac{\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}+\frac{\eta\mu(\beta-\gamma)}{\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}+\frac{\eta\mu(\gamma-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha}=0$

ΛΥΣΗ

$$\frac{\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}+\frac{\eta\mu(\beta-\gamma)}{\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}+\frac{\eta\mu(\gamma-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha}=$$

$$\frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}+\frac{\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma-\sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu\gamma}{\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}+\frac{\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\gamma}{\sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\gamma(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta)+\sigma\upsilon\nu\alpha(\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma-\sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu\gamma)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}+$$

$$+\frac{\sigma\upsilon\nu\beta(\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\gamma)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}=$$

$$\frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma-\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\gamma+\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\gamma}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}+\frac{-\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}=0$$

1.16 Να αποδείξετε ότι :

i) $\sigma\upsilon\nu^2(\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu^2\beta-2\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta=\eta\mu^2\alpha$

ii) $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)+\eta\mu(\alpha+\beta)=(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta)$

iii) $\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu(\beta-\gamma)+\sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu(\gamma-\alpha)+\sigma\upsilon\nu\gamma\eta\mu(\alpha-\beta)=0$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu^2(\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu^2\beta-2\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta$$
$$=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)[\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta]+\sigma\upsilon\nu^2\beta$$
$$=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta-2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta)+\sigma\upsilon\nu^2\beta$$
$$=-\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta)+\sigma\upsilon\nu^2\beta$$
$$=-(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\eta\mu\beta)(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta)+\sigma\upsilon\nu^2\beta$$
$$=-\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta+\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\beta=\sigma\upsilon\nu^2\beta(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)+\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta$$
$$=\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta+\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta=\eta\mu^2\alpha(\eta\mu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\beta)=\eta\mu^2\alpha$$

ii) Είναι $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)+\eta\mu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta+\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$

$$=\sigma\upsilon\nu\alpha(\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta)+\eta\mu\alpha(\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta)=(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta)$$

iii) Έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu(\beta-\gamma)+\sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu(\gamma-\alpha)+\sigma\upsilon\nu\gamma\eta\mu(\alpha-\beta)=$$
$$\sigma\upsilon\nu\alpha(\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma-\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu\beta)+\sigma\upsilon\nu\beta(\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\gamma)+$$
$$+\sigma\upsilon\nu\gamma(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha)=$$
$$\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma-\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-$$
$$-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma+\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma-\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\gamma=0$$

1.17	Αποδείξτε ότι αν α, β, γ είναι οξείες γωνίες και $\varepsilon\varphi\alpha=\frac{1}{2},\quad \varepsilon\varphi\beta=\frac{1}{5},\quad \varepsilon\varphi\gamma=\frac{1}{8}$, τότε : $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$

ΛΥΣΗ

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)+\varepsilon\varphi\gamma}{1-\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)\varepsilon\varphi\gamma}=\frac{\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}+\varepsilon\varphi\gamma}{1-\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}\varepsilon\varphi\gamma}$$

$$=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma(1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta)}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta-(\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta)\varepsilon\varphi\gamma}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\gamma-\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{80}}{1-\frac{1}{10}-\frac{1}{16}-\frac{1}{40}}=\frac{\frac{65}{80}}{\frac{65}{80}}=1$$

Άρα $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta+\gamma)=1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi(\alpha+\beta+\gamma)=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}+\kappa\pi,\ \kappa\in Z$

Όμως είναι $0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2},\ 0<\gamma<\frac{\pi}{2}$

Οπότε $0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{2}$. Επομένως πρέπει $\kappa=0$ οπότε $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$

1.18

i) Να αποδείξτε ότι η παράσταση
$\mathrm{E} = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\beta)$
είναι ανεξάρτητη του α

ii) Αν $\varepsilon\varphi\beta = \frac{1}{5},\ \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ υπολογίστε την τιμή της παράστασης E

ΛΥΣΗ

i) $\mathrm{E} = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\beta)$

$= \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)[\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) - 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta]$

$= \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta - 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta)$

$= \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)(-\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta)$

$= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - (\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta)(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta)$

$= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - (\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta)$

$= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha(1 - \eta\mu^2\beta) + \eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta$

$= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha\eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta$

$= \eta\mu^2\beta(\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha) = \eta\mu^2\beta$

ii) Είναι : $\varepsilon\varphi^2\beta = \frac{\eta\mu^2\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} = \frac{\eta\mu^2\beta}{1-\eta\mu^2\beta}$

Άρα $\frac{\eta\mu^2\beta}{1-\eta\mu^2\beta} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 25\eta\mu^2\beta = 1 - \eta\mu^2\beta \Leftrightarrow 26\eta\mu^2\beta = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\beta = \frac{1}{26}$

Συνεπώς $\mathrm{E} = \eta\mu^2\beta = \frac{1}{26}$

1.19

Να δείξετε ότι αν $\eta\mu\chi + \eta\mu y = \frac{3}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

τότε $\sigma\upsilon\nu(\chi - y) = \frac{1}{2}$

ΛΥΣΗ

Είναι $\sigma\upsilon\nu(\chi - y) = \sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu y + \eta\mu\chi\eta\mu y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu y + 2\eta\mu\chi\eta\mu y = 1 \quad (1)$

Παρατηρούμε ότι η ύψωση στο τετράγωνο των δεδομένων θα μας δώσει το $2\eta\mu\chi\eta\mu y$ και το $2\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu y$ που υπάρχουν στα ζητούμενα Έτσι έχουμε: $\eta\mu^2\chi + \eta\mu^2 y + 2\eta\mu\chi\eta\mu y = \frac{9}{4} \quad (2)$

$\sigma\upsilon\nu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2 y + 2\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu y = \frac{3}{4} \quad (3)$

Με πρόσθεση κατά μέλη των ισοτήτων $(2)\ \ (3)$ παίρνουμε
$1 + 1 + 2\eta\mu\chi\eta\mu y + 2\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu y = 3 \Leftrightarrow 2\eta\mu\chi\eta\mu y + 2\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu y = 1$
που είναι η ζητούμενη.

1.20 Αν $\eta\mu(\chi-\alpha)=\sigma\upsilon\nu(\chi-\alpha)$ τότε $\varepsilon\varphi\alpha=\varepsilon\varphi(\chi-45^\circ)$

ΛΥΣΗ

Είναι $\sigma\upsilon\nu(\chi-\alpha)\neq 0$ διότι αν $\sigma\upsilon\nu(\chi-\alpha)=0$ θα έχουμε από τα δεδομένα $\eta\mu(\chi-\alpha)=0$ άτοπο αφού $\eta\mu,\ \sigma\upsilon\nu$ είναι αδύνατο να είναι ταυτόχρονα μηδέν.

Έτσι από την δεδομένη παίρνουμε

$\dfrac{\eta\mu(\chi-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu(\chi-\alpha)}=1$ ή $\varepsilon\varphi(\chi-\alpha)=1$ ή $\dfrac{\varepsilon\varphi\chi-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\chi\varepsilon\varphi\alpha}=1$ ή $\varepsilon\varphi\chi-\varepsilon\varphi\alpha=1+\varepsilon\varphi\chi\varepsilon\varphi\alpha$ ή

$\varepsilon\varphi\chi\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\alpha=\varepsilon\varphi\chi-1$ ή

$\varepsilon\varphi\alpha(\varepsilon\varphi\chi+1)=\varepsilon\varphi\chi-1$ ή $\varepsilon\varphi\alpha=\dfrac{\varepsilon\varphi\chi-\varepsilon\varphi45^\circ}{1+\varepsilon\varphi\chi\cdot\varepsilon\varphi45^\circ}$ ή $\varepsilon\varphi\alpha=\varepsilon\varphi(\chi-45^\circ)$

που είναι το ζητούμενο.

1.21 Αν $\chi+y=\dfrac{\pi}{4}$ Να δείξετε ότι $(1+\varepsilon\varphi\chi)(1+\varepsilon\varphi y)=2$

ΛΥΣΗ

$\chi+y=\dfrac{\pi}{4}$ τότε $\varepsilon\varphi(\chi+y)=\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}$ ή $\dfrac{\varepsilon\varphi\chi+\varepsilon\varphi y}{1-\varepsilon\varphi\chi\varepsilon\varphi y}=1$ ή $\varepsilon\varphi\chi+\varepsilon\varphi y=1-\varepsilon\varphi\chi\cdot\varepsilon\varphi y$ ή

$\varepsilon\varphi\chi+\varepsilon\varphi y+\varepsilon\varphi\chi\cdot\varepsilon\varphi y=1$ (το ζητούμενο μας κινεί να προσθέσουμε τη μονάδα και στα δύο μέλη)

ή $\varepsilon\varphi\chi+\varepsilon\varphi y+\varepsilon\varphi\chi\cdot\varepsilon\varphi y+1=2$ ή $\varepsilon\varphi\chi(1+\varepsilon\varphi y)+(\varepsilon\varphi y+1)=2$

ή $(1+\varepsilon\varphi y)(\varepsilon\varphi\chi+1)=2$

1.22 Να δείξετε ότι η παράσταση

$A=\eta\mu^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-\chi\right)+\eta\mu^2\left(\dfrac{2\pi}{3}+\chi\right)+\eta\mu^2\chi$ είναι ανεξάρτητη του χ

ΛΥΣΗ

$$A=\eta\mu^2\left(\frac{2\pi}{3}-\chi\right)+\eta\mu^2\left(\frac{2\pi}{3}+\chi\right)+\eta\mu^2\chi$$

$$=\left(\eta\mu\frac{2\pi}{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\chi-\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}\eta\mu\chi\right)^2+\left(\eta\mu\frac{2\pi}{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}\eta\mu\chi\right)^2+\eta\mu^2\chi$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\chi+\frac{1}{2}\eta\mu\chi\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\chi-\frac{1}{2}\eta\mu\chi\right)^2+\eta\mu^2\chi$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi+\eta\mu\chi\right)^2+\left(\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi-\eta\mu\chi\right)^2\right]+\eta\mu^2\chi$$

$$=\frac{1}{4}\left(3\sigma\upsilon\nu^2\chi+\eta\mu^2\chi+2\sqrt{3}\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi+3\sigma\upsilon\nu^2\chi+\eta\mu^2\chi-2\sqrt{3}\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi\right)+\eta\mu^2\chi$$

$$=\frac{1}{4}\left(6\sigma\upsilon\nu^2\chi+2\eta\mu^2\chi\right)+\eta\mu^2\chi=\frac{6}{4}\sigma\upsilon\nu^2\chi+\frac{1}{2}\eta\mu^2\chi+\eta\mu^2\chi=\frac{3}{2}\sigma\upsilon\nu^2\chi+\frac{3}{2}\eta\mu^2\chi=\frac{3}{2}$$

1.23 Αποδείξτε ότι: αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση:
$1+\sigma\phi(\frac{\pi}{4}-B)=\frac{2}{1-\sigma\phi\Gamma}$ τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έχουμε: $\sigma\phi(\frac{\pi}{4}-B)=\dfrac{\sigma\phi\frac{\pi}{4}\sigma\phi B+1}{\sigma\phi B-\sigma\phi\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sigma\phi B+1}{\sigma\phi B-1}$

Άρα η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$1+\frac{\sigma\phi B+1}{\sigma\phi B-1}=\frac{2}{1-\sigma\phi\Gamma}\Leftrightarrow\frac{\sigma\phi B-1+\sigma\phi B+1}{\sigma\phi B-1}=\frac{2}{1-\sigma\phi\Gamma}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\sigma\phi B}{\sigma\phi B-1}=\frac{2}{1-\sigma\phi\Gamma}\Leftrightarrow\sigma\phi B(1-\sigma\phi\Gamma)=\sigma\phi B-1$$

$$\Leftrightarrow\sigma\phi B-\sigma\phi B\sigma\phi\Gamma=\sigma\phi B-1\Leftrightarrow\sigma\phi B\sigma\phi\Gamma=1$$

$$\Leftrightarrow\sigma\phi B\sigma\phi\Gamma-1=0\Leftrightarrow\sigma\phi(B+\Gamma)=0$$

$$\Leftrightarrow\sigma\phi(B+\Gamma)=\sigma\phi\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow B+\Gamma=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\pi-A=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow A=\frac{\pi}{2}$$

1.24 Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\dfrac{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}{\eta\mu A-\eta\mu(B-\Gamma)}=\varepsilon\phi B,$

τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έχουμε:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}{\eta\mu A-\eta\mu(B-\Gamma)}=\varepsilon\phi B\Leftrightarrow\frac{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}{\eta\mu A-\eta\mu(B-\Gamma)}=\frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B}$$

$$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)\sigma\upsilon\nu B=\eta\mu A\eta\mu B-\eta\mu(B-\Gamma)\eta\mu B$$

$$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)\sigma\upsilon\nu B+\eta\mu(B-\Gamma)\eta\mu B=\eta\mu A\eta\mu B\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma-B)=\eta\mu A\eta\mu B$$

$$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu(-\Gamma)=\eta\mu A\eta\mu B\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\Gamma=\eta\mu A\eta\mu B$$ Όμως

$$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu(\pi-A-B)=\eta\mu A\eta\mu B\Leftrightarrow-\sigma\upsilon\nu(A+B)=\eta\mu A\eta\mu B$$

$$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu(A+B)+\eta\mu A\eta\mu B=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B-\eta\mu A\eta\mu B+\eta\mu A\eta\mu B=0$$

$$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B=0\qquad(1)$$

$\sigma\upsilon\nu B\neq0$ γιατί διαφορετικά δεν ορίζεται η $\varepsilon\phi B$,

οπότε από την (1) έχουμε: $\sigma\upsilon\nu A=0\Leftrightarrow A=\frac{\pi}{2}$

1.25 i) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι
$\eta\mu^2A+\eta\mu^2B+\eta\mu^2\Gamma-2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma=2.$

ii)Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\eta\mu^2A+\eta\mu^2B+\eta\mu^2\Gamma=2$
να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο

ΛΥΣΗ

i) Είναι $A+B+\Gamma=\pi \Leftrightarrow A+B=\pi-\Gamma$ οπότε $\sigma\upsilon\nu(A+B)=\sigma\upsilon\nu(\pi-\Gamma)$

$\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B-\eta\mu A\eta\mu B=-\sigma\upsilon\nu\Gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma=\eta\mu A\eta\mu B$

$\Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma)^2=\eta\mu^2 A\eta\mu^2 B$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 A\sigma\upsilon\nu^2 B+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma+2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma=\eta\mu^2 A\eta\mu^2 B$

$\Leftrightarrow (1-\eta\mu^2 A)(1-\eta\mu^2 B)+1-\eta\mu^2\Gamma+2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma=\eta\mu^2 A\eta\mu^2 B$

$\Leftrightarrow \eta\mu^2 A+\eta\mu^2 B+\eta\mu^2\Gamma-2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma=2.$

ii) Έστω ότι είναι $\eta\mu^2 A+\eta\mu^2 B+\eta\mu^2\Gamma=2$ αλλά από το (i) ερώτημα είναι

$\eta\mu^2 A+\eta\mu^2 B+\eta\mu^2\Gamma-2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma=2.$

Συνεπώς έχουμε :

$2-2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma=2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma=0$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu A=0$ ή $\sigma\upsilon\nu B=0$ ή $\sigma\upsilon\nu\Gamma=0 \Leftrightarrow A=\frac{\pi}{2}$ ή $B=\frac{\pi}{2}$ ή $\Gamma=\frac{\pi}{2}$.

1.26

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\eta\mu A=2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$ να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές

ΛΥΣΗ

Στο τρίγωνο είναι $A+B+\Gamma=\pi \Leftrightarrow B+\Gamma=\pi-A \Leftrightarrow \eta\mu(B+\Gamma)=\eta\mu(\pi-A)$

$\Leftrightarrow \eta\mu(B+\Gamma)=\eta\mu A$

Έτσι η δεδομένη σχέση γράφεται:

$\eta\mu(B+\Gamma)=2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma \Leftrightarrow \eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma+\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B=2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$

$\Leftrightarrow \eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma+\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B-2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma=0 \Leftrightarrow \eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma-\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B=0$

$\Leftrightarrow \eta\mu(B-\Gamma)=0 \Leftrightarrow B-\Gamma=0 \Rightarrow B-\Gamma=180^\circ$ αδυνατο

Άρα $B-\Gamma=0 \Leftrightarrow B=\Gamma$

1.27

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\dfrac{\eta\mu A+\eta\mu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}=\varepsilon\varphi B$ να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο A

ΛΥΣΗ

Η δεδομένη σχέση γράφεται $\dfrac{\eta\mu(B+\Gamma)+\eta\mu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}=\dfrac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B}$ ή

$\dfrac{\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma+\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B+\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma-\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B}{\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma+\eta\mu B\eta\mu\Gamma}=\dfrac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B} \Leftrightarrow \dfrac{2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma+\eta\mu B\eta\mu\Gamma}=\dfrac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B} \Leftrightarrow$

$2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma\sigma\upsilon\nu B=\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma+\eta\mu^2 B\eta\mu\Gamma \Leftrightarrow$

$\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma-\eta\mu^2 B\eta\mu\Gamma=0 \Leftrightarrow \eta\mu B(\sigma\upsilon\nu\Gamma\sigma\upsilon\nu B-\eta\mu B\eta\mu\Gamma)=0 \Leftrightarrow \eta\mu B\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)=0 \Leftrightarrow$

$\eta\mu B=0$ ή $\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)=0$

$B=0$ ή $B=180^\circ$ ή $B+\Gamma=90^\circ$ ή $B+\Gamma=270^\circ$

αδύνατο, αδύνατο $B+\Gamma=90^\circ$ αδύνατο

Άρα $B+\Gamma=90^\circ$ οπότε $A=90^\circ$ και το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο A

1.28 Σε κάθε τρίγωνο να δείξετε ότι ισχύει :

i) $\varepsilon\phi 2A + \varepsilon\phi 2B + \varepsilon\phi 2\Gamma = \varepsilon\phi 2A \cdot \varepsilon\phi 2B \cdot \varepsilon\phi 2\Gamma$

ii) $\sigma\phi\frac{A}{2} + \sigma\phi\frac{B}{2} + \sigma\phi\frac{\Gamma}{2} = \sigma\phi\frac{A}{2} \cdot \sigma\phi\frac{B}{2} \cdot \sigma\phi\frac{\Gamma}{2}$

ΛΥΣΗ

i) $A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2A + 2B + 2\Gamma = 360^\circ \Leftrightarrow 2A + 2B = 360^\circ - 2\Gamma$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\phi(2A + 2B) = \varepsilon\phi(360^\circ - 2\Gamma)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varepsilon\phi 2A + \varepsilon\phi 2B}{1 - \varepsilon\phi 2A \varepsilon\phi 2B} = -\varepsilon\phi 2\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\phi 2A + \varepsilon\phi 2B = -\varepsilon\phi 2\Gamma + \varepsilon\phi 2A \varepsilon\phi 2B \varepsilon\phi 2\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\phi 2A + \varepsilon\phi 2B + \varepsilon\phi 2\Gamma = \varepsilon\phi 2A \varepsilon\phi 2B \varepsilon\phi 2\Gamma$$

ii) Όμοια από $A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2} = 90^\circ \Leftrightarrow$

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 90^\circ - \frac{\Gamma}{2} \Leftrightarrow \sigma\phi\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \sigma\phi\left(90^\circ - \frac{\Gamma}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sigma\phi\frac{A}{2}\sigma\phi\frac{B}{2} - 1}{\sigma\phi\frac{A}{2} + \sigma\phi\frac{B}{2}} = \varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2} \Leftrightarrow \frac{\sigma\phi\frac{A}{2}\sigma\phi\frac{B}{2} - 1}{\sigma\phi\frac{A}{2} + \sigma\phi\frac{B}{2}} = \frac{1}{\sigma\phi\frac{\Gamma}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\phi\frac{A}{2}\sigma\phi\frac{B}{2}\sigma\phi\frac{\Gamma}{2} - \sigma\phi\frac{\Gamma}{2} = \sigma\phi\frac{A}{2} + \sigma\phi\frac{B}{2} \Leftrightarrow \sigma\phi\frac{A}{2}\sigma\phi\frac{B}{2}\sigma\phi\frac{\Gamma}{2} = \sigma\phi\frac{A}{2} + \sigma\phi\frac{B}{2} + \sigma\phi\frac{\Gamma}{2}$$

1.29 Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι

i) $\sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma + 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu \Gamma = 1$

ii) $\eta\mu^2 2A + \eta\mu^2 2B + \eta\mu^2 2\Gamma + 2\sigma\upsilon\nu^2 A \sigma\upsilon\nu^2 B \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma = 2$

ΛΥΣΗ

i) $A + B + \Gamma = \pi \Leftrightarrow A + B = \pi - \Gamma$ οπότε $\sigma\upsilon\nu(A + B) = \sigma\upsilon\nu(\pi - \Gamma)$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B - \eta\nu A \eta\mu B = -\sigma\upsilon\nu\Gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma = \eta\mu A \eta\mu B$ συνεπώς

$(\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma)^2 = \eta\mu^2 A \eta\mu^2 B$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 A \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma + 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu\Gamma = \eta\mu^2 A \eta\mu^2 B$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 A \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma + 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu\Gamma = (1 - \sigma\upsilon\nu^2 A)(1 - \sigma\upsilon\nu^2 B)$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 A \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma + 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu\Gamma = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 A - \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 A \sigma\upsilon\nu^2 B$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma + 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu\Gamma = 1$

ii)

Είναι $A+B+\Gamma=\pi$ *οπότε* $2A+2B+2\Gamma=2\pi$ *ή*

$2A+2B=2\pi\text{-}2\Gamma$ *άρα*

$\text{συν}(2\text{Α}+2\text{Β})=\text{συν}(2\pi\text{-}2\Gamma)\Leftrightarrow \text{συν}2\text{Ασυν}2\text{Β-ημ}2\text{Αημ}2\text{Β}=\text{συν}2\Gamma$

$\text{συν}2\text{Ασυν}2\text{Β-συν}2\Gamma=\text{ημ}2\text{Αημ}2\text{Β}$ άρα

$(\text{συν}2\text{Ασυν}2\text{Β-συν}2\Gamma)^2=\text{ημ}^2 2\text{Αημ}^2 2\text{Β}$

$\Leftrightarrow \text{συν}^2 2\text{Ασυν}^2 2\text{Β}+\text{συν}^2 2\Gamma-2\text{συν}2\text{Ασυν}2\text{Βσυν}2\Gamma=\text{ημ}^2 2\text{Αημ}^2 2\text{Β}$

$\Leftrightarrow (1\text{-ημ}^2 2\text{Α})(1\text{-ημ}^2 2\text{Β})+1-\text{ημ}^2 2\Gamma\text{-}\ 2\text{συν}2\text{Ασυν}2\text{Βσυν}2\Gamma=\text{ημ}^2 2\text{Αημ}^2 2\text{Β}$

$\Leftrightarrow \text{ημ}^2 2\text{Α}+\text{ημ}^2 2\text{Β}+\text{ημ}^2 2\Gamma+2\text{συν}2\text{Ασυν}2\text{Βσυν}2\Gamma=2$

1.30 Να λυθεί η εξίσωση: $\varepsilon\phi\chi+\varepsilon\phi(\chi+\frac{\pi}{3})+\varepsilon\phi(\chi+\frac{2\pi}{3})=3$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Η εξίσωση ορίζεται όταν

$\chi+\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+\kappa\pi,\ \kappa\in Z$ καί $\chi+\frac{2\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+\lambda\pi,\ \lambda\in Z$

Δηλαδή όταν $\chi\neq\frac{\pi}{6}+\kappa\pi$ καί $\chi\neq-\frac{\pi}{6}+\lambda\pi,\ \kappa,\ \lambda\in \text{Z}$

