ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
20ΡΟΣΗΜ01
www.2001.gr

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΛΙΠΟΡΔΕΖΗΣ ΣΑΚΗΣ

ΣΟΥΛΤΑΝΙΔΟΥ ΚΙΚΗ

8η ΕΚΔΟΣΗ

ΠΕΡΙΕΧΕΙ

ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΧΟΤΟΜΩΝ

ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

ΕΜΒΑΔΑ

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Δύο ευθύγραμμα τμήματα α, γ λέγονται ανάλογα προς δύο άλλα ευθύγραμμα τμήματα β, δ όταν ο λόγος του α προς το β ισούται με το λόγο του γ προς το δ.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

- Η παραπάνω ισότητα λέγεται **<u>αναλογία</u>**
- Τα ευθύγραμμα τμήματα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ λέγονται **<u>ανάλογα</u>** ή **<u>αντίστοιχα</u>**
- Τα τμήματα α, δ λέγονται **<u>άκροι όροι</u>**
- Τα τμήματα β, γ λέγονται **<u>μέσοι όροι</u>**

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ:

- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha\gamma$
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}$, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha \pm \beta} = \frac{\gamma}{\gamma \pm \delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \ldots = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\alpha + \gamma + \ldots + \kappa}{\beta + \delta + \ldots + \lambda}$

ΟΡΙΣΜΟΣ:

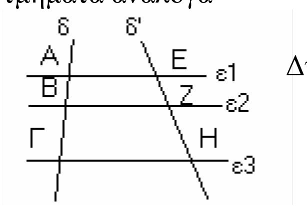
Ένα σημείο Μ διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε λόγο λ, αν και μόνο αν $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = \lambda$

ΠΡΟΤΑΣΗ

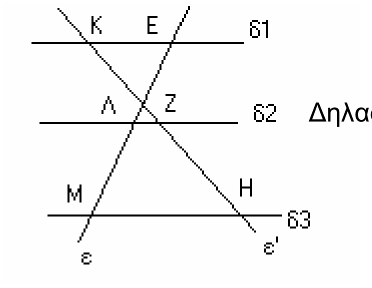
Το σημείο Μ είναι μοναδικό

ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ

Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα



Δηλαδή: Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$ τότε $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{EZ}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{ZH}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{EH}}$



Δηλαδή: Αν $\delta_1 // \delta_2 // \delta_3$ τότε $\frac{\text{ΚΛ}}{\text{ΕΖ}} = \frac{\text{ΛΜ}}{\text{ΖΗ}} = \frac{\text{ΚΜ}}{\text{ΕΗ}}$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΘΑΛΗ

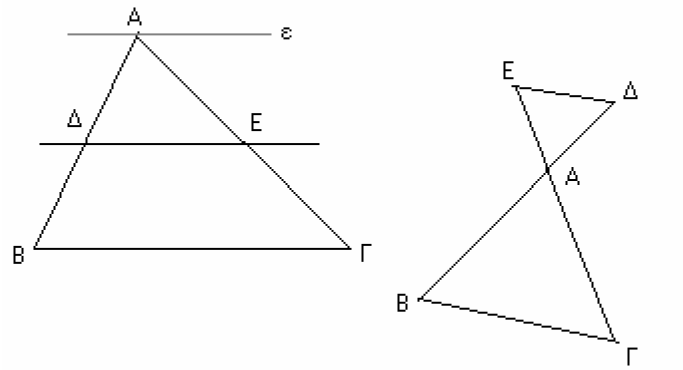
Θεωρούμε δύο ευθείες δ_1, δ_2 που τέμνουν δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα σημεία Α, Β και Ε, Ζ αντίστοιχα. Αν Γ, Η είναι σημεία των ευθειών δ_1, δ_2 αντίστοιχα τέτοια ώστε $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΖΗ}}$, τότε η ευθεία ΓΗ είναι παράλληλη προς τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μια από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες σε μέρη ανάλογα και αντίστροφα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

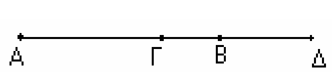
Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μια παράλληλη προς μια τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.



Όπου $\varepsilon // \text{ΔΕ} // \text{ΒΓ}$

ΣΥΖΥΓΗ ΑΡΜΟΝΙΚΑ

Δύο σημεία Γ και Δ, που διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά το τμήμα ΑΒ στον ίδιο λόγο, λέγονται συζυγή αρμονικά των Α και Β.
Δηλαδή τα Γ και Δ λέγονται **<u>συζυγή αρμονικά</u>** των Α και Β, αν τα τέσσερα σημεία είναι συνευθειακά και αντίστροφα τα Α και Β είναι **<u>συζυγή αρμονικά</u>** των Γ και Δ.
Τα τέσσερα σημεία $(\text{Α}, \text{Β})$ και $(\text{Γ}, \text{Δ})$ λέμε ότι αποτελούν **<u>αρμονική τετράδα</u>**

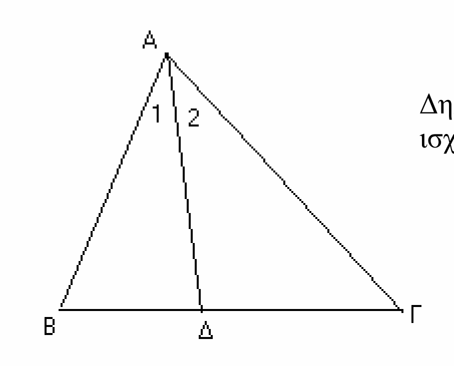


$$\frac{\text{ΓΑ}}{\text{ΓΒ}} = \frac{\text{ΔΑ}}{\text{ΔΒ}}$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΧΟΤΟΜΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ (εσωτερικής διχοτόμου τριγώνου)

Η διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου διαιρεί την απέναντι πλευρά εσωτερικά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών.

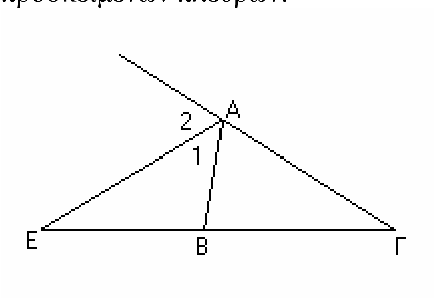


Δηλαδή, αν $ΑΔ$ η διχοτόμος του τριγώνου $ΑΒΓ$, ισχύει

$$\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (εξωτερικής διχοτόμου τριγώνου)

Η διχοτόμος μιας εξωτερικής γωνίας τριγώνου τέμνει την προέκταση της απέναντι πλευράς σε ένα σημείο, το οποίο διαιρεί εξωτερικά την πλευρά αυτή σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών.



Δηλαδή, αν $ΑΕ$ η εξωτερική διχοτόμος του τριγώνου $ΑΒΓ$, ισχύει

$$\frac{ΕΒ}{ΕΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$$

8^o ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από τις ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθυγράμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητας τους

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι (1ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ (2ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ (3ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν μία οξεία γωνία τους ίση.
- Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.
- Δύο ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, είναι όμοια.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

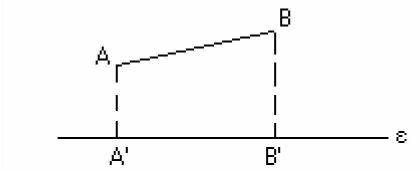
- Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων υψών τους.
- Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων διχοτόμων τους.
- Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων διαμέσων τους.

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΤΡΙΓΩΝΟ

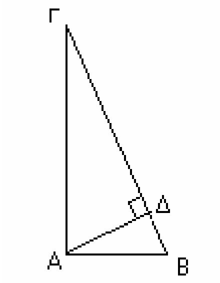
ΟΡΙΣΜΟΣ:

Αν από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ φέρουμε τις κάθετες ΑΑ’ και ΒΒ’ πάνω σε μια ευθεία ε τότε το τμήμα Α’Β’ είναι η **<u>προβολή</u>** του ΑΒ πάνω στην ε.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα



Έστω λοιπόν το ορθογώνιο $ΑΒΓ$ και $Δ$ η προβολή της κορυφής $Α$ στην υποτείνουσα $ΒΓ$.

Τότε ισχύει $ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ$ και

$ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot ΓΔ$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

$$\frac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2} = \frac{ΒΔ}{ΓΔ}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Πυθαγόρειο)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Αντίστροφο του Πυθαγόρειου)

Αν σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$, τότε $\hat{Α} = 90^\circ$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων του στην υποτείνουσα.

$$ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ$$

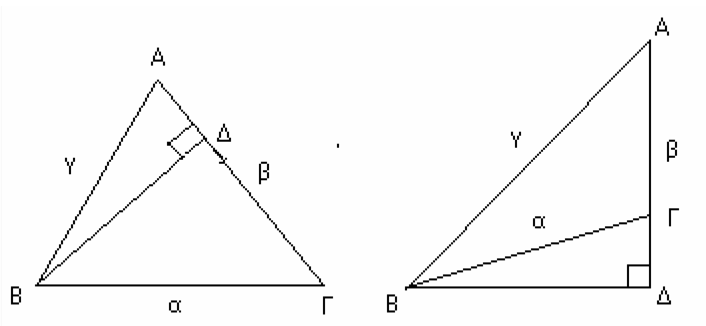
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ:

- Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, τότε $\alpha = \sqrt{2}\beta$
- Αν ΑΔ είναι το ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, τότε ισχύει $\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\upsilon_\alpha^2}$ και $\alpha\upsilon_\alpha = \beta\gamma$
- Το ύψος ισοπλεύρου τριγώνου ως συνάρτηση της πλευράς α δίνεται από τον τύπο $\upsilon = \frac{\alpha \cdot \sqrt{3}}{2}$

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

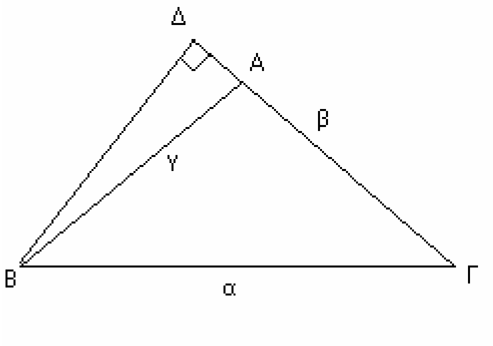
Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.



