ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
20ΡΟΣΗΜ01
www.2001.gr

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΟΛΟΓΙΟ

ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ

ΛΙΠΟΡΔΕΖΗΣ ΣΑΚΗΣ
ΣΕΜΣΙΡΗΣ ΑΡΙΣΤΕΙΔΗΣ
ΣΟΥΛΤΑΝΙΔΟΥ ΚΙΚΗ

8η ΕΚΔΟΣΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στο εγχειρίδιο αυτό περιλαμβάνεται το βασικό πρόγραμμα ασκήσεων με το οποίο εκπαιδεύονται οι μαθητές του φροντιστηρίου 2001 – ΟΡΟΣΗΜΟ.

Ο αναγνώστης μετά την μελέτη του μπορεί να διαπιστώσει ότι οι ασκήσεις είναι εναρμονισμένες στο "πνεύμα„ των ασκήσεων των πανελλήνιων εξετάσεων.

Ο τίτλος του είναι ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ γιατί προσπαθήσαμε η ποσότητα των ασκήσεων να είναι όσο γίνεται ιδανική όπως η χρυσή τομή.

Για τους μαθητές που δεν γνωρίζουν την έννοια της χρυσής τομής παραθέτουμε ένα σχετικό αρθράκι.

Με τιμή

Οι συγγραφείς

ΑΘ. ΛΙΠΟΡΔΕΖΗΣ

ΑΡ. ΣΕΜΣΙΡΗΣ

Κ. ΣΟΥΛΤΑΝΙΔΟΥ

ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ

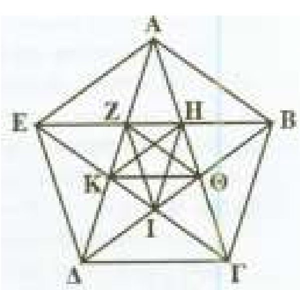
Το ιδιαίτερο σύμβολο της σχολής των Πυθαγορείων ήταν ένα αστέρι με πέντε κορυφές εγγεγραμμένες σε ένα κανονικό πεντάγωνο. Οι διαγώνιοι του κανονικού πενταγώνου που σχηματίζουν το αστέρι τέμνονται μεταξύ τους ώστε να σχηματίζουν ένα μικρότερο ανεστραμμένο κανονικό πεντάγωνο, στο οποίο αν φέρουμε τις διαγωνίους σχηματίζεται ένα μικρότερο αστέρι κ.ο.κ. Το όλο σχήμα τώρα εμφανίζει ορισμένες συναρπαστικές ιδιότητες που αποτέλεσαν τη βάση της κορυφαίας αισθητικής αρμονίας στο χώρο των κατασκευών και της διακοσμητικής γενικά. Κάθε σημείο τομής των διαγωνίων διαιρεί τις διαγωνίους σε δύο τμήματα άνισα που έχουν λόγο φ= $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,6180339887498948482045868 34$.

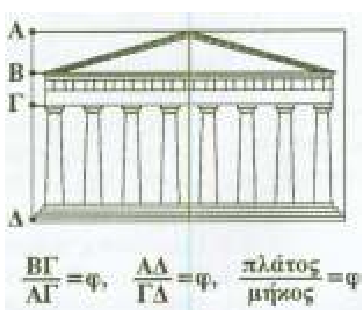
Αυτός ο λόγος είναι το πηλίκο της διαγωνίου προς το μεγαλύτερο τμήμα αλλά και του μεγαλύτερου προς το μικρότερο. Αυτός ο λόγος αποδείχτηκε ότι δημιουργεί την κορυφαία αισθητική αρμονία. Παρατηρείται όχι λίγες φορές στον Παρθενώνα που θεωρείται παγκοσμίως μία ανυπέρβλητη κατασκευή από άποψη καλαίσθητης αρμονίας (βλ. σχήμα).

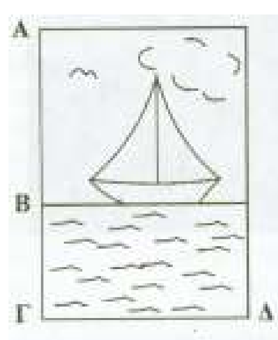
Επίσης αν κάποιος καθηγητής σχεδιάσει μερικά ορθογώνια στον πίνακα και σ' ένα από αυτά ο λόγος των διαστάσεων του είναι φ, θα παρατηρήσει ότι οι περισσότεροι μαθητές, αυτό το ορθογώνιο θα επιλέξουν ως το ομορφότερο.

Το ιδεώδες της ομορφιάς που προσφέρει ο λόγος φ της χρυσής τομής εμφανίζεται και στη φύση. Τα περισσότερα από τα λουλούδια έχουν 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ή 89 πέταλα. Παρατηρείται ότι πηλίκα δύο διαδοχικών τέτοιων αριθμών ολοένα πλησιάζουν προς τον αριθμό φ. Π.χ. $\frac{89}{55}$=0,61. Οι αριθμοί της ακολουθίας Fibonacci είναι οι παραπάνω αριθμοί. Πρέπει όμως να σημειώσουμε ότι ο λόγος φ εμφανίζεται εκατοντάδες χρόνια πριν τους πυθαγόρειους. Στην πυραμίδα της Γκίζας ο λόγος του ύψους της προς μισό της ακμής της βάσης της είναι φ. Επίσης ο αιγυπτιακός πάπυρος Rhind αναφέρεται στον «ιερό λόγο» φ.

Όμως η χρυσή τομή ως «θεϊκός λόγος» συνεχίζει να βασιλεύει στο χώρο της αισθητικής και την εποχή της Αναγέννησης όπου σε πίνακες ζωγραφικής και αγάλματα εμφανίζεται ο λόγος φ. Στα μεν αγάλματα ο λόγος φ επιδιώκεται στις διαστάσεις π.χ. το πηλίκο της απόστασης από τον αφαλό ως το έδαφος προς όλο το ύψος του αγάλματος προσεγγίζει τον τιμή φ, ενώ στη ζωγραφική επιλέγουν το «χρυσό ορθογώνιο» ($\frac{ΑΓ}{ΓΔ}$=φ) ενώ σε ζωγραφική τοπίου φροντίζουν τη γραμμή του ορίζοντα να τη σχεδιάζουν εκεί που χωρίζει το ορθογώνιο σε λόγο ($\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$=φ).