Για τα χ για τα οποία ορίζεται η εξίσωση , έχουμε:

$$\varepsilon\phi\chi+\varepsilon\phi(\chi+\frac{\pi}{3})+\varepsilon\phi(\chi+\frac{2\pi}{3})=3\Leftrightarrow \varepsilon\phi\chi+\frac{\varepsilon\phi\chi+\varepsilon\phi\frac{\pi}{3}}{1-\varepsilon\phi\chi\varepsilon\phi\frac{\pi}{3}}+\frac{\varepsilon\phi\chi\varepsilon\phi\frac{2\pi}{3}}{1-\varepsilon\phi\chi\varepsilon\phi\frac{2\pi}{3}}=3$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\phi\chi+\frac{\varepsilon\phi\chi+\varepsilon\phi\frac{\pi}{3}}{1-\varepsilon\phi\chi\varepsilon\phi\frac{\pi}{3}}+\frac{\varepsilon\phi\chi-\varepsilon\phi(\pi-\frac{\pi}{3})}{1+\varepsilon\phi\chi\varepsilon\phi(\pi-\frac{\pi}{3})}=3\Leftrightarrow \varepsilon\phi\chi+\frac{\varepsilon\phi\chi+\varepsilon\phi\frac{\pi}{3}}{1-\varepsilon\phi\chi\varepsilon\phi\frac{\pi}{3}}+\frac{\varepsilon\phi\chi-\varepsilon\phi\frac{\pi}{3}}{1+\varepsilon\phi\chi\varepsilon\phi\frac{\pi}{3}}=3$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\phi\chi+\frac{\varepsilon\phi\chi+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\varepsilon\phi\chi}+\frac{\varepsilon\phi\chi-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\varepsilon\phi\chi}=3 \qquad (1)$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέρη της εξίσωσης (1) με $1-3\varepsilon\phi^2\chi$ και έχουμε:

$$\varepsilon\phi\chi(1-3\varepsilon\phi^2\chi)+(\varepsilon\phi\chi+\sqrt{3})(1+\sqrt{3}\varepsilon\phi\chi)+(\varepsilon\phi\chi-\sqrt{3})(1-\sqrt{3}\varepsilon\phi\chi)=3(1-3\varepsilon\phi^2\chi)\Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\phi\chi-3\varepsilon\phi^3\chi+\varepsilon\phi\chi+\sqrt{3}\varepsilon\phi^2\chi+\sqrt{3}+3\varepsilon\phi\chi+\varepsilon\phi\chi-\sqrt{3}\varepsilon\phi^2\chi-\sqrt{3}+3\varepsilon\phi\chi-3+9\varepsilon\phi^2\chi=0\Leftrightarrow$$

$$3\varepsilon\phi^3\chi-9\varepsilon\phi^2\chi-9\varepsilon\phi\chi+3=0$$ i)

$$\Leftrightarrow \varepsilon\phi^3\chi-3\varepsilon\phi^2\chi-3\varepsilon\phi\chi+1=0\Leftrightarrow(\varepsilon\phi\chi+1)(\varepsilon\phi^2\chi-4\varepsilon\phi\chi+1)=0$$

Άρα $\varepsilon\phi\chi+1=0$ ή $\varepsilon\phi^2\chi-4\varepsilon\phi\chi+1=0$ οπότε έχουμε :

$$\varepsilon\phi\chi+1=0\Leftrightarrow\varepsilon\phi\chi=-1\Leftrightarrow\varepsilon\phi\chi=-\varepsilon\phi\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\varepsilon\phi\chi=\varepsilon\phi(\pi-\frac{\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow\varepsilon\phi\chi=\varepsilon\phi\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow\chi=\frac{3\pi}{4}+\kappa\pi,\quad \kappa\in \text{Z}.$$

ii) $\varepsilon\phi^2\chi - 4\varepsilon\phi\chi + 1 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\phi\chi = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$

Αν $\varepsilon\phi\chi = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$, τότε $\chi = \lambda\pi + \theta_1$, όπου $\varepsilon\phi\theta_1 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda \in Z$

Αν $\varepsilon\phi\chi = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$, τότε $\chi = \mu\pi + \theta_2$, όπου $\varepsilon\phi\theta_2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$ και $\mu \in Z$

1.31 Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu^4\chi + \eta\mu^4(\chi + \frac{\pi}{4}) + \eta\mu^4(\chi - \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{2}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Η εξίσωση γράφεται:

$$\eta\mu^4\chi + (\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu\chi\eta\mu\frac{\pi}{4})^4 + (\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} - \sigma\upsilon\nu\chi\eta\mu\frac{\pi}{4})^4 = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^4\chi + \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)\right]^4 + \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi)\right]^4 = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^4\chi + \frac{1}{4}(\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi + 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi)^2 + \frac{1}{4}(\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi - 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi)^2 = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^4\chi + \frac{1}{4}(1 + 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi)^2 + \frac{1}{4}(1 - 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi)^2 = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^4\chi + \frac{1}{4}(1 + 4\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi + 4\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi) + \frac{1}{4}(1 - 4\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + 4\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi) = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^4\chi + \frac{1}{4}(1 + 4\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi + 4\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + 1 - 4\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + 4\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi) = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^4\chi + \frac{1}{4}(2 + 8\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \eta\mu^4\chi + \frac{1}{2} + 2\eta\mu^2\chi(1 - \eta\mu^2\chi) = \frac{3}{2}$$

Έχουμε

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu^4\chi + 1 + 4\eta\mu^2\chi(1 - \eta\mu^2\chi) - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu^4\chi + 1 + 4\eta\mu^2\chi - 4\eta\mu^4\chi - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\eta\mu^4\chi + 4\eta\mu^2\chi - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu^4\chi - 4\eta\mu^2\chi + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\eta\mu^2\chi - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^2\chi - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \pm 1$$

λοιπόν:

$\eta\mu\chi = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = \frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi,\ \kappa \in Z$ ή

$\eta\mu\chi = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = \frac{3\pi}{2} + 2\kappa'\pi,\ \kappa' \in Z$

1.32 Να λυθεί η εξίσωση:

$$\varepsilon\phi(15^\circ-\chi)\varepsilon\phi(35^\circ-\chi)\varepsilon\phi\chi\varepsilon\phi(45^\circ+\chi)\varepsilon\phi(55^\circ+\chi)\varepsilon\phi(75^\circ+\chi)=1$$

$$\chi\in(-2\pi\ ,\ 2\pi)$$

ΛΥΣΗ

Είναι $\varepsilon\phi(15^\circ-\chi)=\sigma\phi(90^\circ-15^\circ+\chi)=\sigma\phi(75^\circ+\chi)$

$\varepsilon\phi(35^\circ-\chi)=\sigma\phi(90^\circ-35^\circ+\chi)=\sigma\phi(55^\circ+\chi)$

$\varepsilon\phi(45^\circ-\chi)=\sigma\phi(90^\circ-45^\circ+\chi)=\sigma\phi(45^\circ+\chi)$

οπότε η εξίσωση γράφεται:

$$\sigma\phi(75^\circ+\chi)\cdot\sigma\phi(55^\circ+\chi)\cdot\sigma\phi(45^\circ+\chi)\cdot\varepsilon\phi\chi\cdot\varepsilon\phi(45^\circ+\chi)\cdot\varepsilon\phi(55^\circ+\chi)\cdot\varepsilon\phi(75^\circ+\chi)=1$$

$\Leftrightarrow$

$$\sigma\phi(75^\circ+\chi)\cdot\varepsilon\phi(75^\circ+\chi)\cdot\sigma\phi(55^\circ+\chi)\cdot\varepsilon\phi(55^\circ+\chi)\cdot\sigma\phi(45^\circ+\chi)\cdot\varepsilon\phi(45^\circ+\chi)\cdot\varepsilon\phi\chi=1$$

$\Leftrightarrow \varepsilon\phi\chi=1$, διότι είναι γνωστό ότι $\varepsilon\phi\alpha\sigma\phi\alpha=1$

οπότε έχουμε $\chi=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\ \ \kappa\in Z$ και επειδή $\chi\in(-2\pi,\ 2\pi)$

είναι

$$-2\pi<\kappa\pi+\frac{\pi}{4}<2\pi\Leftrightarrow -2<\kappa+\frac{1}{4}<2\Leftrightarrow$$

$$-2-\frac{1}{4}<\kappa<2-\frac{1}{4}\Leftrightarrow -\frac{9}{4}<\kappa<\frac{7}{4}$$

άρα $\kappa=-2,-1,0,1$

Συνεπώς από $\chi=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\ \ \kappa\in Z$ έχουμε

$$\chi_1=-2\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{7\pi}{4},\quad \chi_2=-\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4},$$

$$\chi_3=\frac{\pi}{4},\quad \chi_4=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

οι ζητούμενες λύσεις.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Κυκλώστε τη σωστή απάντηση

$\sigma\upsilon\nu(17^\circ-\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(17^\circ+\alpha)+\sigma\upsilon\nu(73^\circ+\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(73^\circ-\alpha)$ είναι ίση με:

Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** $\sigma\upsilon\nu\alpha$ **Δ.** $\sigma\upsilon\nu2\alpha$

2. Κυκλώστε τη σωστή απάντηση

$\sigma\upsilon\nu20^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu80^\circ+\sigma\upsilon\nu70^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu10^\circ$ είναι ίση με:

Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** $\frac{1}{2}$ **Δ.** $2\sigma\upsilon\nu20^\circ$

3. Κυκλώστε τη σωστή απάντηση

$\frac{\sqrt{3}-\varepsilon\phi15^\circ}{1+\sqrt{3}\varepsilon\phi15^\circ}$ είναι ίση με:

Α. 1 **Β.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **Γ.** $\sqrt{3}$ **Δ.** $2\varepsilon\phi15^\circ$

4. Απαντήστε αν είναι σωστή ή λάθος η ισότητα

$$\eta\mu\frac{\pi}{15}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{10}+\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5}\eta\mu\frac{13\pi}{30}=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{9}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9}-\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{18}\eta\mu\frac{7\pi}{18}$$

5. Απαντήστε αν είναι σωστή ή λάθος η ισότητα

$$\frac{\sqrt{3}\varepsilon\phi75^\circ-1}{\varepsilon\phi75^\circ+\sqrt{3}}=1$$

6. Απαντήστε αν είναι σωστή ή λάθος η ισότητα

$$\frac{\varepsilon\phi^2 5\alpha-\varepsilon\phi^2 3\alpha}{1-\varepsilon\phi^2 5\alpha\cdot\varepsilon\phi^2 3\alpha}=\varepsilon\phi2\alpha\cdot\varepsilon\phi8\alpha$$

7. Να αντιστοιχίσετε την παράσταση της στήλη **Α** το αποτέλεσμα από την στήλη **Β**

	ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1	$\frac{\varepsilon\phi1^\circ-1}{\varepsilon\phi1^\circ+1}-\varepsilon\phi44^\circ$	-1
2	$\sigma\upsilon\nu40^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu80^\circ-\eta\mu40^\circ\cdot\eta\mu80^\circ$	1
3	$\frac{\sqrt{3}\varepsilon\phi105^\circ-1}{\sqrt{3}+\varepsilon\phi105^\circ}$	0
4	$\eta\mu\frac{\pi}{12}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-\eta\mu\frac{\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}$	$-\frac{1}{2}$
		$\frac{1}{2}$

8. Να αντιστοιχίσετε την παράσταση της στήλη **Α** το αποτέλεσμα από την στήλη **Β**

1	$\eta\mu\frac{\pi}{9}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{18}-\eta\mu\frac{7\pi}{18}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{9}$	0
2	$\eta\mu\frac{5\pi}{7}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}-\eta\mu\frac{2\pi}{7}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{7}$	1
3	$\frac{\varepsilon\phi\frac{\pi}{3}-\varepsilon\phi\frac{\pi}{20}}{1-\varepsilon\phi\frac{\pi}{3}\cdot\varepsilon\phi\frac{\pi}{20}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
4	$\frac{\sigma\phi\frac{\pi}{5}\cdot\sigma\phi\frac{\pi}{15}+1}{\varepsilon\phi\frac{\pi}{15}-\sigma\phi\frac{\pi}{5}}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
		$\frac{1}{2}$

9. Αν $\chi > y$ με $\chi, y \neq \kappa\pi,\ \ \kappa \in Z$ τότε το κλάσμα $\frac{\sigma\phi\chi\sigma\phi y+1}{|\sigma\phi\chi-\sigma\phi y|}$ ισούται με :

Α. $\sigma\phi(\chi - y)$ **Β.** $\sigma\phi(y-\chi)$ **Γ.** $\sigma\phi(\chi+y)$ **Δ.** κανένα από τα παραπάνω

10. Αν $\chi > y$ με $\chi, y \neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \ \kappa \in Z$ τότε το κλάσμα $\frac{|\varepsilon\phi\chi-\varepsilon\phi y|}{1+\varepsilon\phi\chi\varepsilon\phi y}$ ισούται με:

Α. $\varepsilon\phi(\chi - y)$ **Β.** $\varepsilon\phi(y-\chi)$ **Γ.** $\varepsilon\phi(\chi+y)$ **Δ.** κανένα από τα παραπάνω

11. Υπολογίστε τις παραστάσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu 70^o \sigma\upsilon\nu 20^o - \eta\mu 70^o \eta\mu 20^o$

ii) $\eta\mu 50^o \sigma\upsilon\nu 10^o + \eta\mu 10^o \sigma\upsilon\nu 50^o$

iii) $\sigma\upsilon\nu 175^o \sigma\upsilon\nu 55^o + \eta\mu 175^o \sigma\upsilon\nu 55^o$

iv) $\varepsilon\phi 5^o \varepsilon\phi 55^o \varepsilon\phi 65^o \varepsilon\phi 105^o$

12. Υπολογίστε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 105° και 15°

13. Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{7}, \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{13}{14}$ και $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των $\alpha+\beta$ και $\alpha-\beta$.

14. Αν $\eta\mu\alpha = \frac{1}{3}, \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{1}{4}$ και $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}), \beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των $\alpha+\beta$ και $\alpha-\beta$.