Δηλαδή σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} < 90^\circ$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στην β, τότε ισχύει,
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \mathrm{A\Delta}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.



Δηλαδή σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} > 90^\circ$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στην β, τότε ισχύει,

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

- $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} > 90^\circ$
- $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} = 90^\circ$
- $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} < 90^\circ$

Προσοχή! Για να εφαρμόσουμε το πόρισμα αυτό πρέπει πάντα να συγκρίνουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του τριγώνου με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών.

ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση :

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ:

Το ύψος υ_α ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο:

$$\upsilon_\alpha = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

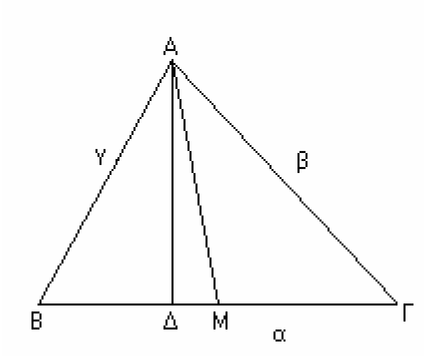
όπου $\tau = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$

Ανάλογες εκφράσεις ισχύουν και για τα άλλα ύψη υ_β και υ_γ.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΑΜΕΣΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι (1ο θεώρημα διαμέσων)

Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.



Δηλαδή, αν ΑΔ =$υ_α$ το ύψος και ΑΜ =$μ_α$ η διάμεσος ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

Ανάλογα έχουμε και τους ακόλουθους τύπους

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2\mu_\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{2} \qquad\qquad \alpha^2 + \gamma^2 = 2\mu_\beta^2 + \frac{\beta^2}{2}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ (2ο Θεώρημα διαμέσων)

Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot \text{ΜΔ}$$

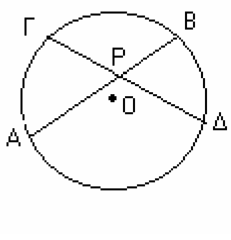
Σημείωση: αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές ή ισόπλευρο τότε το Μ ταυτίζεται με το Δ και το 2ο θεώρημα διαμέσων ισχύει ταυτοτικά.

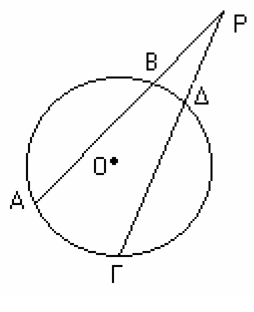
ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Αν δύο χορδές ΑΒ, ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ, τότε ισχύει

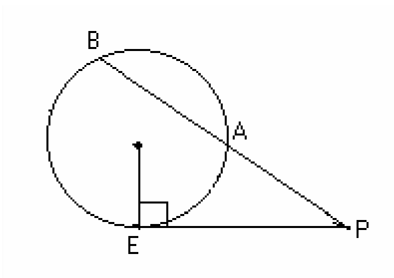
$$\text{ΡΑ} \cdot \text{ΡΒ} = \text{ΡΓ} \cdot \text{ΡΔ}$$





ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

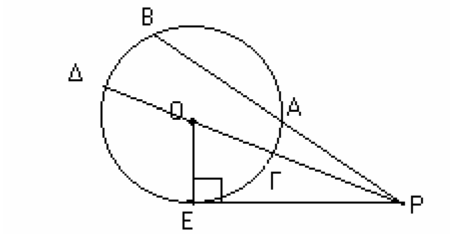
Αν από ένα εξωτερικό σημείο P κύκλου (O, R), φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα PE
Και μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία A, B τότε ισχύει η σχέση :



$$\mathrm{PE}^2 = \mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}$$

ΔΥΝΑΜΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟ

Επίσης, αν η ευθεία PO τέμνει τον κύκλο στα Δ, Γ και $\mathrm{OP} = \delta$ τότε έχουμε ότι:



$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{P\Gamma}\cdot\mathrm{P\Delta} = (\delta - R)(\delta + R) = \delta^2 - R^2$$

Η διαφορά $\delta^2 - R^2$ λέγεται **<u>δύναμη σημείου</u>** P **<u>ως προς τον κύκλο</u>** (O, R) και συμβολίζεται

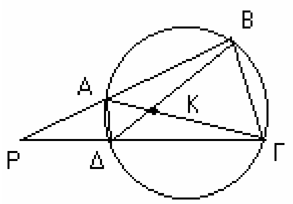
$$\Delta^{\mathrm{P}}_{(\mathrm{O},R)} = \delta^2 - R^2 = \mathrm{OP}^2 - R^2$$

- Το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O, R) αν και μόνο αν $\Delta^{\mathrm{P}}_{(\mathrm{O},R)} > 0$
- Το P είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (O, R) αν και μόνο αν $\Delta^{\mathrm{P}}_{(\mathrm{O},R)} < 0$
- Το P είναι σημείο του κύκλου (O, R) αν και μόνο αν $\Delta^{\mathrm{P}}_{(\mathrm{O},R)} = 0$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

- Για να είναι το τετράπλευρο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν ισχύει η σχέση

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{P\Gamma}\cdot\mathrm{P\Delta}$$



- Αν οι διαγώνιοι ενός τετράπλευρου $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ τέμνονται σε ένα σημείο K, τότε για να είναι το τετράπλευρο εγγράψιμο σε κύκλο, πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$\mathrm{KA}\cdot\mathrm{K\Gamma} = \mathrm{KB}\cdot\mathrm{K\Delta}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Οι πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου έχουν μήκη x, x+1 και x+2. Η περίμετρος του τριγώνου αυτού είναι:
Α: 3 Β: 6 Γ: 10 Δ: 12 Ε: 15
Επιλέξτε τη σωστή απάντηση και να την αιτιολογήσετε.

2. Θεωρούμε διάμετρο ΑΒ κύκλου (Ο,R) και τις κάθετες ακτίνες ΟΓ και ΟΔ. Αν Ε και Ζ οι προβολές των Γ και Δ αντίστοιχα στην ΑΒ, να αποδειχθεί ότι
i) Τα τρίγωνα ΟΕΓ και ΖΔΟ είναι ίσα.
ii) $\text{ΟΕ}^2 + \text{ΟΖ}^2 = R^2$

3. Έστω ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο $(\hat{\text{Α}} = 90^{\text{O}})$ και ΒΔ η διάμεσός του. Να αποδειχθεί ότι $\text{ΒΔ}^2 + \frac{3}{4}\text{ΑΓ}^2 = \text{ΒΓ}^2$.

4. Θεωρούμε τεταρτοκύκλιο ΑΟΒ κύκλου (Ο,R) και τη διχοτόμο ΟΜ της γωνίας $\text{Α}\hat{\text{Ο}}\text{Β}$. Από σημείο Γ του τόξου $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ φέρουμε $\text{ΓΔ} \perp \text{ΟΒ}$ που τέμνει την ευθεία ΟΜ στο σημείο Ε. Να αποδειχθεί ότι α) ΔΕ=ΟΔ β) $\text{ΔΓ}^2 + \text{ΔΕ}^2 = R^2$

5. Αν σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα ΓΔ=2ΒΓ, να αποδειχθεί ότι $\text{ΑΔ}^2 = \text{ΑΓ}^2 + 6\text{ΒΓ}^2$.

6. Αν Δ σημείο της πλευράς ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), να αποδειχθεί ότι $\text{ΑΒ}^2 - \text{ΑΔ}^2 = \text{ΔΒ} \cdot \text{ΔΓ}$.

7. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου (αν υπάρχει) σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, όπου η τριάδα αριθμών είναι μήκη ευθυγράμμων τμημάτων και μπορεί να αποτελεί μήκη των πλευρών του. i) 3,5,7 ii) 8,4,2 iii) $7, 6, \sqrt{85}$.

8. Αν τα μήκη α,β και γ των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ πληρούν τη σχέση $\gamma^2 < \alpha^2 + \beta^2$ τότε το τρίγωνο είναι οξυγώνιο;

9. Αν τα μήκη α,β και γ των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ πληρούν τις σχέσεις α<β<γ και $\gamma^2 < \alpha^2 + \beta^2$ τότε το τρίγωνο είναι οξυγώνιο;

10. Αν τα μήκη α,β και γ των πλευρών ΑΒΓ πληρούν τη σχέση $\alpha^4 < \beta^4 + \gamma^4$ τότε να αποδειχθεί ότι $\hat{\text{Α}} < 90^{\text{O}}$.

11. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και σημείο Δ της ημιευθείας ΑΒ τέτοιο, ώστε ΒΔ=ΑΒ. Αν $\text{ΓΕ} \perp \text{ΑΒ}$ και είναι ΑΒ=4ΒΕ, να αποδειχθεί ότι $\text{ΓΔ}^2 = \text{ΒΓ}^2 + \frac{3}{2}\text{ΑΓ}^2$.

12. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α, τη διχοτόμο Γχ της εξωτερικής γωνίας $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ αυτού, την κάθετη $\mathrm{BE} \perp \Gamma x$ και την κάθετη $\mathrm{EZ} \perp \mathrm{A\Gamma}$.

Να αποδειχθεί ότι. i) $\Gamma\mathrm{Z} = \dfrac{\alpha}{4}$ ii) $\mathrm{AE} = \dfrac{\sqrt{7}\alpha}{2}$.