Μιγαδικοί αριθμοί

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Το σύνολο των φανταστικών αριθμών:

$\mathbb{I}$ = { αριθμοί της μορφής κi, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$ και $i^2 = -1$}

π.χ. $\frac{1}{2}i$, $3i$, $-2i$, $\sqrt{2}\,i$, $4{,}8i$, $-\frac{3}{4}i$, $-\sqrt{3}\,i$

Γεωμετρική αναπαράσταση των φανταστικών στο επίπεδο

Είναι σημεία του άξονα yy΄ με τεταγμένη το κ. Ο άξονας yy΄ θα λέγεται άξονας των φανταστικών αριθμών και ο xx΄ των πραγματικών.

- Τοποθέτησε τα παραπάνω παραδείγματα στο επίπεδο των αξόνων.

Δυνάμεις του i

Τύπος:

$$i^{\nu} = \begin{cases} 1 & \text{αν } \nu = 4\kappa, \\ i & \text{αν } \nu = 4\kappa+1, \\ -1 & \text{αν } \nu = 4\kappa+2, \\ -i & \text{αν } \nu = 4\kappa+3, \end{cases} \qquad \kappa \in \mathbb{Z}$$

π.χ. $i^{2003} = i^{4\cdot 500+3} = -i$

ή αλλιώς χωρίς χρήση του τύπου: $i^{2003} = (i^2)^{1001} \cdot i = (-1)^{1001} \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$\frac{1}{i} = \frac{1\cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$

Επίσης, ορίζουμε $i^0 = 1$.

Το σύνολο των Μιγαδικών Αριθμών

$\mathbb{C}$ = {αριθμοί της μορφής α+βi, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$}

Έτσι έχουμε $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Δηλαδή, το $\mathbb{C}$ είναι το υπερσύνολο όλων των συνόλων που έγιναν γνωστά έως τώρα.

α= Re(z) το πραγματικό μέρος του μιγαδικού z=α+βi και

β= Im(z) το φανταστικό μέρος του μιγαδικού z=α+βi

Ισότητα μιγαδικών:

Αν $z_1 = \alpha+\beta i$ και $z_2 = \gamma+\delta i$ τότε λέμε ότι:

$$\boxed{z_1 = z_2 \text{ αν και μόνο αν } \alpha=\gamma \text{ και } \beta=\delta}$$

Γεωμετρική παράσταση μιγαδικού z= x+yi:

Είναι το σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y), δηλαδή Μ(x, y). Η εικόνα του z στο επίπεδο συμβολίζεται Μ(z).

Πράξεις στο Σύνολο $\mathbb{C}$ των Μιγαδικών Αριθμών

Πρόσθεση

Αν $z_1 = α+βi$ και $z_2 = γ+δi$ τότε:

$$\boxed{z_1 + z_2 = (α+γ)+(β+δ)i}$$

Η πρόσθεση ορίζεται επαγωγικά και για περισσότερους από δύο μιγαδικούς. Επίσης, πολύ εύκολα μπορείς να διαπιστώσεις ότι όπως ορίστηκε η πρόσθεση μιγαδικών αριθμών ορίζεται η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα.

Αφαίρεση

$$\boxed{z_1 - z_2 = (α-γ)+(β-δ)i}$$

Πολλαπλασιασμός Μιγαδικών Αριθμών

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (αγ-βδ)+(αδ+βγ)i}$$

Αν δεν θυμάσαι τον τύπο, να κάνεις τον πολλαπλασιασμό (α+βi)(γ+δi) με την εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας και το αποτέλεσμα να το γράφεις στη μορφή μιγαδικού οπότε καταλήγεις στον τύπο.

Πηλίκο μιγαδικών

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{αγ+βδ}{γ^2+δ^2} + \frac{βγ-αδ}{γ^2+δ^2}i}$$

Αν δε θυμάσαι τον τύπο για να βρεις το αποτέλεσμα $\frac{α+βi}{γ+δi}$ να πολλαπλασιάζεις αριθμητή και παρονομαστή με τον (γ-δi) και μετά την εκτέλεση των πράξεων φτάνεις στο αποτέλεσμα του τύπου.

Αντίστροφοι του z= α+βi

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{α}{α^2+β^2} + \frac{-β}{α^2+β^2}i}$$

Για να μην τον θυμάσαι απ' έξω κάνε ότι υποδείξαμε για το πηλίκο μιγαδικών.

Συζυγής του z=α+βi

Συμβολίζεται με $\bar{z}$ και είναι ο μιγαδικός $\bar{z}=α-βi$

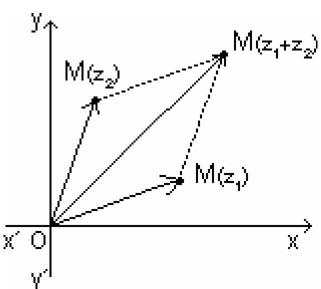
Ιδιότητες Συζυγών

1. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$
2. $\overline{z_1-z_2}=\overline{z}_1-\overline{z}_2$
3. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$
4. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$
5. $(\overline{z^{\nu}})=(\overline{z})^{\nu}$
6. $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$
7. $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \overline{z}=z$ και $z\in I\Leftrightarrow \overline{z}=-z$

(Τη σημαντική αυτή ιδιότητα δυστυχώς το σχολικό την έχει ως άσκηση 8, Β΄ Ομάδα, σελ.96)

Γεωμετρικη Αναπαρασταση Πραξεων Μιγαδικων

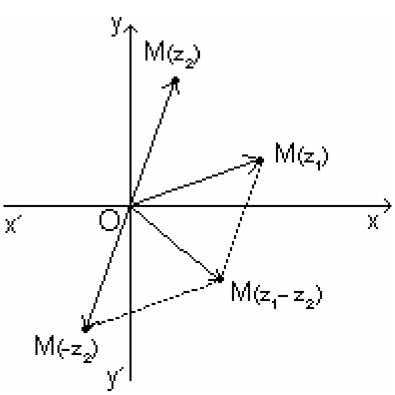
Πρόσθεση



(κανόνας παραλληλογράμμου)

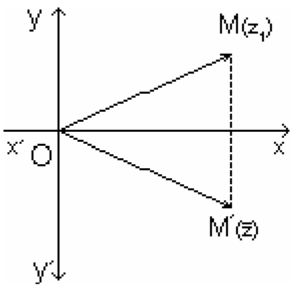
Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM_1}$ ονομάζεται διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού z_1. Ομοίως και για τα υπόλοιπα.