15. Αποδείξτε ότι αν α, β, είναι οξείες γωνίες και $\sigma\phi\alpha = \frac{3}{4}, \sigma\phi\beta = \frac{1}{7}$ τότε $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$

16. Αποδείξτε ότι:

i) $\varepsilon\phi(30^\circ + \alpha)\varepsilon\phi(30^\circ - \alpha) + \frac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon\phi(30^\circ + \alpha) + \frac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon\phi(30^\circ - \alpha) = 1$

ii) $\sigma\upsilon\nu(30^\circ + \alpha)\sigma\upsilon\nu(30^\circ - \alpha) - \eta\mu(30^\circ + \alpha)\eta\mu(30^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$

17. Αποδείξτε ότι:

i) $\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu(120^\circ - \alpha) + \sigma\upsilon\nu(120^\circ + \alpha) = 0$

ii) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2(120^\circ + \alpha) + \sigma\upsilon\nu^2(240^\circ + \alpha) = \frac{3}{2}$

18. Αποδείξτε ότι:

i) $\eta\mu\alpha = \eta\mu(\alpha - \beta)\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)$

ii) $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu\beta$

iii) $\eta\mu\alpha\eta\mu(\beta - \gamma) + \eta\mu\beta\eta\mu(\gamma - \alpha) + \eta\mu\gamma\eta\mu(\alpha - \beta) = 0$

19. Αποδείξτε ότι:

i) $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$

ii) $\eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu(\alpha - \beta) = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$

iii) $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\beta$

20. Αποδείξτε ότι:

i) $\varepsilon\phi(\alpha - \beta) = \dfrac{\eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\beta}$

ii) $\varepsilon\phi(\alpha + \beta) = \dfrac{\eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\beta}$

21. Αποδείξτε ότι:

$$\frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta} + \frac{\eta\mu(\beta - \gamma)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma} + \frac{\eta\mu(\gamma - \alpha)}{\eta\mu\gamma\eta\mu\alpha} = 0$$

22. Αποδείξτε ότι αν $\alpha + \beta = \gamma$, τότε $\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\gamma - 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma = 1$

23. Αποδείξτε ότι η παράσταση :

$$\mathrm{E} = \frac{\eta\mu(\alpha + \beta)\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha\eta\mu(\alpha + \beta)}$$

είναι ανεξάρτητη του α

24. Αποδείξτε ότι:

i) $\dfrac{\eta\mu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)}{\eta\mu(\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\beta}$

ii) $\varepsilon\phi(\alpha-\beta)+\varepsilon\phi(\beta-\gamma)+\varepsilon\phi(\gamma-\alpha)=\varepsilon\phi(\alpha-\beta)\varepsilon\phi(\beta-\gamma)\varepsilon\phi(\gamma-\alpha)$

25. Αποδείξτε ότι: $\dfrac{2\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)}=\varepsilon\phi\alpha+\varepsilon\phi\beta$

26. Αν $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ να αποδείξτε ότι:

$(1+\varepsilon\phi\alpha)(1+\varepsilon\phi\beta)(1+\varepsilon\phi\gamma)=2(1+\varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta\varepsilon\phi\gamma)$

27. Αν $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ να αποδείξτε ότι:

i) $\sigma\phi\alpha+\sigma\phi\beta+\sigma\phi\gamma=\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta\sigma\phi\gamma$

ii) $\varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta+\varepsilon\phi\beta\varepsilon\phi\gamma+\varepsilon\phi\gamma\varepsilon\phi\alpha=1$

iii) $\varepsilon\phi^2\alpha+\varepsilon\phi^2\beta+\varepsilon\phi^2\gamma\geq 1$

28. Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\sigma\phi A=2$ και $\sigma\phi B=3$ να υπολογιστούν

i) $\varepsilon\phi\Gamma$ ii) $\eta\mu\Gamma$ iii) $\sigma\upsilon\nu\Gamma$ iv) $\hat{\Gamma}$

29. Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\varepsilon\phi A=2$ και $\varepsilon\phi B=3$ να δείξετε ότι $\varepsilon\phi\Gamma=1$ ενώ αν $\sigma\phi A=3$ και $\sigma\phi B=2$ τότε $\sigma\phi\Gamma=-1$

30. Αν $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{6}$ να δείξετε ότι:

i) $(\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\beta)^2+(\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta)^2=1$ και

ii) $(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\beta)^2+(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta)^2=3$

31. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A=90^\circ$ πάρουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Gamma=4A\Delta$ να δείξετε ότι:

i) $\varepsilon\phi\Delta\hat{B}\Gamma=\dfrac{3\varepsilon\phi B}{4+\varepsilon\phi^2 B}$

ii) Αν $\varepsilon\phi B=2\sqrt{2}$ τότε η $B\Delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας B

32. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A=90^\circ$ να δείξετε ότι:

$$\eta\mu(A+B)-2\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B=0$$

33. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $A = 90^\circ$ να δείξετε ότι:

$$\etaμΓ = 2\etaμAσυνB$$

34. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $A = 90^\circ$ να δείξετε ότι:

$$\frac{\etaμΓ}{συνAσυνB} = 2εφA$$

35. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει $\etaμ(B-Γ) = 1 - 2συνB\etaμΓ$ να δείξετε ότι: $A = 90^\circ$

36. Αποδείξτε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει:

$$\frac{συνA}{\etaμB\etaμΓ} + \frac{συνB}{\etaμΓ\etaμA} + \frac{συνΓ}{\etaμA\etaμB} = 2$$

37. Αποδείξτε ότι ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $A = 90^\circ$ αν και μόνο αν ισχύει η σχέση:

$$εφ\frac{B}{2} + εφ\frac{B}{2}εφ\frac{Γ}{2} + εφ\frac{Γ}{2} = 1$$

38. Αποδείξτε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύουν οι σχέσεις

i) $σφAσφB + σφBσφΓ + σφΓσφA = 1$

ii) $σφ^2A + σφ^2B + σφ^2Γ \geq 1$

39. Σε κάθε τρίγωνο $ΑΒΓ$ να αποδείξετε ότι είναι:

i) $συν^2 2A + συν^2 2B + συν^2 2Γ = 1 - 2συν2Aσυν2Bσυν2Γ$

ii) Αν σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει $συν^2 2A + συν^2 2B + συν^2 2Γ = 1$ να αποδείξετε ότι μια τουλάχιστον γωνία αυτού είναι 45°

40. Αν A, B γωνίες τριγώνου να αποδείξετε ότι

i) $συνAσυνB > \etaμA\etaμB$

ii) $σφAσφB > 1$

iii) $εφAεφΓ < 1$

41. Σε κάθε τρίγωνο $ΑΒΓ$ να αποδείξετε ότι είναι:

$$\etaμA \cdot \etaμ(B-Γ) + \etaμB \cdot \etaμ(Γ-A) + \etaμΓ \cdot \etaμ(A-B) = 0$$

42. Αν $α + β = 225^\circ$ να δείξετε ότι: $\frac{σφα}{1+σφα} \cdot \frac{σφβ}{1+σφβ} = \frac{1}{2}$

43. Να λύσετε την εξίσωση : $εφ\left(\frac{\pi}{4} + χ\right) - εφ\left(\frac{\pi}{4} - χ\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

44. Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{\eta\mu(\chi+60^\circ)}{\sigma\upsilon\nu(\chi+60^\circ)+\sigma\upsilon\nu(\chi-60^\circ)}=\dfrac{1}{3}$

45. Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{4}+\chi\right)\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{4}-\chi\right)=\dfrac{1}{4},\quad \chi\in[0\ ,\ 2\pi]$

46. Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu(\chi+\mathrm{y})+\sigma\upsilon\nu(\chi-\mathrm{y})=2$

47. Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{4}+\chi\right)=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\chi+\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}-\chi\right),\quad \chi\in[0\ ,\ 2\pi]$

48. Να λύσετε την εξίσωση: $9\sigma\upsilon\nu(\alpha+\chi)=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\chi)$, όταν $\sigma\phi\alpha=\dfrac{4}{5}$

49. Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\chi)-2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu(\alpha+\chi)=-\dfrac{1}{2}$

50. Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $\varepsilon\phi 2\chi=\sigma\phi 88\chi$
ii) $\eta\mu^4\chi+\eta\mu^4\left(\chi+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ 2α

Αν στους τύπους που δίνουν το $\eta\mu(\alpha+\beta)$, $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$, $\varepsilon\phi(\alpha+\beta)$, $\sigma\phi(\alpha+\beta)$, θέσουμε $\beta=\alpha$ παίρνουμε αντιστοίχως:

- $\eta\mu(\alpha+\alpha)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow \boxed{\eta\mu 2\alpha=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}$

- $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha\eta\mu\alpha \Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu 2\alpha&=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha\\&=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1\\&=1-2\eta\mu^2\alpha\end{aligned}}$

- $\varepsilon\phi(\alpha+\alpha)=\dfrac{\varepsilon\phi\alpha+\varepsilon\phi\alpha}{1-\varepsilon\phi\alpha\cdot\varepsilon\phi\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon\phi 2\alpha=\dfrac{2\varepsilon\phi\alpha}{1-\varepsilon\phi^2\alpha}}$

- $\sigma\phi(\alpha+\alpha)=\dfrac{\sigma\phi\alpha\cdot\sigma\phi\alpha-1}{\sigma\phi\alpha+\sigma\phi\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\sigma\phi 2\alpha=\dfrac{\sigma\phi^2\alpha-1}{2\sigma\phi\alpha}}$

από τους τύπους του συνημίτονου μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α όταν ξέρουμε το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$.

Πράγματι έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1 \Leftrightarrow \boxed{\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha=1-2\eta\mu^2\alpha \Leftrightarrow \boxed{\eta\mu^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}$$

οπότε με διαίρεση $\boxed{\varepsilon\phi^2\alpha=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}}$

Παρατήρηση 1η

Οι τύποι που προκύπτουν ονομάζονται και τύποι του αποτετραγωνισμού και είναι πολύ χρήσιμοι στην γεωμετρία.

Παρατήρηση 2η

Όπως λέμε $\eta\mu 2\alpha=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$ έτσι $\eta\mu\alpha=2\eta\mu\dfrac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{2}$ ή

$$\sigma\upsilon\nu\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}-1=1-2\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}$$

αυτό μπορεί να γίνει για όλους τους παραπάνω τύπους.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Απαντήστε αν είναι σωστές ή λάθος οι παρακάτω ισότητες

α) $2\sigma\upsilon\nu^2(45^\circ-\alpha)-1=\eta\mu 2\alpha$ **Σ** ή **Λ**

β) $1-2\eta\mu^2\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}$ **Σ** ή **Λ**

γ) $\frac{1-\varepsilon\phi^2 75^\circ}{2\varepsilon\phi 75^\circ}=-\sqrt{3}$ **Σ** ή **Λ**

δ) $2\eta\mu\frac{5\pi}{12}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}$ **Σ** ή **Λ**

ε) $2\eta\mu 135^\circ\sigma\upsilon\nu 135^\circ=-1$ **Σ** ή **Λ**

2. Απαντήστε αν είναι σωστές ή λάθος οι παρακάτω ισότητες

α) $\eta\mu^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$ **Σ** ή **Λ**

β) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$ **Σ** ή **Λ**

γ) $\sigma\phi^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$ **Σ** ή **Λ**

δ) $\eta\mu 2\alpha=1-2\eta\mu^2\alpha$ **Σ** ή **Λ**

3. Κυκλώστε την σωστή απάντηση

α) Η τιμή της παράστασης $K=(\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi+1)(\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi-1)$ είναι

Α) 1 **Β)** $\eta\mu 2\chi$ **Γ)** $\sigma\upsilon\nu 2\chi$ **Δ)** 0

β) Το αποτέλεσμα της παράστασης $\Lambda=\sigma\upsilon\nu^4(45^\circ-\alpha)-\eta\mu^4(45^\circ-\alpha)$ είναι

Α) $\eta\mu 2\chi$ **Β)** $\sigma\upsilon\nu 2\chi$ **Γ)** $\eta\mu 90^\circ$ **Δ)** $\sigma\upsilon\nu 90^\circ$

4. Σε κάθε παράσταση της στήλης **Α** αντιστοιχεί το αποτέλεσμά της στη στήλη **Β**.
Να κάνετε τη σωστή αντιστοίχηση.

	ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β	
1	$1-2\eta\mu^2\frac{\pi}{8}$	α)	-1
2	$2\eta\mu\frac{\pi}{12}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}$	β)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
3	$2\sigma\upsilon\nu^2\frac{3\pi}{4}-1$	γ)	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{2\varepsilon\phi\frac{3\pi}{8}}{1-\varepsilon\phi^2\frac{3\pi}{8}}$	δ)	0
		ε)	$\sqrt{3}$

5. Απαντήστε αν είναι σωστή ή λάθος η ισότητα:

$$\sigma\upsilon\nu(18^\circ-\alpha)\sigma\upsilon\nu(18^\circ+\alpha)+\sigma\upsilon\nu(72^\circ+\alpha)\sigma\upsilon\nu(72^\circ-\alpha)=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha$$

6. Απαντήστε αν είναι σωστές ή λάθος οι ισότητες:

i. $4\sigma\upsilon\nu^3\alpha\cdot\eta\mu\alpha-4\eta\mu^3\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=\eta\mu4\alpha$

ii. $\sigma\upsilon\nu^2 15^\circ-\sigma\upsilon\nu^2 75^\circ=\frac{1}{4}$

7. Αν για την γωνία A τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει η ισότητα που αναγράφεται στη στήλη, I να αντιστοιχίσετε το μέτρο της γωνίας σε μοίρες από την στήλη II

	ΣΤΗΛΗ I	**ΣΤΗΛΗ II**
1	$\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$	α) $A=60^\circ$
2	$1-2\eta\mu^2\frac{A}{2}=0$	β) $A=90^\circ$
3	$2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu^2 A-\eta\mu^2 A$	γ) $A=30^\circ$
4	$\frac{6\varepsilon\phi\frac{A}{2}}{1-\varepsilon\phi^2\frac{A}{2}}=\sqrt{3}$	δ) $A=45^\circ$
5	$\frac{\eta\mu2A}{1-\sigma\upsilon\nu^2 A}=2\sqrt{3}$	

8. Κυκλώστε την σωστή απάντηση στην πρόταση :

Όταν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu^2\frac{B}{2}+\eta\mu^2\frac{A}{2}=1$ τότε το τρίγωνο είναι

Α. ορθογώνιο **Β.** ισοσκελές **Γ.** ισόπλευρο **Δ.** αμβλυγώνιο

9. Κυκλώστε την σωστή απάντηση στην πρόταση : Όταν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει

$$\eta\mu A=4\cdot\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}\right)\cdot\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8}\right)\cdot\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{8}\right)\cdot\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{8}\right)$$

τότε είναι

Α. $A=90^\circ$ **Β.** $A=45^\circ$ **Γ.** $A=60^\circ$ **Δ.** $A=30^\circ$

10. Σε κάθε παράσταση που γράφεται στη στήλη I αντιστοιχεί το αποτέλεσμα της στη στήλη II . Να κάνετε τη σωστή αντιστοίχηση

	ΣΤΗΛΗ I	**ΣΤΗΛΗ II**
1	$\frac{\eta\mu2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}$	α) $\varepsilon\phi\alpha$
2	$\frac{\eta\mu2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}$	β) $\sigma\phi\alpha$
3	$\frac{\sigma\upsilon\nu2\alpha}{1+\eta\mu2\alpha}$	γ) $\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$
		δ) $\sigma\phi\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

ΕΠΙΛΟΓΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1.33 Να αποδείξτε ότι $\varepsilon\varphi(\alpha+30^\circ)\cdot\varepsilon\varphi(\alpha-30^\circ)=\dfrac{1-2\sigma\upsilon\nu2\alpha}{1+2\sigma\upsilon\nu2\alpha}$

ΛΥΣΗ

Α' μέλος $=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi30^\circ}{1-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi30^\circ}\cdot\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi30^\circ}{1+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi30^\circ}=\dfrac{\varepsilon\varphi^2\alpha-\varepsilon\varphi^2 30^\circ}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha\cdot\varepsilon\varphi^2 30^\circ}$

$$=\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha-\frac{3}{9}}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha\cdot\frac{3}{9}}=\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha-\frac{1}{3}}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha\cdot\frac{1}{3}}=\frac{3\varepsilon\varphi^2\alpha-1}{3-\varepsilon\varphi^2\alpha\cdot}=\frac{3\frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}-1}{3-\frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}=\frac{3\eta\mu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{3\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha}$$

$$=\frac{3\eta\mu^2\alpha-(1-\eta\mu^2\alpha)}{3\sigma\upsilon\nu^2\alpha-(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)}=\frac{4\eta\mu^2\alpha-1}{4\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1}\quad\textbf{(1)}$$

Β' μέλος $=\dfrac{1-2(1-2\eta\mu^2\alpha)}{1+2(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1)}=\dfrac{1-2+4\eta\mu^2\alpha}{1+4\sigma\upsilon\nu^2\alpha-2}==\dfrac{4\eta\mu^2\alpha-1}{4\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1}$ **(2)**

Από **(1)** και **(2)** προκύπτει η ζητούμενη ισότητα

1.34 Να αποδείξτε ότι :

1) $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha+\eta\mu2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha+\eta\mu2\alpha}=\varepsilon\varphi\alpha$ και 2) $\dfrac{1+\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}$

ΛΥΣΗ

1) $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha+\eta\mu2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha+\eta\mu2\alpha}=\dfrac{1-(1-2\eta\mu^2\alpha)+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1)+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}=\dfrac{2\eta\mu^2\alpha+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}=$

$\dfrac{2\eta\mu\alpha(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)}{2\sigma\upsilon\nu\alpha(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)}=\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\alpha$

2) $\dfrac{1+\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\dfrac{1+2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}-\left(1-2\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}\right)}{1+2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}+2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}-1}=$

αφού από το τόξο α στο ζητούμενο, θέλουμε τόξο $\dfrac{\alpha}{2}$)

$$\frac{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}+2\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}+\eta\mu\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}+\eta\mu\frac{\alpha}{2}\right)}=\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$$

1.35 Να αποδείξτε ότι : $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{7}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{7}=\frac{1}{8}$

ΛΥΣΗ

Από τον τύπο $\eta\mu 2\alpha=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha\frac{\eta\mu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha}$. Έτσι έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}=\frac{\eta\mu\frac{4\pi}{7}}{2\eta\mu\frac{2\pi}{7}}\ ,\ \ \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{7}=\frac{\eta\mu\frac{8\pi}{7}}{2\eta\mu\frac{4\pi}{7}}\ ,\ \ \sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{7}=\frac{\eta\mu\frac{16\pi}{7}}{2\eta\mu\frac{8\pi}{7}}=\frac{\eta\mu\left(2\pi+\frac{2\pi}{7}\right)}{2\eta\mu\frac{8\pi}{7}}=\frac{\eta\mu\frac{2\pi}{7}}{2\eta\mu\frac{8\pi}{7}}$$

έτσι το Α' μέλος της ζητούμενης ισότητας γράφεται:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{7}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{7}=\frac{\eta\mu\frac{4\pi}{7}}{2\eta\mu\frac{2\pi}{7}}\cdot\frac{\eta\mu\frac{8\pi}{7}}{2\eta\mu\frac{4\pi}{7}}\cdot\frac{\eta\mu\frac{2\pi}{7}}{2\eta\mu\frac{8\pi}{7}}=\frac{1}{8}$$

1.36 Να αποδείξτε ότι :

1) $\frac{1}{\eta\mu 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu 10^\circ}=4$ και 2) $\eta\mu 10^\circ\sigma\upsilon\nu 20^\circ\sigma\upsilon\nu 40^\circ=\frac{1}{8}\eta\mu 10^\circ$

ΛΥΣΗ

1) Η ζητούμενη με απαλοιφή παρανομαστών γράφεται:

$\sigma\upsilon\nu 10^\circ-\sqrt{3}\eta\mu 10^\circ=4\eta\mu 10^\circ\sigma\upsilon\nu 10^\circ$ ή

$\sigma\upsilon\nu 10^\circ-\varepsilon\phi 60^\circ\eta\mu 10^\circ=2\eta\mu 20^\circ$ ή

$\sigma\upsilon\nu 10^\circ-\frac{\eta\mu 60^\circ}{\sigma\upsilon\nu 60^\circ}\eta\mu 10^\circ=2\eta\mu 20^\circ$ ή

$\sigma\upsilon\nu 60^\circ\sigma\upsilon\nu 10^\circ-\eta\mu 60^\circ\eta\mu 10^\circ=2\eta\mu 20^\circ\sigma\upsilon\nu 60^\circ$ ή

$\sigma\upsilon\nu\left(60^\circ+10^\circ\right)=2\eta\mu 20^\circ\cdot\frac{1}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu 70^\circ=\eta\mu 20^\circ$ ή

$\sigma\upsilon\nu 70^\circ=\eta\mu\left(90^\circ-70^\circ\right)$ ή $\sigma\upsilon\nu 70^\circ=\sigma\upsilon\nu 70^\circ$ που ισχύει προφανώς

2) $\eta\mu 10^\circ\frac{\eta\mu 40^\circ}{2\eta\mu 20^\circ}\cdot\frac{\eta\mu 80^\circ}{2\eta\mu 40^\circ}=\frac{1}{4}\frac{\eta\mu 10^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu 10^\circ}{2\eta\mu 10^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu 10^\circ}=\frac{1}{8}$

Γράφουμε το $\sigma\upsilon\nu 20^\circ=\frac{\eta\mu 40^\circ}{2\eta\mu 20^\circ}$ αφού $\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{\eta\mu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha}$

1.37 Να αποδείξτε ότι :

1) $\eta\mu^4\frac{\pi}{8}+\eta\mu^4\frac{3\pi}{8}=\frac{3}{4}$ και 2) $\sigma\upsilon\nu 4\alpha-4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+3=8\eta\mu^4\alpha$

ΛΥΣΗ

1) Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του αποτετραγωνισμού του ημίτονου $\eta\mu^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$. Έτσι

$$\eta\mu^4\frac{\pi}{8}+\eta\mu^4\frac{3\pi}{8}=\left(\eta\mu\frac{\pi}{8}\right)^2+\left(\eta\mu\frac{3\pi}{8}\right)^2=\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}}{2}\right)^2=$$

$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=$$

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}-\sqrt{2}\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)=$$

$$\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

2) $\sigma\upsilon\nu 4\alpha-4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+3=\sigma\upsilon\nu 2\cdot 2\alpha-4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+3=$

$$2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha-1-4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+3=2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha-4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+2=$$

$$2\left(\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha-2\sigma\upsilon\nu 2\alpha+1\right)=2\left(\sigma\upsilon\nu 2\alpha-1\right)^2=2\left(1-2\eta\mu^2\alpha-1\right)^2=$$

$$2\cdot 4\eta\mu^4\alpha=8\eta\mu^4\alpha$$

1.38 Να αποδείξτε ότι :

$$\sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{8}+\sigma\upsilon\nu^4\frac{3\pi}{8}+\sigma\upsilon\nu^4\frac{5\pi}{8}+\sigma\upsilon\nu^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}=-\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=-\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{8}$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8}=-\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)=-\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{8}=-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{8}$$

Συνεπώς έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{8}+\sigma\upsilon\nu^4\frac{3\pi}{8}+\sigma\upsilon\nu^4\frac{5\pi}{8}+\sigma\upsilon\nu^4\frac{7\pi}{8}=\sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{8}+\eta\mu^4\frac{\pi}{8}+\eta\mu^4\frac{\pi}{8}+\sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{8}=$$

$$2\left(\sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{8}+\eta\mu^4\frac{\pi}{8}\right)=2\left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8}+\eta\mu^2\frac{\pi}{8}\right)^2-4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8}\eta\mu^2\frac{\pi}{8}=$$

$$2-\eta\mu^2\frac{\pi}{4}=2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2-\frac{2}{4}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

1.39 Αν $\sigma\phi\alpha = -\frac{7}{24}$ και $450^\circ < \alpha < 540^\circ$, να υπολογιστούν οι αριθμοί:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} \text{ και } \eta\mu 2\alpha$$

ΛΥΣΗ

Επειδή $450^\circ < \alpha < 540^\circ$ είναι $\eta\mu\alpha > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha < 0$

Επίσης έχουμε $225^\circ < \frac{\alpha}{2} < 270^\circ$, οπότε $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} < 0$

Συνεπώς είναι: $\eta\mu^2\alpha = \frac{1}{1+\sigma\phi^2\alpha}$, οπότε

$$\eta\mu\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma\phi^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{49}{576}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{625}{576}}} = \frac{24}{25} \quad \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1-\eta\mu^2\alpha = 1-\frac{576}{625} = \frac{625-576}{625} = \frac{49}{625}.$$

Άρα $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\sqrt{\frac{49}{625}} = -\frac{7}{25}$. Επομένως έχουμε: $\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2} = \frac{1-\frac{7}{25}}{2} = \frac{9}{25}$,

Άρα $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$ $\quad \eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = 2\cdot\frac{24}{25}\left(-\frac{7}{25}\right) = -\frac{336}{625}$