13. Εκατέρωθεν της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε δύο ισόπλευρα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΓΕ. Να αποδειχθεί ότι_ $\mathrm{A}\Delta^2 + \mathrm{AE}^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, τα μήκη των πλευρών του οποίου συνδέονται με τη σχέση $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$. Να αποδειχθεί ότι α) $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 2\mu_\alpha^2$

β) $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, $\mu_\beta = \dfrac{\gamma\sqrt{3}}{2}$ $\mu_\gamma = \dfrac{\beta\sqrt{3}}{2}$.

15. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{\mathrm{A}} = 90^{\mathrm{O}})$ και τη διάμεσό του ΒΕ.

α) Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{BE}^2 + \dfrac{3}{4}\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{B\Gamma}^2$ β) Αν ΑΔ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, ΒΕ=$\sqrt{14}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = 60^o$, να υπολογιστούν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.

16. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\mu_\beta \perp \mu_\gamma$ τότε να αποδειχθεί ότι $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \mu_\alpha^2$.

17. Αν ΒΒ΄ το ύψος τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} < 90^o$ και ΑΜ η διάμεσός του, τότε να αποδειχθεί ότι $\mathrm{AM}^2 = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}^2}{4} + \mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{AB}'$.

18. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{\mathrm{A}} = 90^{\mathrm{O}})$, η διάμεσος του ΑΜ και ευθεία (ε) κάθετη στην ΑΜ στο Μ. Αν Ρ σημείο της (ε), να αποδειχθεί ότι $\mathrm{PB}^2 + \mathrm{P\Gamma}^2 = 2\mathrm{PA}^2$.

19. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ διάμεσος η οποία προεκτεινόμενη τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο (Ο,R) στο Δ και Θ το βαρύκεντρο του τριγώνου.

Να δειχθεί ότι: i) $\mathrm{MA}\cdot\mathrm{M}\Delta = \dfrac{\alpha^2}{4}$ ii) $\Delta^{\Theta}_{(\mathrm{O},R)} = -\dfrac{1}{9}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$

iii) $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 = 2\mathrm{AM}\cdot\mathrm{A}\Delta$

20. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Αν οι κύκλοι οι περιγεγραμμένοι στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ζ και Ε αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι ΒΕ=ΓΖ.

21. Κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. Αν το σημείο τομής Μ των διαγωνίων του είναι μέσο της διαγωνίου ΒΔ, να αποδειχθεί ότι:

i) $\Delta\mathrm{B}^2 = 4\mathrm{MA}\cdot\mathrm{M\Gamma}$ ii) $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2 + \Gamma\Delta^2 + \Delta\mathrm{A}^2 = 2\mathrm{A\Gamma}^2$.

22. Δίνεται ένας κύκλος (Ο,R) διαμέτρου ΑΒ. Από ένα σημείο Γ της προέκτασης της ΑΒ προς το Β φέρνουμε την εφαπτομένη ΓΔ και την $\Gamma x \perp \mathrm{A}\Gamma$. Αν Ε είναι το σημείο τομής των ΑΔ και Γx ,να αποδειχθεί ότι:
i) το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι εγγράψιμο. ii) $\Gamma\Delta^2 = \Gamma\mathrm{A}^2 - \mathrm{A}\Delta \cdot \mathrm{AE}$.

23. Δύο κύκλοι (Κ,R) και $\left(\Lambda, \frac{R}{2}\right)$ εφάπτονται εσωτερικά στο Α. Από ένα σημείο Μ του κύκλου $\left(\Lambda, \frac{R}{2}\right)$ φέρνουμε χορδή ΓΔ του κύκλου (Κ,R). Να αποδειχθεί ότι: $\mathrm{M\Gamma \cdot M\Delta = MA^2}$.

24. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ. Αν οι περιγεγραμμένοι κύκλοι στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ τέμνουν τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα να αποδειχθεί ότι: ΒΖ+ΓΕ=α.

25. Στη διάμετρο ΑΒ κύκλου (Ο,R) θεωρούμε τα σημεία Γ και Δ έτσι ώστε ΟΓ=ΟΔ=α και μεταβλητό σημείο Μ του κύκλου. Αν οι ΜΓ και ΜΔ τέμνουν τον κύκλο στα Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :i) ΜΓ·ΓΕ = ΜΔ·ΔΖ ii) $\mathrm{M\Gamma^2 + M\Delta^2} = 2(\mathrm{R}^2+\alpha^2)$ iii) το άθροισμα $\frac{\mathrm{M\Gamma}}{\mathrm{\Gamma E}} + \frac{\mathrm{M\Delta}}{\mathrm{\Delta Z}}$ είναι σταθερό.

26. Θεωρούμε κύκλο (Ο,2α) και σημείο Ρ τέτοιο, ώστε ΟΡ=$\frac{3\alpha}{2}$. Φέρουμε χορδή ΑΒ, η οποία διέρχεται από το Ρ και είναι τέτοια, ώστε ΑΡ=α. Να υπολογιστεί το μήκος της χορδής ΑΒ.

27. Θεωρούμε κύκλο (Ο,R), διάμετρο ΑΒ και τα μέσα Γ και Δ των ΟΑ και ΟΒ αντίστοιχα. Από το σημείο Γ φέρουμε χορδή ΕΖ = $\frac{\sqrt{13} \cdot R}{2}$. Να αποδειχθεί ότι:
i) $\mathrm{Z\Gamma^2 + Z\Delta^2 + \Gamma E^2 + \Delta E^2 = 5R^2}$ ii) $\mathrm{E\hat{\Delta}Z} = 90^0$.

28. Έστω ΑΒ διάμετρος κύκλου (Ο,R) και ΑΓ, ΒΔ δύο χορδές που τέμνονται στο Ρ. Να αποδειχθεί ότι: i) αν οι ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο Ε, τότε το Ρ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ΕΑΒ. ii) $\mathrm{A\Gamma \cdot AP + B\Delta \cdot BP = AB^2}$.

29. Τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta^2+\gamma^2=2\alpha^2$, ΒΔ, ΓΕ ύψη, ΑΜ διάμεσος και Ζ μέσο της ΑΜ. Να αποδειχθεί ότι: i) $\hat{\mathrm{A}} < 90^0$ ii) ΑΕ = $\frac{\alpha^2}{2\gamma}$ και ΑΜ = $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ iii) ΕΖ = $\frac{\alpha\beta}{4\gamma}$, ΖΔ = $\frac{\alpha\gamma}{4\beta}$.

30. Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Δ,Ε στην πλευρά ΒΓ ώστε ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ. Να αποδείξετε ότι: i) $\mathrm{AB^2 - 2\Delta E^2 = 2A\Delta^2 - AE^2}$ ii) $\mathrm{AB^2 + 2A\Gamma^2 = 3AE^2 + 6\Delta E^2}$.

31. Αν α, β, γ πλευρές τριγώνου να βρεθεί το είδος του τριγώνου στις παρακάτω περιπτώσεις:
i) $\alpha = \nu^2 + 1$, $\beta = 2\nu$, $\gamma = \nu^2 - 1$
ii) α = 4, β = 5, γ = 3
iii) α = 11, β = 13, γ = 12.

32. Αν Ε, Δ, Ζ μέσα των ΑΓ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα ενός τριγώνου ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:
i) $E\Delta = \frac{1}{2}AB$ ii) $EZ^2 = \frac{3\alpha^2 + 6\gamma^2 - 2\beta^2}{16}$.

33. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 6, ΑΓ = 8, $B\Gamma = 2\sqrt{37}$ να αποδειχθεί ότι:
i) $\hat{A} = 120^o$,
ii) να βρεθεί το μήκος ΑΔ όπου ΒΔ ύψος τριγώνου,
iii) να βρεθεί το μήκος της διαμέσου μ_α.

34. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α = 9, β = 7, γ = 4 να βρείτε: i) το είδος του τριγώνου ii) το μήκος της διαμέσου μ_α, iii) την προβολή της διαμέσου μ_α πάνω στην ΒΓ iv) την προβολή της πλευράς β πάνω στην γ.

35. Ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$, ΑΜ διάμεσος και Ρ το μέσο της ΑΜ. Στην πλευρά ΒΓ = α παίρνουμε σημείο Κ, ώστε $\Gamma K = \frac{5\alpha}{8}$. Να αποδειχθεί ότι: i) $\Gamma P^2 = \frac{5\alpha^2}{16}$ ii) $PK^2 = \frac{5\alpha^2}{64}$ iii) ΡΓ = 2ΚΡ.

36. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ α = 25 και β = 20 αν x είναι η προβολή της πλευράς β πάνω στην πλευρά α τότε:
i) η πλευρά γ έχει μήκος : Α:10 Β:12 Γ:13 Δ:15 Ε:21
ii) το ύψος υ_α έχει μήκος Α:9 Β:7 Γ:12 Δ:17 Ε:5
iii) το τμήμα x έχει μήκος : Α:10 Β:12 Γ:17 Δ:16 Ε:21.
(Να αιτιολογήσετε την απάντηση).