Αφαίρεση



$z_1-z_2=z_1+(-z_2)$

Συζυγής του z=α+βi



Οι εικόνες των συζυγών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα xx΄

ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $αz^2+βz+γ=0$ ΜΕ α, β, γ $\in \mathbb{R}$ ΚΑΙ α≠0 ΚΑΙ z $\in \mathbb{C}$ ΚΑΙ Δ<0

$$\boxed{z_{1,2}=\frac{-β\pm i\sqrt{-Δ}}{2α}}$$

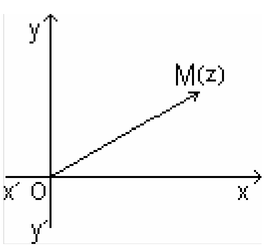
(Ισχύουν και σε αυτή την περίπτωση οι τύποι του Vietta, δηλαδή $z_1+z_2=-\frac{β}{α}$ και $z_1\cdot z_2=\frac{γ}{α}$)

ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

Ορισμός

Ονομάζεται ο μη αρνητικός αριθμός $\sqrt{x^2+y^2}$ και συμβολίζεται με|z|, όταν z=x+yi

Γεωμετρική ερμηνεία |z|:



(Εξ ορισμού παρατηρούμε ότι προκύπτει $|z|=|\overrightarrow{OM}|$ δηλαδή, |z| είναι το μήκος (ΟΜ))

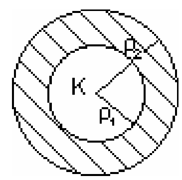
Ιδιότητες του μέτρου μιγαδικού

1. $|z|=|\bar{z}|=|-z|$
2. $|z|^2=z\bar{z}$
3. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
4. $|z^ν|=|z|^ν$
5. $||z_1|-|z_2||\leq|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$
6. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ $z_2\neq0$

Βασικοι Γεωμετρικοι Τοποι

Το σύνολο των εικόνων του $z=x+yi$ για τον οποίο:

- $Re(z)=0$ είναι ο άξονας των φανταστικών αριθμών (yy΄)
- $Im(z)=0$ είναι ο άξονας των πραγματικών (xx΄)
- $Re(z)=Im(z)$ είναι η διχοτόμος $y=x$ της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων
- $Re(z)+Im(z)=0$ είναι η διχοτόμος $y=-x$ της 2ης και 4ης γωνίας των αξόνων
- $Re(z)\geq 0$ είναι τα σημεία του ημιεπιπέδου δεξιά του άξονα yy΄ με τα σημεία του yy΄
- $|z|=\rho$, με $\rho>0$ είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ
- $|z-z_0|=\rho$, με $\rho>0$ όπου $z_0=x_0+y_0i$ γνωστός μιγαδικός αριθμός. Είναι κύκλος με κέντρο την εικόνα του z_0 δηλαδή, το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ.
- $|z_1-z_2|$ εκφράζει γεωμετρικά την απόσταση των εικόνων τους
- $|z-z_1|=|z-z_2|$ είναι η μεσοκάθετη του τμήματος με άκρα τις εικόνες των z_1 και z_2
- $\rho_1\leq|z-z_0|\leq\rho_2$, με $\rho_1>0$ και $\rho_2>0$ είναι κυκλικός δακτύλιος



$K(x_0, y_0)$

$z_0=x_0+y_0i$

- $|z+\gamma|+|z-\gamma|=2\alpha$, όπου $\alpha>\gamma>0$ είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία Ε (γ, 0) και Ε΄(-γ,0)
- $||z+\gamma|-|z-\gamma||=2\alpha$, όπου $0<\alpha<\gamma$ είναι υπερβολή με εστίες τα σημεία Ε (γ, 0) και Ε΄(-γ, 0)

Ασκησεις

Α. Προτεινόμενες από το σχολικό βιβλίο

1. Α΄ ΟΜΑΔΑ σελ. 95: 8, 12, 14 και Β΄ ΟΜΑΔΑ: 3 έως και 9
2. Α΄ ΟΜΑΔΑ σελ. 101: 4 έως και 9 και Β΄ ΟΜΑΔΑ: όλες
3. Γ΄ ΟΜΑΔΑ σελ. 123: 1, 2, 3, 4

Β. Επιλογή Ασκήσεων από Ελληνική και Ξένη Βιβλιογραφία και Ασκήσεις του Συγγραφέα

Πράξεις μιγαδικών

1. Να δείξετε ότι $i^{\nu}+i^{\nu+1}+i^{\nu+2}+i^{\nu+3}=\frac{1}{i^{\nu}}+\frac{1}{i^{\nu+1}}+\frac{1}{i^{\nu+2}}+\frac{1}{i^{\nu+3}}=0$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.

2. Αν οι θετικοί ακέραιοι ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 διαιρούμενοι με 4 δίνουν το ίδιο υπόλοιπο να δείξετε ότι:
   α) $i^{\nu_1}=i^{\nu_2}=i^{\nu_3}=i^{\nu_4}$ και β) $i^{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4}=1$

3. Να προσδιορίσετε τους μονοψήφιους θετικούς ακεραίους ν για τους οποίους το άθροισμα $\Sigma=1+i^1+i^2+i^3+\ldots+i^{\nu}$ είναι πραγματικός αριθμός.
   [Απ.: $\nu\in\{3, 4, 7, 8\}$]

4. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων: α) $\frac{1}{i^{2001}}+\frac{1}{i^{2003}}+\frac{1}{i^{2004}}$, β) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdots i^{2004}$
   [Απ.: α)1, β)-1]

5. Να δείξετε ότι $\left\langle\frac{xy+i}{1-xyi}\right\rangle^{4\nu}+\left\langle\frac{i-xy}{1+xyi}\right\rangle^{4\nu}=2$, όπου $x, y\in\mathbb{R}$ και $\nu\in\mathbb{N}^*$.