1.40 Αποδείξτε ότι:

i) $\eta\mu 3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$

ii) $\sigma\upsilon\nu 3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$

iii) $\varepsilon\phi 3\alpha = \frac{3\varepsilon\phi\alpha - \varepsilon\phi^3\alpha}{1-3\varepsilon\phi^2\alpha}$, για $\alpha \neq \lambda\pi + \frac{\pi}{2}$ και $3\alpha \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$,

ΛΥΣΗ

Έχουμε

i) $\eta\mu 3\alpha = \eta\mu(2\alpha+\alpha) = \eta\mu 2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha\left(1-2\eta\mu^2\alpha\right) =$

$2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha$

$2\eta\mu\alpha\left(1-\eta\mu^2\alpha\right) + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha = 2\eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha =$

$3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$

ii) $\sigma\upsilon\nu 3\alpha = \sigma\upsilon\nu(2\alpha+\alpha) = \sigma\upsilon\nu 2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu 2\alpha\eta\mu\alpha =$

$\left(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1\right)\sigma\upsilon\nu\alpha - 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha - 2\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu^2\alpha =$

$2\sigma\upsilon\nu^3\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha - 2\sigma\upsilon\nu\alpha\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha\right) = 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha - 2\sigma\upsilon\nu\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha =$

$4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$

iii) $\varepsilon\phi 3\alpha = \varepsilon\phi(2\alpha+\alpha) = \frac{\varepsilon\phi 2\alpha + \varepsilon\phi\alpha}{1-\varepsilon\phi 2\alpha\varepsilon\phi\alpha} = \frac{\frac{2\varepsilon\phi\alpha}{1-\varepsilon\phi^2\alpha} + \varepsilon\phi\alpha}{1-\frac{2\varepsilon\phi\alpha}{1-\varepsilon\phi^2\alpha}\varepsilon\phi\alpha} =$

$$\frac{2\varepsilon\phi\alpha + \varepsilon\phi\alpha\left(1-\varepsilon\phi^2\alpha\right)}{1-\varepsilon\phi^2\alpha - 2\varepsilon\phi^2\alpha} = \frac{3\varepsilon\phi\alpha - \varepsilon\phi^3\alpha}{1-3\varepsilon\phi^2\alpha}$$

1.41 Αποδείξτε ότι:

i) $4\left(\eta\mu^2 36^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 18^\circ\right) = 5$ ii) $4\eta\mu 36^\circ \sigma\upsilon\nu 18^\circ = \sqrt{5}$

ΛΥΣΗ

i) Είναι $3 \cdot 36^\circ = 180^\circ - 2 \cdot 36^\circ$, οπότε

$$\eta\mu 3 \cdot 36^\circ = \eta\mu\left(180^\circ - 2 \cdot 36^\circ\right) \Leftrightarrow \eta\mu 3 \cdot 36^\circ = \eta\mu 2 \cdot 36^\circ \Leftrightarrow$$

$$3\eta\mu 36^\circ - 4\eta\mu^3 36^\circ = 2\eta\mu 36^\circ \sigma\upsilon\nu 36^\circ \Leftrightarrow \eta\mu 36^\circ\left(3 - 4\eta\mu^2 36^\circ\right) = 2\eta\mu 36^\circ \sigma\upsilon\nu 36^\circ \Leftrightarrow$$

$$3 - 4\eta\mu^2 36^\circ = 2\sigma\upsilon\nu 36^\circ \qquad (1)$$

γιατί $\eta\mu 36^\circ \neq 0$

Η (1) γράφεται διαδοχικά: $3 - 4\eta\mu^2 36^\circ = 2\sigma\upsilon\nu 2 \cdot 18^\circ$

$$3 - 4\eta\mu^2 36^\circ = 2\left(2\sigma\upsilon\nu^2 18^\circ - 1\right) \Leftrightarrow 3 - 4\eta\mu^2 36^\circ = 4\sigma\upsilon\nu^2 18^\circ - 2 \Leftrightarrow$$

$$4\left(\eta\mu^2 36^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 18^\circ\right) = 5$$

ii) Η ισότητα (1) γράφεται :

$$3 - 4\eta\mu^2 36^\circ = 2\sigma\upsilon\nu 36^\circ \Leftrightarrow 3 - 4\left(1 - \sigma\upsilon\nu^2 36^\circ\right) = 2\sigma\upsilon\nu 36^\circ \Leftrightarrow$$

$$4\sigma\upsilon\nu^2 36^\circ - 2\sigma\upsilon\nu 36^\circ - 1 = 0 \qquad (2)$$

Έχουμε $16\eta\mu^2 36^\circ \sigma\upsilon\nu^2 18^\circ = 8\eta\mu^2 36^\circ \cdot 2\sigma\upsilon\nu^2 18^\circ = 8\left(1 - \sigma\upsilon\nu^2 18^\circ\right)\left(1 + \sigma\upsilon\nu 36^\circ\right)$

$$\overset{(2)}{=} 8\left(1 - \frac{1 + 2\sigma\upsilon\nu 36^\circ}{4}\right)\left(1 + \sigma\upsilon\nu 36^\circ\right) = \left[8 - 2\left(1 + 2\sigma\upsilon\nu 36^\circ\right)\right]\left(1 + \sigma\upsilon\nu 36^\circ\right)$$

$$= \left(8 - 2 - 4\sigma\upsilon\nu 36^\circ\right)\left(1 + \sigma\upsilon\nu 36^\circ\right) = \left(6 - 4\sigma\upsilon\nu 36^\circ\right)\left(1 + \sigma\upsilon\nu 36^\circ\right)$$

$$= 6 + 6\sigma\upsilon\nu 36^\circ - 4\sigma\upsilon\nu 36^\circ - 4\sigma\upsilon\nu^2 36^\circ = 6 - 4\sigma\upsilon\nu^2 36^\circ + 2\sigma\upsilon\nu 36^\circ$$

$$= 6 - \left(4\sigma\upsilon\nu^2 36^\circ - 2\sigma\upsilon\nu 36^\circ\right) \overset{(2)}{=} 6 - 1 = 5$$

Συνεπώς $16\eta\mu^2 36^\circ \sigma\upsilon\nu^2 18^\circ = 5$, οπότε $4\eta\mu 36^\circ \sigma\upsilon\nu 18^\circ = \sqrt{5}$

γιατί $\eta\mu 36^\circ > 0$ και $\eta\mu 18^\circ > 0$

1.42 Αποδείξτε ότι:

i) $\dfrac{3+\sigma\upsilon\nu 2\chi}{2+\varepsilon\phi^2\chi}+\dfrac{3-\sigma\upsilon\nu 2\chi}{2+\sigma\phi^2\chi}=2$

ii) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\chi+4\sigma\upsilon\nu\chi+3}{1+\sigma\upsilon\nu\chi}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\chi-4\sigma\upsilon\nu\chi+3}{1-\sigma\upsilon\nu\chi}=4$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε

$$\frac{3+\sigma\upsilon\nu 2\chi}{2+\varepsilon\phi^2\chi}+\frac{3-\sigma\upsilon\nu 2\chi}{2+\sigma\phi^2\chi}=\frac{3+\sigma\upsilon\nu 2\chi}{1+1+\varepsilon\phi^2\chi}+\frac{3-\sigma\upsilon\nu 2\chi}{1+1+\sigma\phi^2\chi}=$$

$$\frac{2+1+\sigma\upsilon\nu 2\chi}{1+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}}+\frac{2+1-\sigma\upsilon\nu 2\chi}{1+\dfrac{1}{\eta\mu^2\chi}}=\frac{2+2\sigma\upsilon\nu^2\chi}{1+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}}+\frac{2+2\eta\mu^2\chi}{1+\dfrac{1}{\eta\mu^2\chi}}=$$

$$\frac{2\sigma\upsilon\nu^2\chi\left(1+\sigma\upsilon\nu^2\chi\right)}{1+\sigma\upsilon\nu^2\chi}+\frac{2\eta\mu^2\chi\left(1+\eta\mu^2\chi\right)}{1+\eta\mu^2\chi}=2\sigma\upsilon\nu^2\chi+2\eta\mu^2\chi=2\left(\sigma\upsilon\nu^2\chi+\eta\mu^2\chi\right)=2$$

ii) Είναι

$$\frac{\sigma\upsilon\nu 2\chi+4\sigma\upsilon\nu\chi+3}{1+\sigma\upsilon\nu\chi}+\frac{\sigma\upsilon\nu 2\chi-4\sigma\upsilon\nu\chi+3}{1-\sigma\upsilon\nu\chi}=\frac{2\sigma\upsilon\nu^2\chi-1+4\sigma\upsilon\nu\chi+3}{1+\sigma\upsilon\nu\chi}+\frac{2\sigma\upsilon\nu^2\chi-1-4\sigma\upsilon\nu\chi+3}{1-\sigma\upsilon\nu\chi}=$$

$$\frac{2\left(\sigma\upsilon\nu^2\chi+2\sigma\upsilon\nu\chi+1\right)}{1+\sigma\upsilon\nu\chi}+\frac{2\left(\sigma\upsilon\nu^2\chi-2\sigma\upsilon\nu\chi+1\right)}{1-\sigma\upsilon\nu\chi}=$$

$$\frac{2\left(\sigma\upsilon\nu\chi+1\right)^2}{1+\sigma\upsilon\nu\chi}+\frac{2\left(\sigma\upsilon\nu\chi-1\right)^2}{1-\sigma\upsilon\nu\chi}=2\left(\sigma\upsilon\nu\chi+1\right)+2\left(1-\sigma\upsilon\nu\chi\right)=2\sigma\upsilon\nu\chi+2+2-2\sigma\upsilon\nu\chi=4$$

1.43 Αποδείξτε ότι: $\dfrac{\left(\text{συν}\alpha+\text{συν}\dfrac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\text{ημ}\alpha+\text{ημ}\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}{2\text{ημ}\dfrac{\alpha}{2}}=\text{σφ}\dfrac{\alpha}{4}$

ΛΥΣΗ

$$\frac{\left(\text{συν}\alpha+\text{συν}\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\text{ημ}\alpha+\text{ημ}\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2\text{ημ}\frac{\alpha}{2}}=$$

$$\frac{\text{συν}^2\alpha+\text{συν}^2\frac{\alpha}{2}+2\text{συν}\alpha\text{συν}\frac{\alpha}{2}+\text{ημ}^2\alpha+\text{ημ}^2\frac{\alpha}{2}+2\text{ημ}\alpha\text{ημ}\frac{\alpha}{2}}{2\text{ημ}\frac{\alpha}{2}}=$$

$$\frac{1+1+2\left(\text{συν}\alpha\text{συν}\frac{\alpha}{2}+\text{ημ}\alpha\text{ημ}\frac{\alpha}{2}\right)}{2\text{ημ}\frac{\alpha}{2}}=\frac{2+2\text{συν}\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\text{ημ}\frac{\alpha}{2}}=$$

$$\frac{1+\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{\eta\mu\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{4}}{2\eta\mu\frac{\alpha}{4}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4}}{\eta\mu\frac{\alpha}{4}}=\sigma\phi\frac{\alpha}{4}$$

1.44 Αποδείξτε ότι:i) $\varepsilon\phi\dfrac{\chi}{2}=\dfrac{\eta\mu 2\chi}{1+\sigma\upsilon\nu 2\chi}\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi}$

ii) $\text{εφ}\chi+2\text{εφ}2\chi+4\text{εφ}4\chi+8\text{σφ}8\chi=\text{σφ}\chi$

ΛΥΣΗ

i) Είναι $\dfrac{\eta\mu 2\chi}{1+\sigma\upsilon\nu 2\chi}\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi}=\dfrac{2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi}{2\sigma\upsilon\nu^2\chi}\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{2\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\chi}{2}}=\dfrac{\text{ημ}\chi}{2\text{συν}^2\dfrac{\chi}{2}}=\dfrac{2\text{ημ}\dfrac{\chi}{2}\text{συν}\dfrac{\chi}{2}}{2\text{συν}^2\dfrac{\chi}{2}}=\dfrac{\text{ημ}\dfrac{\chi}{2}}{\text{συν}\dfrac{\chi}{2}}=\text{εφ}\dfrac{\chi}{2}$

ii) Έχουμε $\varepsilon\phi\chi-\sigma\phi\chi=\dfrac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}=-\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\chi-\eta\mu^2\chi}{\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi}=-\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\chi}{\eta\mu 2\chi}=-2\sigma\phi 2\chi$ (1)

Όμοια $2\varepsilon\phi 2\chi-2\sigma\phi 2\chi=-4\sigma\phi 4\chi$ (2)

$4\varepsilon\phi 4\chi-4\sigma\phi 4\chi=-8\sigma\phi 8\chi$ (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες (1), (2) και (3) έχουμε:

$\text{εφ}\chi-\text{σφ}\chi+2\text{εφ}2\chi-2\text{σφ}2\chi+4\text{εφ}4\chi-4\text{σφ}4\chi=$

$-2\text{σφ}2\chi-4\text{σφ}4\chi-8\text{σφ}8\chi \quad \Leftrightarrow$

$\text{εφ}\chi+2\text{εφ}2\chi+4\text{εφ}4\chi+8\text{σφ}8\chi=\text{σφ}\chi$

1.45 i) Να αποδείξτε ότι $4\left(\eta\mu^6\alpha+\sigma\upsilon\nu^6\alpha\right)=1+3\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha$

ii) Να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο της παράστασης $A=\eta\mu^6\alpha+\sigma\upsilon\nu^6\alpha,\ \alpha\in[0,\pi)$ καθώς και τις τιμές του α για τις οποίες η παράσταση γίνεται μέγιστη ή ελάχιστη.