ΕΜΒΑΔΑ

ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΑ ΧΩΡΙΑ

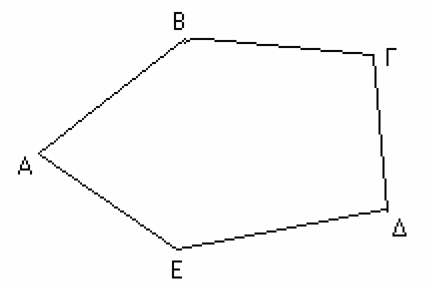
ΟΡΙΣΜΟΣ:

Ας θεωρήσουμε ένα πολύγωνο

Το πολύγωνο μαζί με τα εσωτερικά του στοιχεία ονομάζεται <u>πολυγωνικό χωρίο</u>

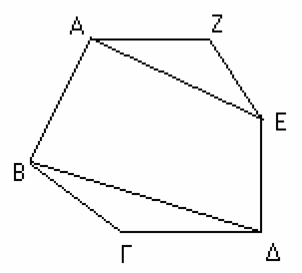
Ένα πολυγωνικό χωρίο που ορίζεται από τρίγωνο, τετράγωνο,…,ν-γωνο ονομάζεται <u>τριγωνικό, πολυγωνικό,…, ν-γωνικό</u>

Δύο πολυγωνικά χωρία λέγονται <u>ίσα</u> όταν τα αντίστοιχα πολύγωνά τους είναι ίσα



ΟΡΙΣΜΟΣ:

Ένα σχήμα που αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος πολυγωνικών χωρίων, που ανά δύο δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, λέγεται <u>**πολυγωνική επιφάνεια**</u>



ΑΞΙΩΜΑ 1

Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά

ΑΞΙΩΜΑ 2

Αν ένα πολυγωνικό χωρίο (ή μια πολυγωνική επιφάνεια) χωρίζεται σε πεπερασμένου πλήθους πολυγωνικά χωρία, που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε το εμβαδόν του ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους πολυγωνικών χωρίων

ΑΞΙΩΜΑ 3

Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 1 είναι 1

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Δύο σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδόν ονομάζονται <u>**ισεμβαδικά**</u> ή <u>**ισοδύναμα**</u>

ΕΜΒΑΔΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς α δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E} = \alpha^2$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του $\mathrm{E} = \alpha \cdot \beta$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή

$$\mathrm{E} = \alpha \cdot \upsilon_\alpha = \beta \cdot \upsilon_\beta$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma \cdot \upsilon_\gamma$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του. $\mathrm{E} = \frac{\mathrm{B}+\beta}{2} \cdot \upsilon$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- Το εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α είναι ίσο με $\mathrm{E} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$
- Το εμβαδόν ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του
- Το εμβαδόν οποιουδήποτε κυρτού ή μη κυρτού τετραπλεύρου με κάθετες διαγωνίους ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- Η διάμεσος κάθε τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα
- Το βαρύκεντρο τριγώνου έχει την ιδιότητα να δημιουργεί με τις κορυφές του τριγώνου τρία ισεμβαδικά τρίγωνα
- Το βαρύκεντρου του τριγώνου, οι κορυφές του και τα μέσα των πλευρών του ορίζουν έξι ισεμβαδικά τρίγωνα

ΑΛΛΟΙ ΤΥΠΟΙ ΕΜΒΑΔΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ

$\mathrm{E}=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ όπου $\tau=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$, ημιπερίμετρος του τριγώνου

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ, όπου ρ η ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου

$\mathrm{E}=\tau\cdot\rho$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ, όπου R η ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου

$$\mathrm{E}=\frac{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}{4R}$$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ (δυο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία)

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\beta\cdot\gamma\cdot\eta\mu\mathrm{A}=\frac{1}{2}\gamma\cdot\alpha\cdot\eta\mu\mathrm{B}=\frac{1}{2}\alpha\cdot\beta\cdot\eta\mu\Gamma$$

ΕΜΒΑΔΑ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών, ενώ αν έχουν ίσα ύψη, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές..

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν ΑΒΓΔ τραπέζιο ($AB // \Gamma\Delta$) και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ, να αποδείξετε ότι $E_{OB\Gamma} = E_{OA\Delta}$.

2. Ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB // \Gamma\Delta$) και ΒΓ=ΓΔ=ΑΔ και τη βάση ΑΒ κατά 2 μικρότερη από το άθροισμα των τριών αυτών πλευρών. Αν το ύψος του τραπεζίου είναι 5, να υπολογιστεί το εμβαδό του.

3. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών α=10, β=8, γ=14 και ισόπλευρο τρίγωνο ΔΕΖ το οποίο είναι ισοδύναμο με το ΑΒΓ. Το μήκος της πλευράς του ισόπλευρου τριγώνου ΔΕΖ είναι:

Α:6 Β: $8\sqrt[4]{2}$ Γ: 12 Δ: 10 Ε: 20.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να την αιτιολογήσετε.

4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ=2, ΒΗ ύψος και η διάμεσος ΒΔ=1. Αν $B\hat{\Delta}A = 30^o$ να υπολογιστούν: α) τα ΒΗ, ΗΔ, ΑΗ

β) το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

5. Με υποτείνουσες τις κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ με β+γ=20, κατασκευάζουμε ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ εκτός αυτού.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ,Α,Ε είναι συνευθειακά.

β) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΒΓΕΔ.

6. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ ενός τριγώνου ΑΒΓ κατά τμήματα ΓΔ=ΓΒ, ΑΕ=ΑΓ και ΒΖ=ΒΑ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι (ΔΕΖ) = 7(ΑΒΓ).

7. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ στο εσωτερικό του. Φέρνουμε από το Μ παράλληλες προς τις πλευρές του τριγώνου. Αν E_1, E_2 και E_3 τα εμβαδά των σχηματιζόμενων τριγώνων και Ε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι: $\sqrt{E} = \sqrt{E_1} + \sqrt{E_2} + \sqrt{E_3}$.

8. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $(AB E)^2 = (AB\Gamma)\cdot(A\Delta E)$.

9. Από σημείο Δ της πλευράς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Αν E_1, E_2 και E_3 τα εμβαδά των τριγώνων ΑΔΕ, ΑΔΓ και ΑΒΓ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι: $E_2^2 = E_1 \cdot E_3$.

10. Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Α΄ της πλευράς του ΒΓ. Από τα Β και Γ φέρνουμε παράλληλες προς την ΑΑ΄ που τέμνουν τις ευθείες ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Γ΄ και Β΄ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι:

α) (ΑΑ΄Γ΄) = (ΑΒΑ΄) και (ΑΑ΄Β΄) = (ΑΓΑ΄)

β) (ΑΒ΄Γ΄) = (ΑΒΓ)

γ) (Α΄Β΄Γ΄) = 2(ΑΒΓ).

11. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=10, ΑΔ=4 και $\hat{\Delta}=60^o$. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ έτσι ώστε ΑΕ=ΕΖ=ΖΒ. Αν Η είναι το σημείο τομής των ευθειών ΔΕ και ΓΖ να υπολογιστούν:
α) το εμβαδό του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ
β) το εμβαδό του τραπεζίου ΓΔΕΖ
γ) το εμβαδό του τριγώνου ΗΕΖ.

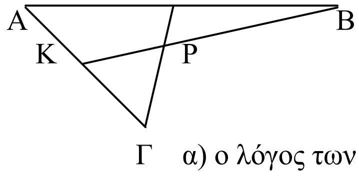
12. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ=6 και $\hat{A} = 120^o$
α) Να βρεθεί το εμβαδό του.
β) Αν Ε σημείο της ΑΓ τέτοιο , ώστε $AE = \frac{1}{2}\Gamma E$ και ΑΔ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου ΔΕΓ.
γ) Αν η παράλληλη από το Α προς τη ΒΓ τέμνει τη ΔΕ στο Η, να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου ΑΕΗ.

13. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ρ στο εσωτερικό του. Από το Ρ φέρνουμε κάθετες ημιευθείες στις πλευρές ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ και πάνω σ' αυτές παίρνουμε τα σημεία Α΄, Β΄ και Γ΄ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΡΑ΄=ΒΓ, ΡΒ΄=ΑΓ και ΡΓ΄=ΑΒ. Να αποδειχθεί ότι:
α) οι γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $A'\hat{P}B'$ είναι παραπληρωματικές
β) (ΡΑ΄Β΄)=(ΑΒΓ)
γ) (Α΄Β΄Γ΄)=3(ΑΒΓ).

14. Θεωρούμε τρεις ίσες διαδοχικές γωνίες $x\hat{o}\psi$, $\psi\hat{o}z$, $z\hat{o}x$, και πάνω στις ημιευθείες Οx, Οψ και Οz τα σημεία Α, Β, Γ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΟΑ=1, ΟΒ=4, και ΟΓ=8.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $x\hat{o}\psi$, $\psi\hat{o}z$, $z\hat{o}x$.
β) Αν Οw η αντικείμενη ημιευθεία της Οψ και $\Gamma\Delta \perp Ow$, να υπολογίσετε τις ΟΔ και ΓΔ.
γ) Να υπολογίσετε το (ΟΒΓ).
δ) Να αποδείξετε ότι (ΑΒΓ)=$11\sqrt{3}$.

15. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα.
α) Να αποδειχθεί ότι (ΚΛΜΝ)=$\frac{1}{2}$ (ΑΒΓΔ).
β) Αν $KM \perp \Lambda N$, να αποδειχθεί ότι (ΑΒΓΔ) = ΚΜ·ΛΝ.

16.



Στο διπλανό σχήμα τα σημεία Κ, Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα
Να αποδείξετε ότι:
α) ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσος με
β) αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΛΓ και ΚΒ τότε τα τρίγωνα ΒΛΡ και ΚΓΡ έχουν ίσα εμβαδά.

17. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB // \Gamma\Delta$) με ΑΒ=4, ΑΔ=2 και $\hat{\Delta} = 60^o$

α) Να βρεθεί το εμβαδό του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

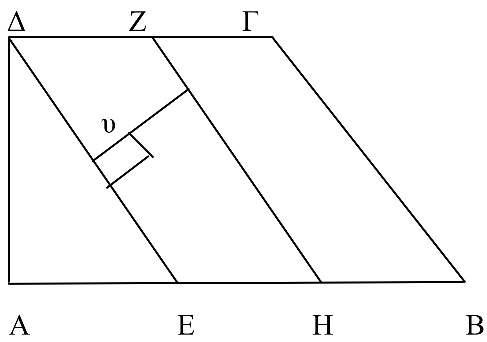
β) Αν Ε σημείο της πλευράς ΑΒ τέτοιο, ώστε ΕΒ=$\frac{1}{4}$ΑΒ και οι ΕΔ, ΕΓ τέμνουν τη διάμεσο του τραπεζίου στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου ΕΖΗ.