6. Να βρείτε τον αριθμό $\lambda\in 3$ ώστε ο μιγαδικός $z=\frac{\lambda+2i}{\lambda-(\lambda-1)i}$ να είναι πραγματικός αριθμός.
   [Απ.: λ=0 ή λ= -1]

7. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x, y, ώστε να ισχύει η ισότητα:
   $$-2^{1002}+4+(x+yi)^2-(1-i)(x+yi)=(x-yi)^2-2\frac{x+yi}{1+i}+(1+i)^{2004}+(x+5i)+(y+7i)$$
   [Απ. x=1 και y=3 ή x=3 και y=1]

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:
   α) $z^2+z+1=0$ β) $z^3-1=0$ γ) $z^3-\bar{z}=0$
   όπου z=x+yi
   [Απ.:α) $z_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ β) $z_1=1$, $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ γ) $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=-1$, $z_4=i$, $z_5=-i$]

9. Βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες του μιγαδικού z =5+12i. (Υπόδειξη: Έστω w=x+yi η τετραγωνική ρίζα του z τότε $w^2 = z$ και κατόπιν πράξεις. Προσοχή: Μη χρησιμοποιήσετε για τη ρίζα των μιγαδικών το σύμβολο $\sqrt{\ }$ γιατί αυτό χρησιμοποιείται μόνο για τους πραγματικούς αριθμούς.)

[Απ.: $z_1 = 3+2i \quad z_2 = -3-2i$]

10. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $(1+i)z^2 - 2\sqrt{2}\, iz - (1-i) = 0$, $z \in \mathbb{C}$

β) $\left\langle \dfrac{z-i}{z+i} \right\rangle^2 - 5\left\langle \dfrac{z-i}{z+i} \right\rangle + 6 = 0$, $z \in \mathbb{C}$

[Απ.:α) $z_1 = z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ β) $z_1 = -2i, \quad z_2 = -3i$]

11. Να λύσετε την εξίσωση $z^2 - \sqrt{2}(1-i)z - 2i = 0$, όπου $z \in \mathbb{C}$.

[Απ.: $z_1 = -\sqrt{2}\, i, \quad z_2 = \sqrt{2}$]

12. Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ το σύστημα. (Υπόδειξη: Επιλέξτε τη μέθοδο των οριζουσών)

$(2+i)x + (2-i)y = 6$

$(3+2i)x + (3-2i)y = 8$

[Απ.: x=2+i και y=2-i]

13. Να δείξετε ότι:

α) $z \in 3 \Leftrightarrow \bar{z} = z$

β) Να δείξετε ότι οι αριθμοί: 1. $w = \dfrac{2z}{1+z\bar{z}} + \dfrac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}}$, 2. $u = z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$ και

3. $v = z_1\bar{z}_1 + 2004(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) + z_2\bar{z}_2$, είναι πραγματικοί αριθμοί. Είναι z, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$

Μέτρο Μιγαδικού

14. Να δείξετε ότι:

α) $z \in \mathrm{I} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

β) Αν |z|=1 τότε ο αριθμός $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ είναι φανταστικός

15. Να δείξετε ότι:

α) Αν $|z_1|=|z_2|=1$ τότε $w = \dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \in \mathbb{R}$

β) Αν |z+i|=|z-i| τότε $z \in \mathbb{R}$

γ) Αν |z+IzI|+|z-IzI|=2|z| τότε $z \in \mathbb{R}$

16. Αν z_1, z_2 μη μηδενικοί αριθμοί του $\mathbb{C}$ και $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$ να δείξετε ότι $\dfrac{z_1}{z_2} \in \mathrm{I}$.

17. Αν z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$ να δείξετε ότι:

α) $|z_1|=|z_2|=1$

β) ο αριθμός $w = \left\langle \dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2} \right\rangle^2$ είναι πραγματικός

γ) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = (z_1+z_2)^{2002} - (z_1 \cdot z_2)^{2001} + 2004$

18. Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$ να δείξετε ότι $|z_1+z_2| = |z_1-z_2|$.

19. Έστω $f(x) = x^2 + 2|z_1 - z_2|x + (1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)$, όπου $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Να δείξετε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα; (Εισαγωγικές Α.Ε.Ι.)

20. Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ και $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ τότε να δείξετε ότι:

α) $|z_1 + z_2 + z_3| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right|$

β) Αν $z_1+z_2+z_3 = 2$ τότε $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 2$

21. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|\bar{z}| - z = 1 + 2i$

β) $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$

[Απ.: α) $z = \frac{3}{2} - 2i$, β) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = \frac{1}{2}$, $z_4 = -\frac{1}{2}$]

22. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 και οι $z = z_1(z_2 + \bar{z}_3)$, $w = z_2(z_1 + \bar{z}_3)$ και $u = \bar{z}_3(z_1 - z_2)$. Να αποδείξετε ότι αν $z, w \in \mathrm{I}$, τότε $u \in \mathrm{I}$

23. Να δείξετε ότι αν $\left|\frac{z+16}{z+1}\right| = 4$ τότε η εικόνα του z είναι σημείο κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 4.

24. Να δείξετε ότι αν $|2z+3| = 1$ τότε $|z+2|^2 + |z+1|^2 = 1$

25. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $|z_1| = 5$, $z_2 = 5+12i$. Να υπολογίσετε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = |z_1 + z_2|$

[Απ.: μέγ:18, ελάχ:8]

26. Αν για τους μιγαδικούς z και w ισχύει ότι $\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| = 1$ να δείξετε ότι ένας τουλάχιστον ισούται με τον αντίστροφο του συζυγούς αυτού.

27. Αν $|z-1+i| = 2$ να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = |z-5+4i|$ (Παρόμοια εκφώνηση: Να δείξετε ότι αν $|z-1+i| = 2$ τότε $3 \leq |z-5+4i| \leq 7$)

[Απ.: μέγ:7, ελάχ.:3]

28. Να λύσετε την εξίσωση $z^2 + 2(1+\text{συν}\theta)z + 2(1+\text{συν}\theta) = 0$ και να υπολογίσετε τα μέτρα των ριζών της.