ΛΥΣΗ

i) Είναι

$$4\left(\eta\mu^6\alpha+\sigma\upsilon\nu^6\alpha\right)=4\left[\left(\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha\right)^3-3\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha\left(\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha\right)\right]=$$
$$4\left(1-3\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha\right)=4-3\cdot4\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha=4-3\eta\mu^2 2\alpha=$$
$$4-3\left(1-\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha\right)=1+3\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha$$

ii) Είναι $A=\eta\mu^6\alpha+\sigma\upsilon\nu^6\alpha=\dfrac{1+3\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha}{4}$

Αλλά για κάθε $\alpha\in[0,\pi)$ είναι $0\le\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha\le1 \Leftrightarrow 0\le3\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha\le3 \Leftrightarrow 1\le1+3\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha\le4 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{4}\le\frac{1+3\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha}{4}\le1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\le A\le1$$

Άρα $A\min=\dfrac{1}{4}$ και $A\max=1$

Το ελάχιστο του A παρουσιάζεται όταν το $\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu 2\alpha=0\Leftrightarrow$

$$2\alpha=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow$$
$$\alpha=\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\quad \kappa\in Z$$

Αλλά $\alpha\in[0,\pi)$ συνεπώς είναι $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ ή $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$

Το μέγιστο του A παρουσιάζεται όταν το $\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha=1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu 2\alpha=\pm1\Leftrightarrow$

$2\alpha=2\kappa\pi\Leftrightarrow\alpha=\kappa\pi,\ \ \kappa\in Z$ Αλλά $\alpha\in[0,\pi)$ συνεπώς είναι $\alpha=0$

$2\alpha=2\kappa\pi+\pi\Leftrightarrow\alpha=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \ \kappa\in Z$ άρα $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$

1.46 i)Αν $\eta\mu 2\chi = \mathrm{t}$, να γραφεί η παράσταση

$$E = 1 + \eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi + \alpha\left(\eta\mu^4\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi\right) - 3\alpha\left(\eta\mu^6\chi + \sigma\upsilon\nu^6\chi\right)$$

ως συνάρτηση του t

ii) Να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες η παράσταση E είναι ανεξάρτητη του χ

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε : $\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi = \dfrac{4\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi}{4} = \dfrac{(2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi)^2}{4} = \dfrac{\eta\mu^2 2\chi}{4} = \dfrac{\mathrm{t}^2}{4}$

$$\eta\mu^4\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi = \left(\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi\right)^2 - 2\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi =$$

$$1 - \frac{1}{2}\eta\mu^2 2\chi = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{t}^2$$

$$\eta\mu^6\chi + \sigma\upsilon\nu^6\chi = \left(\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi\right)^3 - 3\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi\left(\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi\right) =$$

$$1 - 3\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi = 1 - \frac{3}{4}\eta\mu^2 2\chi = 1 - \frac{3}{4}\mathrm{t}^2$$

Συνεπώς είναι :

$$\mathrm{E} = 1 + \frac{\mathrm{t}^2}{4} + \alpha\left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{t}^2\right) - 3\alpha\left(1 - \frac{3}{4}\mathrm{t}^2\right) = 1 + \frac{\mathrm{t}^2}{4} + \alpha\left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{t}^2 - 3 + \frac{9}{4}\mathrm{t}^2\right) =$$

$$1 + \frac{\mathrm{t}^2}{4} + \alpha\frac{9\mathrm{t}^2 - 2\mathrm{t}^2 - 8}{4} = 1 + \frac{\mathrm{t}^2 + 7\mathrm{t}^2\alpha - 8\alpha}{4} = 1 - 2\alpha + \frac{(7\alpha + 1)\mathrm{t}^2}{4}$$

ii) Η παράσταση Ε είναι ανεξάρτητη του χ, όταν είναι ανεξάρτητη του t δηλαδή όταν

$7\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\dfrac{1}{7}$ Για $\alpha = -\dfrac{1}{7}$ έχουμε $E = 1 + \dfrac{2}{7} = \dfrac{9}{7}$

1.47 Αποδείξτε ότι: i) $\eta\mu^4\alpha + \sigma\upsilon\nu^4\alpha \geq \dfrac{1}{2}$ ii) $\eta\mu^6\alpha + \sigma\upsilon\nu^6\alpha \geq \dfrac{1}{4}$

ΛΥΣΗ

i) Είναι:

$$\eta\mu^4\alpha + \sigma\upsilon\nu^4\alpha - \frac{1}{2} = 1 - 2\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha =$$

$$\frac{1 - 4\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{2} = \frac{1 - \eta\mu^2 2\alpha}{2} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha}{2} \geq 0$$

όποτε $\eta\mu^4\alpha + \sigma\upsilon\nu^4\alpha \geq \dfrac{1}{2}$

ii) Είναι :

$$\eta\mu^6\alpha + \sigma\upsilon\nu^6\alpha - \frac{1}{4} = \left(\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha\right)^3 - \frac{1}{4} - 3\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha\left(\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha\right) =$$

$$1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}4\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\eta\mu^2 2\alpha = \frac{3}{4}\left(1 - \eta\mu^2 2\alpha\right) = \frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha \geq 0$$

οπότε

$$\eta\mu^6\alpha + \sigma\upsilon\nu^6\alpha \geq \frac{1}{4}$$

1.48 Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu 2\chi + 2\eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\chi}{2}$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$\eta\mu 2\chi + 2\eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\chi}{2} \Leftrightarrow 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + 2\eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\chi}{2} \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu\chi(\sigma\upsilon\nu\chi + 1) - \eta\mu\frac{\chi}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu\chi 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\chi}{2} - \eta\mu\frac{\chi}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$8\eta\mu\frac{\chi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\chi}{2} - \eta\mu\frac{\chi}{2} = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\chi}{2}\left(8\sigma\upsilon\nu^3\frac{\chi}{2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\frac{\chi}{2} = 0 \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu^3\frac{\chi}{2} = \frac{1}{8}$$

- $\eta\mu\frac{\chi}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\chi}{2} = \kappa\pi \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi$, $\kappa \in Z$
- $\sigma\upsilon\nu^3\frac{\chi}{2} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\chi}{2} = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = 4\kappa\pi \pm \frac{4\pi}{3}$, $\kappa \in Z$

1.49 Να λύσετε τις εξισώσεις : i) $2\eta\mu^2\chi + \eta\mu^2 2\chi = 2$ ii) $\sigma\upsilon\nu 2\chi = 6\eta\mu^2\chi - 1$

ΛΥΣΗ

i) $2\eta\mu^2\chi + \eta\mu^2 2\chi = 2 \Leftrightarrow 2\eta\mu^2\chi + (2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi)^2 = 2$ ή

$$2\eta\mu^2\chi + 4\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi = 2(\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi)$$

$$\eta\mu^2\chi + 2\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi = \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi$$

$$2\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi = \sigma\upsilon\nu^2\chi$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\chi(2\eta\mu^2\chi - 1) = 0$$

$$-\sigma\upsilon\nu^2\chi(1 - 2\eta\mu^2\chi) = 0$$

$$-\sigma\upsilon\nu^2\chi\sigma\upsilon\nu 2\chi = 0$$

Άρα $\sigma\upsilon\nu^2\chi = 0$ ή $\sigma\upsilon\nu 2\chi = 0$

- $\sigma\upsilon\nu^2\chi = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in Z$
- $\sigma\upsilon\nu 2\chi = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = \lambda\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $\kappa \in Z$

ii) $\sigma\upsilon\nu 2\chi = 6\eta\mu^2\chi - 1 \Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu^2\chi = 6\eta\mu^2\chi - 1 \Leftrightarrow 2 = 8\eta\mu^2\chi \Leftrightarrow$

$$\eta\mu^2\chi = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \pm\frac{1}{2}$$

- $\eta\mu\chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $\chi = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, \kappa \in Z$
- $\eta\mu\chi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{6}$ ή $\chi = 2\lambda\pi + \pi + \frac{\pi}{6}, \lambda \in Z$

1.50 Να λύσετε τις εξισώσεις : i) $\sigma\upsilon\nu 2\chi + 3\eta\mu\chi + 1 = 0$, $\chi \in [0\,,\,2\pi]$

ii) $\sigma\upsilon\nu 2\chi + 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\chi}{2} = 0$

ΛΥΣΗ

i) $\sigma\upsilon\nu 2\chi + 3\eta\mu\chi + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu^2\chi + 3\eta\mu\chi + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$-2\eta\mu^2\chi + 3\eta\mu\chi + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu^2\chi - 3\eta\mu\chi - 2 = 0$

Θέτουμε $\eta\mu\chi = \omega$ και έχουμε $2\omega^2 - 3\omega - 2 = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = 2\ ,\ \ \omega_2 = -\frac{1}{2}$

Οπότε $\eta\mu\chi = 2$ που είναι αδύνατο αφού $-1 \le \eta\mu\chi \le 1$ και

$\eta\mu\chi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ ή $\chi = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6}$

όπου $\kappa \in Z$

Από $[0\,,2\pi] \Leftrightarrow 0 \le \chi \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le 2\kappa - \frac{1}{6} \le 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6} \le 2\kappa \le \frac{13}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{12} \le \kappa \le \frac{13}{12} \Leftrightarrow \kappa = 1$ αφού $\kappa \in Z$

Έτσι $\chi = 2\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = \frac{11\pi}{6}$

Όμοια

$0 \le \chi \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \le 2\pi \Leftrightarrow$

$0 \le 2\kappa + \frac{7}{6} \le 2 \Leftrightarrow 0 \le 12\kappa + 7 \le 12 \Leftrightarrow$

$-7 \le 12\kappa \le 5 \Leftrightarrow -\frac{7}{12} \le \kappa \le \frac{5}{12} \Leftrightarrow \kappa = 0$ αφού $\kappa \in Z$

Άρα $\chi = \frac{7\pi}{6}$. Συνεπώς οι λύσεις τις εξίσωσης είναι $\chi = \frac{11\pi}{6}$ και $\chi = \frac{7\pi}{6}$

ii) Από το 2χ και το $\frac{\chi}{2}$ θα μεταβούμε στο τόξο χ , $2\chi \to \chi \leftarrow \frac{\chi}{2}$ με τους γνωστούς τύπους.