γ) Αν οι ΔΕ και ΒΓ τέμνονται στο Ρ, να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου ΡΕΒ.

18. Αν οι διαγώνιοι κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ σχηματίζουν γωνία 30^o, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο έχει εμβαδό $\frac{1}{4}\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{B\Delta}$.

19. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται: ΑΒ=5, $\hat{A} = 60^o$ και η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου $R = \frac{7}{\sqrt{3}}$. Να βρεθούν οι άλλες δύο πλευρές του τριγώνου και το εμβαδόν του.

20.



Το οικόπεδο ΑΒΓΔ του σχήματος έχει ΑΒ=55m, ΓΔ=25m, ΑΔ=40m, $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$. Πρέπει να χαραχθεί ένας δρόμος ΔΕΗΖ με ΔΕ//ΓΒ και ΖΗ//ΓΒ, ο οποίος θα χωρίζει το οικόπεδο σε δύο τεμάχια ΑΕΔ και ΖΗΒΓ, όπως στο σχήμα.

α) Να βρεθεί το εμβαδό του οικοπέδου ΑΒΓΔ.

β) Να βρεθεί το εμβαδό του τεμαχίου ΑΕΔ.

γ) Να βρεθεί το ΔΖ, έτσι ώστε το τεμάχιο ΖΗΒΓ να έχει το ίδιο εμβαδό με το τεμάχιο ΑΕΔ.

δ) Ποιο είναι το πλάτος του δρόμου ΔΕΗΖ στην περίπτωση (γ);

21. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ ενός παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ να αποδείξετε ότι (ΑΜΝ)=$\frac{3}{8}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})$.

22. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$), θεωρούμε το μέσο Μ της πλευράς ΑΒ και σημείο Ν της πλευράς ΑΓ τέτοιο ώστε $\Gamma N = \frac{A\Gamma}{3}$.Να δειχθεί ότι (ΜΝΒ)=$\frac{1}{3}$(ΑΒΓ).

23. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς ΔΓ προς το Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\text{ΑΒΔ})=\frac{1}{2}(\text{ΑΒΓΔ})$.

β) (ΒΔΣ) = (ΣΑΔ)

γ) αν η ΑΣ τέμνει την ΒΔ στο σημείο Ε, τότε (ΕΔΣ)-(ΕΑΒ)=(ΣΒΓ).

24. Έστω Σ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ. Στο σημείο Α φέρουμε μια ευθεία ε κάθετη στην ΑΣ. Αν Δ και Ε είναι αντίστοιχα οι προβολές των σημείων Β και Γ στην ευθεία ε, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΣΕ είναι ισοδύναμα.

25. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\text{ΑΒ}=8$, $\text{ΑΓ}=12$ και η ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Α}}$. Αν (ΑΒΔ)=20 τ.μ. να βρείτε το (ΑΒΓ)

26. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Δ σημείο της πλευράς ΑΒ έτσι ώστε $\text{ΑΔ}=6$, ΔΒ =5, $\text{ΑΓ}=8$. Αν $\hat{\text{Α}}=80^{\circ}$ να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΓ

27. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\text{Β}}=90^{\circ}$ και η γωνία $\hat{\text{Α}}$ να είναι το $\frac{1}{3}$ της ορθής. Αν Δ σημείο της προέκτασης της πλευράς ΒΓ προς το Γ τέτοιο ώστε η $\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Β}=30^{\circ}$ να βρεθεί ο λόγος $\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΑΒΔ})}$

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό**, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

Γωνία κανονικού ν-γώνου $\phi_\nu = 180^\circ - \dfrac{360^\circ}{\nu}$

Κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου $\omega_\nu = \dfrac{360^\circ}{\nu}$

Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R ισχύουν οι εξής τύποι

$$\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$$

$$\mathrm{P}_\nu = \nu \cdot \lambda_\nu$$

$$\mathrm{E}_\nu = \frac{1}{2}\mathrm{P}_\nu \cdot \alpha_\nu$$

όπου α_ν απόστημα, λ_ν πλευρά, P_ν περίμετρος, E_ν εμβαδόν.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε έναν κύκλο και περιγράφεται σε έναν άλλον. Οι δύο αυτοί κύκλοι είναι ομόκεντροι

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

- Το κοινό κέντρο τον κύκλων αυτών λέγεται **κέντρο του πολυγώνου**
- Η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου λέγεται **ακτίνα του πολυγώνου**
- Η απόσταση του κέντρου από μια πλευρά του , δηλαδή η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου λέγεται **απόστημα του πολυγώνου**

ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε δύο κανονικά ν-γωνα ο λόγος των πλευρών τους ισούται με το λόγο των ακτινών τους και το λόγο των αποστημάτων τους.

Δηλαδή, $\dfrac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu'} = \dfrac{R}{R'} = \dfrac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu'}$

ΕΓΓΡΑΦΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

	ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ	**ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΕΞΑΓΩΝΟ**	**ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟ**
ΠΛΕΥΡΑ λ_ν	$\lambda_4 = R\sqrt{2}$	$\lambda_6 = R$	$\lambda_3 = R\sqrt{3}$
ΑΠΟΣΤΗΜΑ α_ν	$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\alpha_3 = \frac{R}{2}$

ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ

$L = 2\pi \cdot R$

ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ

$l = \frac{\pi \cdot R \cdot \mu}{180^\circ}$ ή $l = \alpha \cdot R$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΜΟΙΡΕΣ-ΑΚΤΙΝΙΑ

$$\frac{\pi}{\alpha} = \frac{\mu}{180^\circ}$$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ

$\mathrm{E} = \pi \cdot R^2$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΑ

$(\mathrm{O}\overset{\frown}{\mathrm{A}}\mathrm{B}) = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \mu}{360^\circ}$ ή $(\mathrm{O}\overset{\frown}{\mathrm{A}}\mathrm{B}) = \frac{1}{2}\alpha \cdot R^2$

ΚΥΚΛΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

$\varepsilon = (\mathrm{O}\overset{\frown}{\mathrm{A}}\mathrm{B}) - (\mathrm{OAB})$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ένα κανονικό εξάγωνο είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,ρ). Η πλευρά του εξαγώνου αυτού είναι
Α: ρ Β: $\frac{\rho\sqrt{3}}{2}$ Γ: 2ρ Δ: $\frac{2\rho\sqrt{3}}{3}$ Ε: $\frac{2\rho}{3}$.

2. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ θεωρούμε τα τμήματα ΒΚ=ΓΛ=ΔΜ=ΑΝ=λ_3. Να δείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο και ότι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι $R_1 = R\sqrt{4+\sqrt{6}}$.

3. Σε κύκλο (Ο,R) θεωρούμε δύο παράλληλες χορδές ΑΒ=λ_4 και ΓΔ=λ_6. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογιστεί το εμβαδό του ως συνάρτηση της ακτίνας R.

4. Η περίμετρος ενός κυκλικού τομέα ΟΑΒ ενός κύκλου (Ο,R) είναι 6+π. Αν $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B} = 60^o$, τότε το μήκος της ακτίνας R είναι:
Α: 6 Β: 3 Γ: 2 Δ: 4Ε: 5 (δικαιολογήστε την απάντησή σας).

5. Έστω τεταρτοκύκλιο ΟΑΒ ακτίνας R και ημικύκλιο διαμέτρου ΟΒ στο εσωτερικό του. Να βρείτε το εμβαδό και την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ΟΑΒ.

6. Έστω δύο κύκλοι (Ο,R) και (Ο΄,R) των οποίων η διάμετρος ΟΟ΄ έχει μήκος ΟΟ΄=R$\sqrt{3}$. α) Να αποδειχθεί ότι οι κύκλοι τέμνονται.
β) Να βρεθεί το εμβαδό του κοινού μέρους των δύο κύκλων.

7. Το εμβαδό κυκλικού τομέα 80^o είναι 8π. Η ακτίνα του κύκλου είναι:
Α: 9 Β: 8 Γ: 6 Δ: 10 Ε: 15.

8. Τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και η ημιπερίμετρος του είναι 80cm. Να υπολογιστούν:
α) η ακτίνα R του κύκλου
β) ο λόγος του εμβαδού του κύκλου προς το εμβαδό του τετραγώνου.

9. Στο εσωτερικό ημικυκλίου διαμέτρου ΑΟΒ=2R γράφουμε ημικύκλια με διαμέτρους ΟΑ και ΟΒ. Να υπολογιστεί το μήκος και το εμβαδό του κύκλου που εφάπτεται των τριών ημικυκλίων.

10. Δύο κύκλοι (Ο,3R) και (Ο΄,R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Φέρουμε την κοινή εξωτερική εφαπτόμενη ΒΓ αυτών. Να βρεθεί το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ και του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ.

11. Έστω ο κύκλος (Ο,R) και μια ακτίνα του ΟΑ. Στην ημιευθεία ΟΑ θεωρούμε σημείοΒ, έτσι ώστε ΑΒ=ΑΟ. Αν ΒΓ η εφαπτομένη του κύκλου να βρεθεί το εμβαδό α) του τριγώνου ΟΒΓ και β) του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

12. Δίνεται ένας κύκλος (O,R) και δύο παράλληλες χορδές του ΑΒ=λ_3 και ΓΔ=λ_6 προς το ίδιο μέρος του κέντρου Ο. α) Να εκφράσετε τις χορδές ΑΒ και ΓΔ ως συνάρτηση της ακτίνας R β) Να υπολογίσετε το εμβαδό E_1 του κυκλικού τμήματος που αντιστοιχεί στη χορδή ΓΔ. γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ. δ) Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδό του μικτόγραμμου τραπεζίου που έχει κορυφές τα Α,Β,Γ,Δ.