[Απ.: $z_1 = -1-\text{συν}\theta - i\text{ημ}\theta$, $z_2 = -1-\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta$ και $|z_1| = |z_2| = 2\left|\text{συν}\frac{\theta}{2}\right|$]

29. Δίνεται ο μιγαδικός z και έστω $f(z) = \frac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}}$, $z \neq 1$

α) Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού f(2)

β) Να δείξετε ότι ο αριθμός $w = [f(2)]^{2004}$ είναι πραγματικός.

γ)Να δείξετε ότι $\left|\dfrac{f(z)-2}{f(z)+i}\right|=|z|$

δ)Αν $|z|=1$ και Μ η εικόνα του $f(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο να αποδείξετε ότι το Μ ανήκει σε ευθεία.

[Απ.: α)$2\sqrt{2}$ β)$w = -2^{3006}$ δ)μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα Α(2, 0) και Β(0, -1)]

Γεωμετρικοί Τόποι

30. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του $z \in \mathbb{C}$ για τον οποίο ισχύει:

α) $\mathrm{Im}\left\langle z+\dfrac{1}{z}\right\rangle=0$ β) $|z-1+i|=2$ γ) $\left|\dfrac{z-1}{z+i}\right|=1$ δ) $|z-i-1|=|z-1+i|$ ε) $2\le|z-2-i|\le5$

[Απ.: α)xx΄ ή στον κύκλο $x^2+y^2=1$ β)κύκλος κέντρου Κ(1, -1) και ακτίνας ρ=2 γ)Μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με Α(1, 0) και Β(0, -1) δ) Μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με Α(1, 1) και Β(1, -1) ε)κυκλικός δακτύλιος κέντρου Κ(2, 1) και πλάτους 3]

31. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου για τα οποία ο αριθμός:

α) $w=\dfrac{z+3i}{z+1}$ είναι φανταστικός, όπου z μιγαδικός με $z\neq -1$

β) Ομοίως για τον αριθμό $u=\dfrac{z+2i}{z-3}$ όπου z μιγαδικός με $z\neq3$

[Απ.: α) κύκλος με κέντρο $K\left\langle -\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{2}\right\rangle$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$, εκτός του σημείου (-1, 0).

β) κύκλος κέντρου $K\left\langle \dfrac{3}{2},-1\right\rangle$ και ακτίνας $\rho=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ εκτός του σημείου (3, 0).

32. Να βρείτε στο σύνολο των εικόνων Μ(z) του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει
α) $|z+4|=2|z+1|$.
Ομοίως για τους μιγαδικούς που ισχύει:

β) $(z+\bar{z})^2-(z-\bar{z})^2=4(z+\bar{z})$

γ) $z=(1-\eta\mu\theta)+(1+\sigma\upsilon\nu\theta)i$, $\theta\in(0,2\pi]$

[Απ.:α)Κύκλος κέντρου Κ(0,0)και ακτίνας ρ=2 β)κύκλος κέντρου Κ(1,0) και ακτίνας ρ=1 γ)κύκλος κέντρου Κ(1,1) και ακτίνας ρ=1]

33. Να βρείτε το σύνολο των σημείων του επιπέδου που αποτελούν τις εικόνες του μιγαδικού z=x+yi για τον οποίο ισχύει αντίστοιχα μία από τις παρακάτω σχέσεις:
α) $|z-3+2i|\le|z-5i|$ β) $|z+3|+|z-3|=8$ γ) $||z-3|-|z+3||=4$

δ) $\left|\dfrac{2-z}{z}\right|>1$ ε) $|4z-8+12i|=16$ στ) $|z-i|\le(1+i)^8$

[Απ.: α)το ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα σημεία Α(3, -2), Β(0,5) και το σημείο Α(3, -2) με τα σημεία της μεσοκαθέτου.

β)έλλειψη με εστίες Ε΄(-3, 0) και Ε(3, 0) και μεγάλο άξονα 2α=8 και μικρό 2β=$2\sqrt{7}$

($\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$) γ) Υπερβολή με εστίες Ε΄(-3, 0), Ε(3, 0) και κορυφές τα σημεία Α(2, 0), Α΄(-2,0) δ)Το ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη μεσοκάθετη του ευθύγραμμο τμήματος με άκρα τα σημεία Α(2, 0), Β(0, 0) και το σημείο Β(0, 0), χωρίς τα σημεία της μεσοκαθέτου ε)κύκλος κέντρου Κ(2, -3) και ακτίνας ρ=4 στ)Τα εσωτερικά σημεία του κυκλικού δίσκου με κέντρο Κ(0, 1) και ακτίνας $\rho=2^4$ με τα σημεία της περιφέριας του.]

34. Να δείξετε ότι α) η εικόνα του μιγαδικού z=4ημθ-3συνθi, $\theta\in\mathbb{R}$ είναι σημείο της έλλειψης $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, ενώ β) η εικόνα του μιγαδικού $w=(\etaμ\theta-1)^2+4(1-\etaμ\theta)i$, $\theta\in\mathbb{R}$ είναι σημείο της παραβολής $y^2=16x$.

[Απ.: 1)x=4ημθ, y= -3συνθ και $\etaμ^2\theta+\sigmaυν^2\theta=1$…
2)$x=(\etaμ\theta-1)^2$, y=3(1-ημθ) οπότε $y^2=$…]

35. Αν για το μιγαδικό z ισχύει |z-3-4i|=2 να βρείτε:
α) Τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του στο επίπεδο.
β) Τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης Α=|z-6-8i|
γ) Για ποιους μιγαδικούς ισχύει το β) ερώτημα;
[Απ.: Κύκλος με κέντρο Κ(3, 4) και ακτίνα ρ=2, β)3≤Α≤7, γ) $z_1=\frac{72}{25}+\frac{96}{25}i$, $z_2=\frac{78}{25}+\frac{104}{25}i$]

36. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει |z-6-8i|=5 να βρείτε:
α) τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο επίπεδο
β) τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή του μέτρου του z
γ) τους μιγαδικούς αριθμούς για τους οποίους προκύπτει το β’ ερώτημα
[Απ.: α) κύκλος κέντρου Κ(6, 8) και ακτίνας ρ= 5
β) μέγ.:|z|=15, ελάχ.:|z|=5 γ) $z_1=3+4i$, $z_2=9+12i$]