Έτσι έχουμε $\sigma\upsilon\nu 2\chi + 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\chi}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\chi - 1 + 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\chi}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$2\sigma\upsilon\nu^2\chi + \left(2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\chi}{2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\chi(2\sigma\upsilon\nu\chi + 1) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = 0$ ή $\sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{1}{2}$

- $\sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $\chi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$
$,\kappa \in Z$
- $\sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi + \frac{2\pi}{3}$ ή $\chi = 2\lambda\pi - \frac{2\pi}{3}$, $\lambda \in Z$

1.51 Αν σε ένα τρίγωνο ισχύει η σχέση

$$\frac{\eta\mu 2B+\eta\mu B}{1+\sigma\upsilon\nu 2B+\sigma\upsilon\nu B}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2A}{\eta\mu 2A}$$

να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές

ΛΥΣΗ

Η δεδομένη σχέση γράφεται $\frac{2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B+\eta\mu B}{1+2\sigma\upsilon\nu^2 B-1+\sigma\upsilon\nu B}=\frac{1-\left(1-2\eta\mu^2 A\right)}{2\eta\mu A\sigma\upsilon\nu A}$ ή

$$\frac{2\eta\mu B(2\sigma\upsilon\nu B+1)}{\sigma\upsilon\nu B(2\sigma\upsilon\nu B+1)}=\frac{2\eta\mu^2 A}{2\eta\mu A\sigma\upsilon\nu A}$$

$$\varepsilon\phi B=\frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A}\Leftrightarrow \varepsilon\phi B=\varepsilon\phi A$$

Άρα $B=A$ ή $B=180^\circ+A$ Άτοπο, άρα $B=A$ και το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

1.52 Αν σε ένα τρίγωνο ισχύει η σχέση

$$\eta\mu A-\sigma\upsilon\nu A=1$$

να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο

ΛΥΣΗ

Η δεδομένη σχέση γράφεται $2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}-\left(2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}-1\right)=1$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}-2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}+1=1\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\left(\eta\mu\frac{A}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=0 \quad \text{ή} \quad \eta\mu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$$

$$\left(\frac{A}{2}=90^\circ \quad \text{ή} \quad \frac{A}{2}=270^\circ\right) \quad \text{ή} \quad \eta\mu\frac{A}{2}=\eta\mu\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$A=180^\circ$ ή $A=540^\circ$ άτοπο ή

$\frac{A}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}\Leftrightarrow 2\frac{A}{2}=90^\circ\Leftrightarrow A=90^\circ$ το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Απαντήστε αν είναι σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) οι παρακάτω σχέσεις

i) $\eta\mu^2 15^\circ = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$ **Σ** ή **Λ**

ii) $\eta\mu 15^\circ \cdot \eta\mu 75^\circ = \dfrac{1}{2}$ **Σ** ή **Λ**

iii) $\dfrac{2\varepsilon\phi\dfrac{\pi}{8}}{1-\varepsilon\phi^2\dfrac{\pi}{8}} = 1$ **Σ** ή **Λ**

iv) $\varepsilon\phi^2 22{,}5^\circ = 1$ **Σ** ή **Λ**

v) $2\sigma\upsilon\nu^2 75^\circ = 1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **Σ** ή **Λ**

2. Σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης **Α** να αντιστοιχίσετε τον τύπο του από την στήλη **Β**

	ΣΤΗΛΗ Α		ΣΤΗΛΗ Β
i)	$\eta\mu^2\alpha$	α)	$\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
ii)	$\sigma\upsilon\nu^2\alpha$	β)	$\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$
iii)	$\varepsilon\phi^2\alpha$	γ)	$\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
iv)	$\sigma\phi^2\alpha$	δ)	$\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$

3. Επιλέξτε την σωστή απάντηση

Αν $\dfrac{29\pi}{2} < \alpha < 15\pi$ και $\eta\mu\alpha = \dfrac{4}{5}$ τότε η τιμή της παράστασης

$K = \eta\mu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \varepsilon\phi 2\alpha \cdot \sigma\phi 2\alpha$ είναι

Α. $-\dfrac{31}{25}$ **Β.** $\dfrac{17}{25}$ **Γ.** $\dfrac{42}{25}$ **Δ.** $-\dfrac{6}{25}$

4. Σε κάθε σχέση που γράφεται στην στήλη Ι για τρίγωνο $AB\Gamma$ αντιστοιχεί ένα αποτέλεσμα για τις γωνίες του στη στήλη ΙΙ. Να κάνετε την σωστή αντιστοίχιση.

ΣΤΗΛΗ Ι	ΣΤΗΛΗ ΙΙ
i) $2\eta\mu\dfrac{B}{2}\eta\mu\dfrac{A+\Gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu^2\dfrac{B}{2} - \sigma\upsilon\nu^2\dfrac{A+\Gamma}{2}$	α) $A = 60^\circ$
ii) $1+\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma) = \sigma\upsilon\nu\dfrac{B+\Gamma}{2}$	β) $B = 45^\circ$
iii) $\sigma\upsilon\nu\dfrac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2} = \dfrac{1}{2}$	γ) $\Gamma = 90^\circ$

5. Απαντήστε αν είναι σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) οι παρακάτω ισότητες

1) $\sigma\upsilon\nu 20^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 40^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 80^\circ = \frac{1}{8}$ **Σ** ή **Λ**

2) $\sigma\upsilon\nu^4 15^\circ + \eta\mu^4 15^\circ = \frac{1}{8}$ **Σ** ή **Λ**

3) $\sigma\upsilon\nu^4 22{,}5^\circ + \eta\mu^4 67{,}5^\circ = \frac{1}{8}$ **Σ** ή **Λ**

6. Επιλέξτε την σωστή απάντηση για την τιμή της παράστασης

1) $K = 7 + \sigma\upsilon\nu 52^\circ + 2\sigma\upsilon\nu^2 64^\circ$

Α. 0 **Β.** 2 **Γ.** 4 **Δ.** 8

2) $M = \frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$

Α. 0 **Β.** 2 **Γ.** 4 **Δ.** -2

3) $\Lambda = 1 - \varepsilon\varphi^2 \frac{\pi}{8}$

Α. $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{8}$ **Β.** $2\varepsilon\varphi\frac{\pi}{8}$ **Γ.** $1+\varepsilon\varphi\frac{\pi}{8}$ **Δ.** $1-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{8}$

7. Σε κάθε μια από τις παραστάσεις που γράφεται στην στήλη Ι αντιστοιχεί ένα αποτέλεσμα στη στήλη ΙΙ. Να κάνετε την σωστή αντιστοίχιση.

ΣΤΗΛΗ Ι	ΣΤΗΛΗ ΙΙ
1) $\varepsilon\varphi(45^\circ - \alpha)$	α) $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1-\eta\mu 2\alpha}$
2) $\sigma\varphi(45^\circ - \alpha)$	β) $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha}$
3) $\varepsilon\varphi(\alpha + 60^\circ)\varepsilon\varphi(\alpha - 60^\circ)$	γ) $\frac{1+2\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1-2\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$
4) $1 - \varepsilon\varphi^2\alpha$	δ) $\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$
	ε) $\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi 2\alpha}$

8. Σε κάθε σχέση που γράφεται στην στήλη Ι για τρίγωνο $AB\Gamma$ αντιστοιχεί το είδος του τριγώνου από την στήλη ΙΙ. Να κάνετε την σωστή αντιστοίχιση.

ΣΤΗΛΗ Ι	ΣΤΗΛΗ ΙΙ
1) $1 - 2\eta\mu^2\frac{B}{2} = 2\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} - 1$	α) ορθογώνιο
2) $\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$	β) ισόπλευρο
3) $1 - 2\eta\mu^2\frac{A}{2} = -\frac{1}{5}$	γ) ισοσκελές
	δ) αμβλυγώνιο

9. Να δείξετε ότι:

i) $\dfrac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}$ ii) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha}=2\varepsilon\varphi\alpha$

10. Να δείξετε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{15}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{15}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{15}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{15}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{15}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{6\pi}{15}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{2^7}$$

11. Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha=\dfrac{1}{4},\ \ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$\eta\mu 2\alpha,\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha,\ \varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}$.

12. Υπολογίστε τους αριθμούς $\eta\mu\dfrac{\alpha}{2},\ \sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{2},\ \varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}$ όταν δίνεται :

α) $\sigma\upsilon\nu\alpha=-\dfrac{4}{5},\ \ \alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ β) $\eta\mu\alpha=\dfrac{12}{13},\ \ \alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ γ) $\varepsilon\varphi\alpha=2\sqrt{2},\ \ \alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$

13. Να δείξετε ότι: $(\eta\mu 2\alpha+\eta\mu 4\alpha)^2+(\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 4\alpha)^2=4\sigma\upsilon\nu^2\alpha$

14. Να δείξετε ότι:

i) $\varepsilon\varphi\alpha=\sigma\varphi\alpha-2\sigma\varphi 2\alpha$

ii) $\varepsilon\varphi\alpha+2\varepsilon\varphi 2\alpha+4\varepsilon\varphi 4\alpha+8\varepsilon\varphi 8\alpha=\sigma\varphi\alpha-16\sigma\varphi 16\alpha$

15. Αν $\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right),\ \ \beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ και $\eta\mu\alpha=-\dfrac{5}{13},\ \sigma\upsilon\nu\beta=-\dfrac{4}{5}$,

να υπολογίσετε τα $\eta\mu(2\alpha+\beta),\ \ \sigma\upsilon\nu(2\alpha-\beta)$.

16. Να αποδείξετε ότι:

i) $\varepsilon\varphi 20^\circ\,\varepsilon\varphi 40^\circ\,\varepsilon\varphi 60^\circ\,\varepsilon\varphi 80^\circ=3$

ii) $\varepsilon\varphi 10^\circ\,\varepsilon\varphi 50^\circ\,\varepsilon\varphi 80^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

17. Για $\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}\right]$, να αποδείξετε ότι :

$$\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sqrt{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\sqrt{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}}=\sqrt{2}$$

18. Αποδείξετε ότι :

i) $\varepsilon\phi 9^\circ - \varepsilon\phi 27^\circ - \varepsilon\phi 63^\circ + \varepsilon\phi 18^\circ = 4$

ii) $\varepsilon\phi 6^\circ \varepsilon\phi 66^\circ \varepsilon\phi 42^\circ \varepsilon\phi 78^\circ = \frac{1}{16}$

19. Αποδείξετε ότι :

i) $\eta\mu 24^\circ \eta\mu 272^\circ + \eta\mu 36^\circ \eta\mu 78^\circ = \sigma\upsilon\nu 12^\circ \sigma\upsilon\nu 18^\circ$

ii) $\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{16} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{3\pi}{16} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{5\pi}{16} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{7\pi}{16} =$

$= 16\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{8}\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{8} = 2$

20. Αποδείξετε ότι : $\left|\frac{1+\eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha}\right| \le \sqrt{2}$ για κάθε $\alpha \ne \kappa\pi + \frac{3\pi}{4},\ \kappa \in Z$

21. Να αποδείξετε ότι :

i) $1 - \varepsilon\phi^2\alpha = \frac{2\varepsilon\phi\alpha}{\varepsilon\phi 2\alpha}$

ii) $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha}$

iii) $\frac{\left(1-\varepsilon\phi^2\frac{\pi}{7}\right)\left(1-\varepsilon\phi^2\frac{2\pi}{7}\right)\left(1-\varepsilon\phi^2\frac{4\pi}{7}\right)}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{7}} = -1$

22. Να αποδείξετε ότι : $\frac{\sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{8} + \sigma\upsilon\nu^4\frac{3\pi}{8}}{\eta\mu^4\frac{\pi}{8} + \eta\mu^4\frac{3\pi}{8}} = 1$

23. Να αποδείξετε ότι : $\frac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8} + \eta\mu^4\frac{3\pi}{8}}{\eta\mu^4\frac{\pi}{12} + \eta\mu^4\frac{5\pi}{12}} = 7$

24. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $2\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu 2\chi = -3$

ii) $\eta\mu\chi + 2\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$

iii) $\eta\mu^2\left(\chi + 15^\circ\right) - \eta\mu^2\left(\chi - 15^\circ\right) = \frac{1}{4}$

25. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $2\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{3}-\eta\mu\frac{\chi}{2}=2$ ii) $\eta\mu3\chi\eta\mu^3\chi+\sigma\upsilon\nu3\chi\sigma\upsilon\nu^3\chi=0$

26. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu2\chi-13\eta\mu\chi-7=0$ ii) $2\eta\mu^2\chi+\eta\mu2\chi=0$

iii) $\eta\mu4\chi+3\eta\mu2\chi=0$

27. Να λυθεί η εξίσωση : $\eta\mu\left(75^\circ+\chi\right)+\sigma\upsilon\nu\left(105^\circ+\chi\right)+\eta\mu2\chi=1$

28. Να λυθεί η εξίσωση : $\dfrac{1}{\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}+\chi\right)}+\dfrac{1}{\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}-\chi\right)}=2\sqrt{2}$

29. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $5\eta\mu^2\chi-2\sigma\upsilon\nu^2\chi-3\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi=0$

ii) $1+\varepsilon\phi\chi=4\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi,\qquad \chi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

30. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $3\varepsilon\phi^2\chi-16\eta\mu^2\chi+3=0$

ii) $1+2\sigma\upsilon\nu\chi=0,\qquad \chi\in\left(-\pi,\pi\right)$

31. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $4\eta\mu^2\frac{\chi}{2}-\eta\mu\chi+\eta\mu2\chi=1$ ii) $\sigma\upsilon\nu2\chi+10\eta\mu^2\frac{\chi}{2}=2$

32. Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\dfrac{\varepsilon\phi B}{\varepsilon\phi\Gamma}=\dfrac{\eta\mu^2 B}{\eta\mu^2\Gamma}$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

33. Αν σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ ισχύει η σχέση

$\varepsilon\phi\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\dfrac{A}{2}-\eta\mu\dfrac{A}{2}}{\eta\mu\dfrac{A}{2}+\sigma\upsilon\nu\dfrac{A}{2}}$ να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.

34. Αν σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει η σχέση $2συν\frac{A}{2}ημ\frac{B+Γ}{2}=1$ να δείξετε ότι είναι ορθογώνιο

35. Αν σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει η σχέση
$συν\frac{A}{2}ημ\frac{B+Γ}{2}+συν\frac{B}{2}ημ\frac{A+Γ}{2}=1$
να δείξετε ότι είναι ισοσκελές τρίγωνο.