13. Θεωρούμε κύκλο (O,R) χορδή ΑΒ=R, την εφαπτομένη ε του κύκλου στο σημείο Α και τη $ΒΓ \perp \varepsilon$. Να υπολογίσετε:
α) το εμβαδό του τραπεζίου ΟΑΓΒ
β) το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

14. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και στο εσωτερικό του τα ημικύκλια διαμέτρων ΑΓ και ΓΒ, όπου Γ σημείο μεταξύ των Α και Β. Αν κάθετη της ΑΒ στο Γ τέμνει το αρχικό ημικύκλιο στο Δ, να αποδείξετε ότι το εμβαδό του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων είναι ίσο με το εμβαδό του κύκλου διαμέτρου ΓΔ.

15. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) με $\hat{B} = 60^o$ και ΒΓ=α. Με κέντρο το Β και ακτίνα ΒΑ γράφουμε τόξο που τέμνει τη ΒΓ στο Μ και με κέντρο το Γ και ακτίνα ΓΜ γράφουμε τόξο που τέμνει την ΑΓ στο Ν. Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΜΝ.

16. Με κέντρο ένα σημείο Κ κύκλου (O,R) και ακτίνα ίση προς $R\sqrt{3}$ γράφουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον (O,R) στα σημεία Α και Β. Να υπολογιστούν η περίμετρος και το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου.

17. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) με ΒΓ = 2R. Γράφουμε ημικύκλιο με διάμετρο ΒΓ εκτός τριγώνου και τόξο κύκλου (Α, ΑΒ) με άκρα Β και Γ. Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου από το ημικύκλιο και το τόξο αυτό.

18. Ένα ορθογώνιο σπίτι με διαστάσεις α = 20m και β = 10m έχει μια εξωτερική πρίζα σε μια γωνία του. Ένα χορτοκοπτικό μηχάνημα συνδεδεμένο με την πρίζα έχει καλώδιο με μήκος 15m. Να βρεθεί το εμβαδόν της μεγαλύτερης επιφάνειας του χόρτου που μπορεί να κοπεί.

19. Σε κύκλο ακτίνας R = 4cm είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο.
Να υπολογίσετε :
α) το εμβαδό του κύκλου,
β) την πλευρά του τριγώνου,
γ) το εμβαδό του τριγώνου,
δ) το εμβαδό του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ του κύκλου και του τριγώνου.

20. Σε κύκλο με διάμετρο AB φέρουμε τις χορδές AM, MB .Αν είναι $AM = 6$ και $BM = 8$, να βρεθεί η ακτίνα και το εμβαδόν του κύκλου

21. Να βρεθεί το εμβαδόν του καθενός από τα δύο μέρη στα οποία διαιρείται ένας κύκλος (O, R) από την πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο αυτόν

22. Δίνεται κύκλος (O, R) και φέρουμε δύο κάθετες ακτίνες OA και OB. Με κέντρο το A και ακτίνα R γράφουμε τόξο που τέμνει το $\overset{\frown}{AB}$ στο σημείο Γ. Να βρεθεί το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $\mathrm{OB\Gamma}$

23. Δίνεται κύκλος (O, R) και τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 60^\circ$. Φέρουμε στο σημείο A την εφαπτομένη $\mathrm{A}\chi$ του κύκλου και την $\mathrm{B\Gamma} \perp \mathrm{A}\chi$. Να βρεθεί το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1η

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΔ διχοτόμος, ΒΔ = 2, ΓΔ = 3 και 2τ = 15 (περίμετρος) η πλευρά ΑΒ είναι:

Α: 3 **Β** : 4 **Γ** : 5 **Δ** : 6 **Ε**: Κανένα από τα παραπάνω.

(Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.)

ΑΣΚΗΣΗ 2η

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $3α^2 + 2γ^2 = 2β^2$. Τότε:

i) **Α**: $\hat{A} > 90^o$ **Β** : $\hat{B} > 90^o$, **Γ** : $\hat{B} < 90^o$, **Δ** : $\hat{Γ} > 90^o$, **Ε**: Κανένα από τα παραπάνω.

ii) Η προβολή της διαμέσου $μ_α$ στην ΒΓ ισούται με:

Α : $\frac{a}{4}$, **Β** : $\frac{a}{2}$, **Γ** : $\frac{3a}{4}$, **Δ** : $\frac{3a}{2}$, **Ε**: Κανένα από τα παραπάνω.

(Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.)

ΑΣΚΗΣΗ 3η

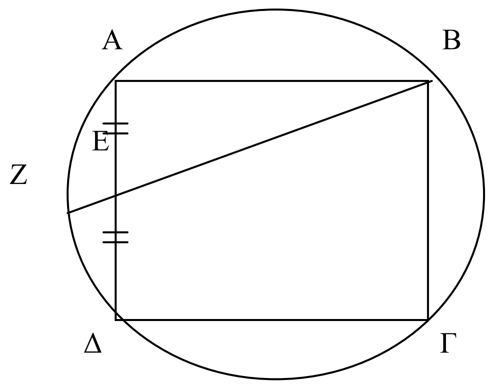
Αν ΑΒΓΔ τετράγωνο πλευράς α και Ε μέσο του ΑΔ τότε:

i) ΒΕ = $\frac{α\sqrt{5}}{2}$ Σ Λ

ii) Ο λόγος $\frac{ΕΖ}{ΒΕ}$ ισούται με:

Α: $\frac{\sqrt{2}}{5}$, **Β**: $\frac{\sqrt{5}}{4}$, **Γ**: $\frac{1}{4}$, **Δ**: $\frac{1}{5}$, **Ε**: Κανένα από τα παραπάνω.

(Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.)



ΑΣΚΗΣΗ 4η

Αν τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ=4, ΒΓ=5, ΑΓ=6 και ΑΔ διχοτόμος τότε:

i) -Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο Σ Λ

- Ο λόγος $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}$ ισούται με:

Α: $\frac{1}{2}$, **Β**: $\frac{1}{3}$, **Γ**: $\frac{2}{3}$, **Δ**: $\frac{3}{4}$, **Ε**: $\frac{3}{2}$,

(Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.)

ii) Αν ε η προβολή του Α στην ΒΓ να υπολογίσετε το μήκος του ΒΕ.

iii) Να αποδείξετε ότι $\frac{ΔΕ}{ΔΓ} = \frac{1}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 5η

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της ΑΔ. Προεκτείνουμε τη ΔΓ προς το Γ κατά ΓΕ=2ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

i) (ΑΒΜ)=$\frac{(ΒΓΔ)}{2}$.

ii) Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΕΔ είναι οκταπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΜ.

ΑΣΚΗΣΗ 6η

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι μ_α =3ρ, όπου ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. Ο λόγος $\frac{\beta+\gamma}{\alpha}$ ισούται με: **Α**: 2, **Β**: 3, **Γ**: $\frac{1}{3}$, **Δ**: $\frac{3}{2}$ **Ε**: Κανένα από τα παραπάνω.

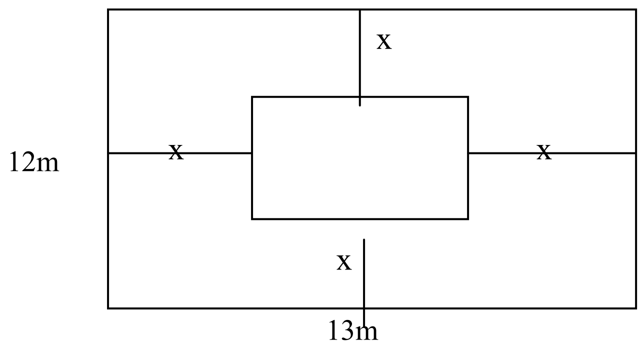
(Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.)

ΑΣΚΗΣΗ 7η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Προεκτείνουμε την ΒΑ προς το Α κατά τμήμα ΑΕ=2ΑΒ. Να αποδείξετε ότι (ΒΕΔ)=3(ΑΔΓ).

ΑΣΚΗΣΗ 8η

Στο εσωτερικό της αυλής ενός σπιτιού υπάρχει μικρός κήπος με λαχανικά όπως στο ακόλουθο σχήμα. Αν το εμβαδόν του κήπου είναι $12\,m^2$ και οι διαστάσεις της αυλής είναι 12m και 13m, να βρεθεί το x. Αν θέλουμε να περιφράξουμε τον κήπο με σύρμα, πόσο σύρμα θα χρειαστούμε;



ΑΣΚΗΣΗ 9η

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από τυχαίο σημείο Ε της ΑΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΔ που τέμνει την ΓΔ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

i) (ΑΔΖ)=(ΑΕΒ).

ii) (ΑΕΖ)=(ΒΕΓ)-(ΖΕΓ).

ΑΣΚΗΣΗ 10η

Οι διάμεσοι ΒΔ και ΓΕ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Θ. Να αποδείξετε ότι:

i) (ΑΕΔ)=$\frac{(ΑΒΓ)}{4}$

ii) (ΒΘΓ)= $\frac{(ΑΒΓ)}{3}$

iii)(ΑΕΔ)= (ΒΚΛΓ), όπου Κ, Λ τα μέσα των ΒΘ και ΓΘ αντίστοιχα.

ΑΣΚΗΣΗ 11η

Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΔ. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Αν η παράλληλη από το Α προς τη ΒΓ τέμνει την προέκταση της ΔΕ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

α) $\beta(\text{ΑΕΔ}) = \gamma(\text{ΔΕΓ})$.

β) $\beta^2(\text{ΑΕΖ}) = \gamma^2(\text{ΔΕΓ})$.