37. Ένα σημείο Μ κινείται στο επίπεδο και η θέση του την κάθε χρονική στιγμή t είναι η εικόνα Μ(z) του μιγαδικού z=(1+t)+(3+2t)i. Να βρείτε:
α) Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z
β) Την ελάχιστη τιμή της παράστασης Α=|z-7|
γ) Το μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει το ερώτημα β
δ) Ποια χρονική στιγμή συμβαίνει το ερώτημα β;
[Απ.:α)ευθεία y=2x+1 β)Α= $3\sqrt{5}$ 3)z=1+3i γ)t=0]

38. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 για τους οποίους ισχύει $|z_1+3-7i|=2$ και $|z_2-1-4i|=1$. Να βρείτε:
α)Τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1 και z_2 στο επίπεδο
β)Τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης $A=|z_1-z_2|$
[Απ.:α) κύκλος κέντρου Κ(-3, 7) και ακτίνας $\rho_1=2$
κύκλος κέντρου Λ(1, 4) και ακτίνας $\rho_2=1$, β) 2≤Α≤8]

39. Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1=x_1+y_1i$ και $z_2=x_2+y_2i$:
α)Να δείξετε ότι όταν η εικόνα Μ(z_1) του z_1 κινείται στον κύκλο κέντρου Ο(0, 0) και ακτίνας ρ=4 τότε το σημείο Ν(z_2) που είναι εικόνα του μιγαδικού $z_2=z_1+\frac{8}{z_1}$ κινείται στην έλλειψη $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$

β) όμοια αν η εικόνα $M(z_1)$ του z_1 κινείται στη διχοτόμο της $1^{ης}$ γωνίας των αξόνων τότε η εικόνα του μιγαδικού $z_2=z_1+\frac{8}{z_1}$ κινείται στην υπερβολή $x^2-y^2=16$

40. Δίνεται μιγαδικός $w=\dfrac{2-3i}{z+4}$. Να βρείτε:
α) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z όταν $w\in\mathbb{R}$
β) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z όταν $w\in I$
[Απ.:α)ευθεία 3x+2y+12=0, β)ευθεία 2x-3y+8=0]

Γενικες Επαναληπτικες Συνδυαστικες Ασκησεις

(Υπόδειξη: Να διδαχτούν στην επανάληψη της ύλης)

41. Το σύνολο των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει:
$(\bar{z}+z)\left[\frac{1}{4}(z^2+\bar{z}^2)i+\frac{i}{2}(|z|^2+4)\right]=\overline{\bar{z}-z}$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Αν τώρα θεωρήσουμε το μιγαδικό $w=\frac{3}{2}(\bar{z}+z)^2+i(z-\bar{z})+2i$, το σύνολο των σημείων του επιπέδου όταν $w\in I$ είναι σημεία της Cg συνάρτησης g. Να βρείτε:
α) τη συνάρτηση f
β) Τη συνάρτηση g
γ) Το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των C_f και C_g
[Απ.:α)$f(x)=x^3+2x$ β)$g(x)=3x^2$ γ)Ε= $\frac{1}{2}$τ.μ.]

42. Δίνεται ο μιγαδικός $w=(z+\bar{z})^2+(z-\bar{z}+2)i$, όπου z=x+yi, x, y ∈ 3. Να δείξετε ότι:
α) όταν $w\in I$ τότε η εικόνα του z είναι το σημείο της παραβολής $y=2x^2$
β) υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τους άξονες xx΄ και yy΄, την Cf και την ευθεία x= -1
γ)Από το σημείο που είναι εικόνα του μιγαδικού z=2+6i βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων που άγονται από αυτόν.
[Απ.:β)Ε=$\frac{2}{3}$τ.μ. γ)ε_1:y=4x-2 και ε_2: y=12x-18]

43. Δίνεται ο μιγαδικός z=συνθ+iημθ, θ ∈ (0, 2π) και ο μιγαδικός $w=\dfrac{1+z}{1-z}$.
Να δείξετε: 1) $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$ 2) $w\in I$ και
3) να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|w|d\theta$.
[Απ.:ln2]

44. Αν z=x+yi και $f(x)=Re^3(z)+Re^2(3z-1)+3Re(z)+Im^2(3z)-9|z|^2$ να βρείτε:
α) Τα τοπικά ακρότατα και το σημείο καμπής της συνάρτησης f
β) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από Cf και την ευθεία που ενώνει τα τοπικά ακρότατα και το σημείο καμπής.
[Απ.:Στο x= -1τ.μ., Στο x=1 τ.ε, x=0 Σ.Κ.]

45. Δίνεται ο μιγαδικός z=1-συνθ-iημθ και θ $\in$ [0, 2π]

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\int_0^{\pi}|iz|d\theta$

β) Αν $\theta=\frac{\pi}{2}$ να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που είναι εικόνες του μιγαδικού w=x+yi, x,y $\in \mathbb{R}$ για τον οποίο $\left|\frac{w-1}{w+1}\right|=|z|$

[Απ.:1)I=4 2)κύκλος K(-3, 0) και ρ=$2\sqrt{2}$]

46. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{|1+i\varepsilon\phi\theta|}$

[Απ.: I=2]

47. Δίνεται ο μιγαδικός z=x+yi και |z|=1. Να βρείτε:

α) Τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f(x)= $|z^3-z+2|$

β) Ποιών μιγαδικών εικόνες είναι τα σημεία του προηγούμενου ερωτήματος;

[Απ.:α)μέγ: $\sqrt{13}$ ελάχ: β)]

48. Δίνονται οι μιγαδικοί z=f(0)+i και w=1+f(1)i για τους οποίους ισχύει |z+w|=|z-w| όπου f μία συνάρτηση συνεχής στο [0, 1]. α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο [0, 1]. β) Να δείξετε ότι ο $u=\overline{w}z\in I$

49. Δίνονται οι μιγαδικοί z=3+(x-3)i και w=1+ilnx. Να δείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο x $\in$ (1, e), ώστε το γινόμενο να είναι πραγματικός αριθμός.