ΑΣΚΗΣΗ 12η

Θεωρούμε γωνία $x\hat{A}y$ και σημείο Ο της διχοτόμου της Αδ. Αν ο κύκλος (Ο,ΟΑ) τέμνει τις Οx, Oy στα Β, Γ αντίστοιχα και την Αδ στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α) (ΟΑΒ)=(ΟΑΓ)

β) (ΒΟΓΔ)=(ΑΒΔ)

γ) $(\text{ΒΟΓΔ})=\frac{1}{2}(\text{ΟΑ})(\text{ΒΓ})$.

ΑΣΚΗΣΗ 13η

Από εσωτερικό σημείο Μ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε παράλληλες προς τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ, που τέμνουν τις ΑΒ, ΑΓ στα Δ, Ζ αντίστοιχα. Αν (ΒΜ)=x, (ΒΓ)=α, $(\text{ΒΔΜ})=E_1$, $(\text{ΓΖΜ})=E_2$ και (ΑΒΓ)=Ε, τότε:

α) Να εκφράσετε ως συναρτήσεις των x και α τους λόγους $\frac{E_1}{E}$ και $\frac{E_2}{E}$.

β) Να αποδείξετε ότι $E_1 + E_2 \geq \frac{1}{2}E$.

ΑΣΚΗΣΗ 14η

Δίνεται κύκλος (Ο,R) και δύο παράλληλες χορδές του $\text{ΑΒ}=\text{ΓΔ}=\lambda_3$.
Να βρεθεί:

i) Η περίμετρος του ΑΒΓΔ.

ii) Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που αντιστοιχεί στη χορδή ΑΒ.

ΑΣΚΗΣΗ 15η

Σε κύκλο (Ο,R) θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ και Δ ώστε ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ= R. Να βρεθεί:

i) Η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΔ.

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΔ.

iii) Ο λόγος $\frac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΒΓΔ})}$.

ΑΣΚΗΣΗ 16η

Δίνεται τεταρτοκύκλιο $\text{Ο}\widehat{\text{ΒΓ}}$, ακτίνας R.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΒ δε χωρίζει το τεταρτοκύκλιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

β) Αν Δ σημείο του τόξου ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΔ δε χωρίζει το τεταρτοκύκλιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία,

γ) Να βρείτε σημείο Α της ακτίνας ΟΒ, ώστε η ευθεία ΓΑ να χωρίζει το τεταρτοκύκλιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

ΑΣΚΗΣΗ 17η

Θεωρούμε τεταρτοκύκλιο Ο, $\overset{\frown}{ΒΓ}$, ακτίνας R. Σημείο Α κινείται πάνω στο τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$ και έστω Κ το σημείο τομής της ακτίνας ΟΑ με τη ΒΓ. Να βρείτε το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{ΒΑ}$ όταν το εμβαδό του τριγώνου ΟΚΓ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τα τμήματα ΚΑ, ΚΒ και το τόξο $\overset{\frown}{ΒΑ}$.

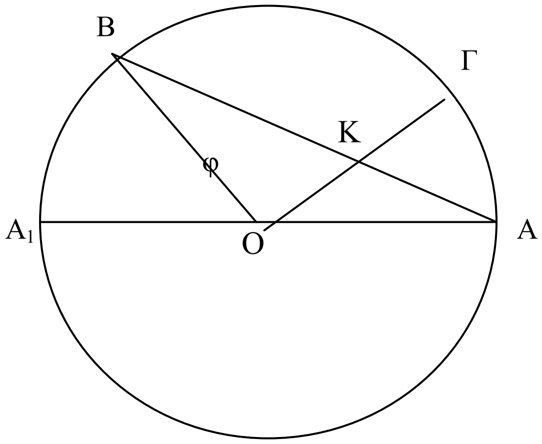
ΑΣΚΗΣΗ 18η

Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο με διάμετρο $ΑΑ_1=2R$. Έστω Β σημείο του ημικυκλίου με $(Β\hat{Ο}Α_1)=φ$ μοίρες και ΟΓ ακτίνα, που τέμνει τη χορδή ΑΒ στο Κ.

α) Να βρείτε το μήκος S του τόξου $\overset{\frown}{ΑΓ}$, όταν το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΒ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τα τμήματα ΚΑ, ΚΓ και το τόξο $\overset{\frown}{ΑΓ}$.

β) Αν η γωνία $Β\hat{Ο}Α_1$ είναι 150^o, πόσο είναι το S;

γ) Για ποια τιμή του φ το S γίνεται μέγιστο;



ΑΣΚΗΣΗ 19η

Η περίμετρος ρόμβου ΑΒΓΔ, πλευράς α και κέντρου Ο, είναι τετραπλάσια της μικρής διαγωνίου του ΒΔ.

i) Να υπολογιστεί συναρτήσει του α το εμβαδόν του Ε.

ii) Φέρουμε $ΟΗ \perp ΑΔ$ και $ΟΖ \perp ΓΔ$. Αν η ΑΖ τέμνει τον κύκλο διαμέτρου ΟΔ στο Θ να δειχθεί ότι $ΑΘ \cdot ΑΖ = \frac{Ε\sqrt{3}}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 20η

Το περίγραμμα της βάσης ενός μεγάλου λόφου σχηματίζει τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=γ, ΑΓ=β όπου β>γ και στο οποίο η διάμεσος ΑΜ και το ύψος ΑΔ σχηματίζουν γωνία 30^o. Δίπλα στην πλευρά ΑΓ υπάρχει ορθογώνιος ιδιωτικός χώρος διαστάσεων $\frac{\beta+\gamma}{2}$ και β-γ. Σ' αυτόν το χώρο πρόκειται να κατασκευαστεί ένας μεγάλος ανισόπεδος κόμβος, που θα συνδέει δύο δρόμους ταχείας κυκλοφορίας. Γι' αυτούς τους λόγους προτείνεται στον ιδιοκτήτη να δεχτεί να ανταλλάξει αυτόν τον χώρο με άλλον ορθογώνιο χώρο του δημοσίου, που βρίσκεται δίπλα στην πλευρά ΒΓ και έχει διαστάσεις τα μήκη των ΒΓ και $\frac{ΑΜ}{2}$. Ο ιδιοκτήτης δηλώνει ότι θα συμφωνήσει με την πρόταση αρκεί οι ανταλλάξιμοι χώροι να έχουν την ίδια έκταση. Πρακτικά όμως είναι αδύνατον να μετρήσει την πλευρά ΒΓ και τη διάμεσο ΑΜ, γι' αυτό και διστάζει. Πως θα σκεφτόσαστε εσείς να βοηθήσετε τον ιδιοκτήτη να αποφασίσει;

ΑΣΚΗΣΗ 21η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με β=2γ και η διάμεσος του ΒΔ. Φέρουμε $Ax \perp В\Delta$, που τέμνει την ΒΔ στο Ε και την ΒΓ στο Ζ και Εy//ΑΓ, που τέμνει την ΒΓ στο Μ. Να αποδείξετε ότι:

i) ΖΒ= $\frac{1}{2}$ΖΓ.

ii) (ΑΒΓ)=3(ΑΒΖ).

iii) Να αποδειχθεί ότι: $\frac{(\text{ΕΜΓ})}{(\text{ΑΒΖ})} = \frac{3}{8}$

ΑΣΚΗΣΗ 22η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με α=2γ και β=$\sqrt{7}\gamma$.

α) i) Να αποδείξετε ότι $\mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

ii) Να βρείτε το είδος της γωνίας $\hat{\text{B}}$.

iii) Αν ΑΕ $\perp$ ΒΓ να υπολογίσετε το ΒΕ συναρτήσει του γ.

iv) Να βρείτε τη γωνία $\hat{\text{B}}$.

β) Αν ΑΜ διάμεσος και ΒΔ διχοτόμος να αποδείξτε ότι:

i). ΑΔ = $\frac{\beta}{3}$

ii). (ΑΒΓ) = 6(ΑΔΜ).

ΑΣΚΗΣΗ 23η

Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) και σημείο Μ το οποίο κινείται στο ημικύκλιο $\overset{\frown}{\text{ΑΒΓ}}$.

α) Να βρεθεί το ελάχιστο $(\text{E}_{\min})$ και το μέγιστο $(\text{E}_{\max})$ εμβαδόν του τετράπλευρου ΑΜΓΔ συναρτήσει της ακτίνας R.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε θέση του Μ είναι:

i) ΜΔ^2 = ΑΓ· ΔΕ, όπου Ε η προβολή του Μ στην ΒΔ.

ii) (ΑΜΓΔ) = $\frac{\text{ΜΔ}^2}{2}$

γ) Να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Μ όταν (ΑΜΓΔ) = $\frac{E_{\min} + E_{\max}}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 24η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, Μ το μέσο της ΑΒ, σημείο Ν της ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΝ = $\frac{3}{4}$ΑΓ και σημείο Κ της ΒΓ τέτοιο ώστε ΒΚ = $\frac{1}{4}$ΒΓ. Να βρεθεί ο λόγος των εμβαδών του τριγώνου ΑΒΓ προς του τριγώνου ΜΝΚ.

ΑΣΚΗΣΗ 25η

Α) Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο είναι μ_α^2 = βγ και β-γ = $5\sqrt{2}$. Το μήκος της πλευράς α είναι: **Α** : 8 **Β** : 10 **Γ** : 12 **Δ** : $3\sqrt{5}$ **Ε** : $5\sqrt{3}$.

Β) Να δειχθεί ότι σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο ισχύει η σχέση: $(\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2)^2 = 27\text{E}^2$, όπου Ε το εμβαδό του.

ΑΣΚΗΣΗ 26η

Να βρεθεί το είδος του τριγώνου (αν υπάρχει) σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, όπου η τριάδα αριθμών είναι μήκη ευθυγράμμων τμημάτων και μπορεί να αποτελεί μήκη των πλευρών του:

i). 3, 5,7
ii). 8, 4, 2
iii). 7, 6, $\sqrt{85}$.

ΑΣΚΗΣΗ 27η

Αν η διάμεσος μ_α ενός τριγώνου ΑΒΓ, όταν προεκταθεί τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Δ, να αποδειχθεί ότι: $\mu_\alpha = \dfrac{\beta^2 + \gamma^2}{2\text{ΑΔ}}$.

ΑΣΚΗΣΗ 28η

Από ένα κυκλικό οικόπεδο ακτίνας R=30m, θα αποκοπεί κυκλικό τμήμα χορδής $30\sqrt{3}$ m για την κατασκευή δρόμου.
i) Να βρεθεί το εμβαδό του οικοπέδου που έμεινε.
ii) Να βρεθεί η αποζημίωση που θα δοθεί στον ιδιοκτήτη αν η αρχική αξία του οικοπέδου ήταν 10.000.000 δρχ.

ΑΣΚΗΣΗ 29η

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο είναι α =13, β = 8, γ = 7.
i) Να χαρακτηρίσετε το τρίγωνο ΑΒΓ ως προς το είδος των γωνιών του.
ii) Να υπολογιστεί το μήκος της προβολής ΑΔ της πλευράς ΑΓ πάνω στην ΑΒ.
iii) Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{\text{Α}}$.

ΑΣΚΗΣΗ 30η

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 4, ΑΓ = 5, ΒΓ = 7. Το μήκος της προβολής ΑΔ της πλευράς ΑΓ πάνω στην ΑΒ είναι: Α :5 Β : 1 Γ : 6 Δ : 2.
(Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας).

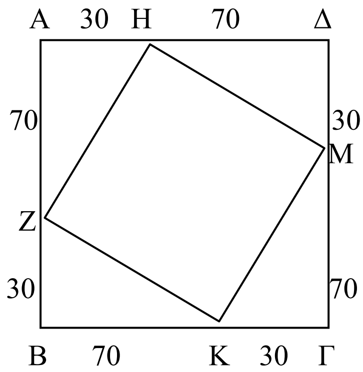
ΑΣΚΗΣΗ 31η

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{\text{Α}}$ =90°) με $\hat{\text{Β}}$ =60° και ΒΓ=4. Με κέντρο το Β και ακτίνα ΒΑ γράφουμε τόξο που τέμνει την ΒΓ στο Μ και με κέντρο το Γ και ακτίνα ΓΜ γράφουμε τόξο που τέμνει την ΑΓ στο Ν. να βρεθούν**:**

i) Η θέση του σημείου Μ στη ΒΓ
ii) Η περίμετρος του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΜΝ.
iii) Το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΜΝ.

ΑΣΚΗΣΗ 32η

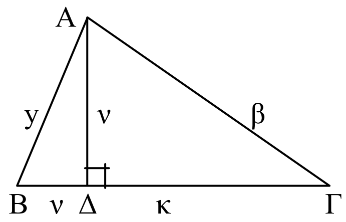
Μια έκταση σχήματος τετραγώνου με πλευρά 100m, πρόκειται να διατεθεί για κατασκευή εργατικών κατοικιών. Οι κατοικίες θα ανεργεθούν σε τέσσερα ίσα τριγωνικά οικόπεδα και η υπόλοιπη έκταση, σχήματος τετραπλεύρου θα χρησιμοποιηθεί ως κοινόχρηστος χώρος για δενδροφύτευση και κατασκευή γηπέδου μπάσκετ.



α) Να βρεθούν τα εμβαδά των τεσσάρων ίσων οικοπέδων
β) Να βρεθεί το εμβαδό του κοινόχρηστου χώρου
γ) Τι είδους τετράπλευρο είναι ο κοινόχρηστος χώρος; Να βρεθούν οι πλευρές του.

ΑΣΚΗΣΗ 33η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και ΑΒ=y, ΑΓ=β
ΑΔ=ν, ΒΔ=μ, ΒΓ=x, ΔΓ=κ.
i) Να συμπληρωθούν οι σχέσεις:
β^2=………..=…………..
ν^2=………………
$\dfrac{y^2}{\beta^2}$=…………… βy=…………
ii) Να δειχθεί ότι: $\dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{\beta^2} = \dfrac{1}{\nu^2}$.



ΑΣΚΗΣΗ 34η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ,Ε της πλευράς ΒΓ έτσι ώστε: ΒΔ=ΔΕ=ΕΓ. Να απόδειχθεί ότι:
i) $AB^2 - 2\Delta E^2 = 2A\Delta^2 - AE^2$ ii) $AB^2 + 2A\Gamma^2 = 3AE^2 + 6\Delta E^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 35η

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$, ΑΒ=5cm, ΑΓ=12cm, ΑΔ το ύψος του και ΒΜ η διάμεσος του. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά ΓΕ=ΒΓ. i) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΔΓ και ΑΓΕ ii) Να δείξετε ότι η σχέση που συνδέει τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΜ και ΑΒΕ είναι (ΑΒΕ)=4(ΑΒΜ).

ΑΣΚΗΣΗ 36η

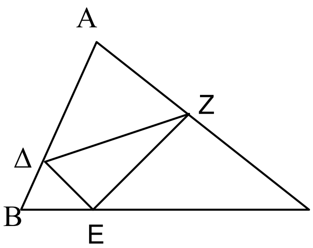
Από σημείο Μ εκτός κύκλου, φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΜΕ του κύκλου και τις τέμνουσες ΜΑΒ και ΜΓΔ. Αν είναι ΑΒ=9, ΓΜ=4, ΓΔ=5 να υπολογίσετε: i) το ΜΑ ii) το ΜΕ.

ΑΣΚΗΣΗ 37η

Δίνεται κύκλος (Ο,R), ΑΒ μια διάμετρος του και Μ τυχαίο σημείο του (διαφορετικό των Α, Β). Αν Γ είναι το μέσο της ΟΑ και Δ το μέσο της ΟΒ, ενώ η ΜΓ τέμνει τον κύκλο στο Ε και η ΜΔ στο Ζ τότε να αποδείξετε ότι: $\dfrac{M\Gamma}{\Gamma E} + \dfrac{M\Delta}{\Delta Z} = \dfrac{10}{3}$.

ΑΣΚΗΣΗ 38η

Ένα τριγωνικό αγρόκτημα ΑΒΓ χωρίζεται σε τέσσερα τριγωνικά αγροτεμάχια όπως φαίνεται στο σχήμα, έτσι ώστε: $ΑΔ = \frac{2}{3}ΑΒ$, $ΒΕ=\frac{1}{4}ΒΓ$ και $ΓΖ=\frac{1}{2}ΑΓ$. α) Αν το εμβαδό του ΑΒΓ είναι 48 στρέμματα να υπολογίσετε το εμβαδό του ΔΕΖ. β) Αν τα Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα να βρεθούν τα εμβαδά των τεσσάρων αγροτεμαχίων.

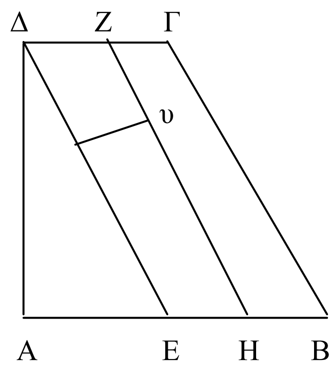


ΑΣΚΗΣΗ 39η

Δίνεται εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, ώστε οι πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο. Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος του ΒΔ, το χωρίζει σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα.

ΑΣΚΗΣΗ 40η

Το οικόπεδο ΑΒΓΔ του σχήματος έχει την ΑΒ=55m, ΓΔ=25m, ΑΔ=40m και $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^o$. Πρέπει να χαραχθεί ένας δρόμος ΔΕΗΖ με ΔΕ//ΓΒ και ΖΗ//ΓΒ, ο οποίος θα χωρίσει το οικόπεδο σε δύο τεμάχια ΑΕΔ και ΖΗΒΓ όπως στο σχήμα. α) Να βρεθεί το εμβαδό του οικοπέδου ΑΒΓΔ β) Να βρεθεί το εμβαδό του τεμαχίου ΑΕΔ γ) Να βρεθεί το ΔΖ έτσι ώστε το τεμάχιο ΖΗΒΓ να έχει το ίδιο εμβαδό με το τεμάχιο ΑΕΔ δ) Ποιο είναι το πλάτος του δρόμου ΔΕΗΖ στην περίπτωση (γ);



ΑΣΚΗΣΗ 41η

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και τα σημεία του Γ, Δ έτσι ώστε $ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ$. Αν Μ τυχαίο σημείο, εκτός του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

Να δείξετε ότι $ΑΜ^2 + 3ΜΒ^2 = ΜΒ^2 + 3ΜΓ^2$

ΑΣΚΗΣΗ 42η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει το περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο Δ να δείξετε ότι:

α) $ΜΔ = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$ β) $(ΑΒΓ) = 3(ΒΔΓ)$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 43η</u>

Από ένα εξωτερικό σημείο Α κύκλου (O, R) φέρουμε μια τέμνουσα ΑΒΓ έτσι ώστε $\mathrm{AB} = \mathrm{B\Gamma}$. Αν $\mathrm{OA} = R\sqrt{7}$ τότε να δείξετε ότι:

i) $\mathrm{AB} = \mathrm{B\Gamma} = \lambda_3$

ii) η γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\Gamma$ είναι αμβλεία

iii) η προβολή της ΟΓ πάνω στην ΟΑ είναι ίση με $\frac{2}{7}\mathrm{OA}$

iv) Να δείξετε ότι $\frac{(\mathrm{BO\Gamma})}{(\mathrm{AO\Gamma})} = \frac{1}{2}$ και στην συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\Gamma$

v) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από την χορδή ΒΓ και το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$