50. Δίνεται μία συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] και οι μιγαδικοί $z=\alpha^2+if(\alpha)$ και $w=f(\beta)+i\beta^2$ με αβ≠0 και για τους οποίους ισχύει $|w|^2+|z|^2=|w-z|^2$. Να δείξετε ότι:

α) $w\overline{z}+z\overline{w}=0$

β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in$ (α, β) στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον xx΄

Ασκήσεις από το Αρχείο των Πανελληνίων Εξετάσεων Προηγούμενων Ετών (1984 – 2005)

Πανελλήνιες1984

51. Έστω ένας μιγαδικός z=x+yi με y≠0. Αν $w=\dfrac{\bar{z}^2}{z-1}$ να δείξετε ότι $w\in\mathbb{R}$ αν και μόνο αν η εικόνα του z στο επίπεδο ορθοκανονικού συστήματος αξόνων ανήκει σε υπερβολή από την οποία έχει εξαιρεθεί η κορυφή της.

Πανελλήνιες 1986

52. Έστω z=(2x-3)+(2y-1)i με x, $y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x, y) που είναι τέτοια ώστε |2z-1+3i|=3 είναι κύκλος. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του και την ακτίνα του.

[Απ.: $K\left\langle\frac{7}{4},-\frac{1}{4}\right\rangle$ $\rho=\frac{3}{4}$]

Πανελλήνιες 1989

53. Να λύσετε στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση
$z^6+2z^5+2z^4+2z^3+z^2+(z+1)^2=0$

[Απ.: $z_1=z_2=-1$, $z_3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_5=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_6=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$]

Πανελλήνιες 1991

54. Αν $w=\dfrac{z+i\alpha}{iz+\alpha}$, με $\alpha\in 3^*$ και z≠αi τότε να αποδειχθεί ότι

α) ο w είναι φανταστικός αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός

β) ισχύει |w|=1 αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός

Πανελλήνιες 1993

55. Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{(z-1)(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}$ με $z\in\mathbb{C}$ και Re(z)≠0

α) Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{z}\right)=-f(z)$

β) Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία M(x, y) για τα οποία οι μιγαδικοί αριθμοί z=αx+βyi με α, β, x, $y\in 3$ και αβx≠0, ικανοποιούν τη σχέση Re[f(z)]=0

[Απ.: έλλειψη: $\dfrac{x^2}{\left\langle\frac{1}{\alpha}\right\rangle^2}+\dfrac{y^2}{\left\langle\frac{1}{\beta}\right\rangle^2}=1$]

Πανελλήνιες 1994

56. Α. Αν $z\in\mathbb{C}$ να δείξετε ότι για τις λύσεις z_1, z_2 της εξίσωσης $z^2+z+1=0$ ισχύουν $z_1^{\,2}=z_2$, $z_2^{\,2}=z_1$, $z_1^{\,3}=1$, $z_2^{\,3}=1$ και $z_1+z_2+1=0$. Κατόπιν βρείτε τις κοινές ρίζες των εξισώσεων: $(z^2+1)^2+z^3+z=0$ και $z^{16}+2z^{14}+1=0$

B. Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w και w_1 τέτοιους ώστε w=z-zi και $w_1=\frac{1}{\alpha}+\alpha i$ με $\alpha\in\mathbb{R}^*$.
Να δείξετε ότι αν το α μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $w=\overline{w}_1$ τότε η εικόνα P του z στο επίπεδο κινείται στην υπερβολή $x^2-y^2=1$

[Απ.:A. z=i και z=-i]

Πανελλήνιες 1995

57. i) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει η ισοδυναμία
$|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)=0$
ii) Έστω μια συνάρτηση f: [α, β]→ 3 συνεχής στο [α, β] και οι μιγαδικοί z= α^2+ if(a) και w=f(β)+iβ^2 με αβ≠0. Αν $|w|^2+|z|^2=|w-z|^2$ να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο [α, β].

Πανελλήνιες 1998

58. A. Δίνεται ο μιγαδικός z_0, με $\mathrm{Im}(z_0)< 999$ και το σύνολο A των μιγαδικών αριθμών z, με $z\neq z_0$ και $z\neq\overline{z}_0$, που ικανοποιούν τη σχέση:
$$\frac{1}{|z-z_0|}+\frac{1}{|z-\overline{z}_0|}=\frac{1998}{|z-z_0||z-\overline{z}_0|}$$
Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση που μπορούν να απέχουν μεταξύ τους οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών του συνόλου A. Ποιοι είναι αυτοί οι μιγαδικοί αριθμοί;
Να εξετάσετε την περίπτωση $z=\overline{z}_0$.

Πανελλήνιες 1999

59. Έστω ένας μιγαδικός αριθμός z=x+yi, $x,y\in\mathbb{R}$.
α)Να αποδείξετε ότι, στο μιγαδικό επίπεδο, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M(x, y), που είναι τέτοια ώστε $|z-1|^2+|z-3-2i|^2=6$, είναι κύκλος. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου αυτού.
β) Έστω O η αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου και ε_1, ε_2 είναι οι δύο εφαπτόμενες που άγονται από το O προς τον παραπάνω κύκλο. Να βρείτε τις συντεταγμένες των δύο σημείων επαφής.

Πανελλήνιες 2000

60. Δίνεται ο μιγαδικός $z=\frac{5+i}{2+3i}$
α) Να γράψετε το μιγαδικό z στη μορφή α+βi, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
β) Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $\left|\frac{z-1}{z-i}\right|=1$.

Πανελλήνιες 2001

61. A1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Για κάθε μιγαδικό ισχύει:

α. $|z|^2 = z\bar{z}$ β. $|z^2| = z^2$ γ. $|z| = -|\bar{z}|$

δ. $|z| = |\bar{z}|$ ε. $|i\bar{z}| = |z|$

B1. Αν $z_1 = 3+4i$ και $z_2 = 1-\sqrt{3}i$ να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της Στήλης Β έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\lvert z_1 \cdot z_2 \rvert$	α. 4
2. $\lvert z_1^2 \rvert$	β. 2
3. $\lvert z_2 \rvert^2$	γ. 25
4. $-\lvert \overline{z_1} \rvert$	δ. −5
5. $\lvert i\, z_2 \rvert$	ε. −2
	στ. 5
	ζ. 10

B2. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|=1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$

Πανελλήνιες 2002

62. Δίνετε η συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με τύπο:

$f(x) = \frac{|x-z|^2 - |x+\bar{z}|^2}{x^2 + |z|^2}$, όπου z συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha \neq 0$.

α. Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f, εάν $|z+1| > |z-1|$.

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f.

Πανελλήνιες 2003

63. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $w = 3z - i\bar{z} + 4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z.

α. Να αποδείξετε ότι $Re(w) = 3\alpha - \beta + 4$
$Im(w) = 3\beta - \alpha$.

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$.

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.

Πανελλήνιες 2004

64. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1)=1$. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει

$$g(x)=\int_1^{x^3}|z|f(t)dt-3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)\geq 0,$$

όπου $z=a+\beta i\in C$, με α, β $\in\mathbb{R}^*$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τη g΄.

β. Να αποδείξετε ότι $|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$.

γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος β να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(z^2)=-\frac{1}{2}$.

δ. Αν επιπλέον f(2)=α>0, f(3)=β και α>β, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Πανελλήνιες 2005

65. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=3$.

α. Δείξτε ότι: $\overline{z_1}=\frac{9}{z_1}$.

β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός.

γ. Δείξτε ότι: $|z_1+z_2+z_3|=\frac{1}{3}|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|$.

1^{o} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

Θέμα 1^{o}

Α. Αν z_1, z_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $z^2+z+1=0$ να δείξετε ότι:

α) $z_1+z_2+1=0$,

β) $z_1^2=z_2$ και $z_2^2=z_1$

γ) $z_1^3=1$ και $z_2^3=1$

δ) $z_1z_2=1$

Β. Αν z_1, z_2, z_3 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $z^3+(1-\lambda)z^2+(1-\lambda)z-\lambda=0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι ο αριθμός $w=z_1^\nu+z_2^\nu+z_3^\nu$ είναι πραγματικός για κάθε $\nu \in \mathbb{R}$

Θέμα 2^{o}

Α. Να δείξετε ότι ο w είναι φανταστικός αν και μόνο αν $\overline{w}=-w$

Β. Δίνεται ο μιγαδικός $w=\frac{z-2i}{2z-1}$, όπου $z=x+yi$ και $x \in \mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$, $y \in \mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι όταν ο w είναι φανταστικός αριθμός τότε η εικόνα του z είναι σημείο του κύκλου $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+(y-1)^2=\frac{17}{16}$

Θέμα 3^{o}

Αν z_1, z_2 μιγαδικοί και ο ακέραιος $\nu>1$ ώστε $z_1^\nu=1+2i$ και $z_2^\nu=2-i$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w=\frac{z_1}{z_2}$ δεν είναι πραγματικός

β) Να δείξετε ότι ο $z=\frac{w+1}{w-1}$, όπου $w=\frac{z_1}{z_2}$ είναι φανταστικός αριθμός και ότι $\overline{z}=-z$

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $f(u)=|u+w|+|u-w|$, όπου $u \in \mathbb{C}$

Θέμα 4^{o}

Ένα σημείο Μ κινείται στο επίπεδο και η θέση του την κάθε χρονική στιγμή t είναι η εικόνα M(z) του μιγαδικού $z=(1+t)+(3+2t)i$. Να βρείτε:

α) Τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z

β) Την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A=|z-7|$

γ) Το μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει το ερώτημα β

δ) Ποια χρονική στιγμή συμβαίνει το ερώτημα γ;

2^o ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

Θέμα 1^o

Α. Απαντήστε Σωστό ή Λάθος στις παρακάτω σχέσεις.

1. $Re(z_1+z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$
2. $Re(z^2) = (Re(z))^2$
3. $Im(z_1 z_2) = Im(z_1)\cdot Im(z_2)$
4. $Im\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{Im(z)}$
5. $Re(z_1\cdot z_2) = Re(z_1)\cdot Re(z_2) - Im(z_1)\cdot Im(z_2)$
6. $|z|^2 = z^2$
7. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$
8. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
9. $z = \frac{1}{\bar{z}}$
10. $z_1\cdot \overline{z_2} = \overline{z_1}\cdot z_2$

Β. Να αποδείξετε ότι:

1. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ και $\left(\overline{z^\nu}\right) = \left(\bar{z}\right)^\nu$
2. $|z_1|^2 = z\cdot\bar{z}$

Θέμα 2^o

Α. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών $z = x + yi$, $x,y \in \mathbb{R}$ όταν ο $w = \frac{3}{2}\left(z+\bar{z}\right)^2 + i\left(z-\bar{z}\right) + 2i$ είναι φανταστικός αριθμός, είναι η παραβολή με εξίσωση $y=3x^2$.

Β. Να δείξετε ότι όταν $|z| = 1$ τότε ο $\kappa = \frac{1+z}{1-z}$ είναι φανταστικός.

Θέμα 3^o

Να δείξετε ότι αν για τον $z = x+yi$, $x,y \in 3$ ισχύει $\left|z+|z|\right| + \left|z-|z|\right| = 2|z|$ τότε $z \in \mathbb{R}$.

Θέμα 4^o

Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $|z-6-8i|=5$ να βρείτε:

α) τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο επίπεδο

β) τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή του μέτρου του z

γ) τους μιγαδικούς αριθμούς για τους οποίους προκύπτει το β' ερώτημα.

3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι $z \in I$ αν και μόνο αν $\overline{z} = -z$.

(Μονάδες 5)

Β. Ερωτήσεις κατανόησης Σωστού ή Λάθους.

1. $\mathrm{Im}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Im}(z_1) \cdot \mathrm{Im}(z_2)$.	Σ ή Λ
2. Ο αντίστροφος του i ισούται με τον αντίθετο του i.	Σ ή Λ
3. $\lvert z \rvert^2 = z^2$	Σ ή Λ
4. Το μέτρο ενός μιγαδικού $z = \alpha + \beta i$ ισούται με το μέτρο της διανυσματικής ακτίνας της εικόνας του.	Σ ή Λ
5. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών z_1 και z_2 ισούται με την απόσταση των εικόνων τους.	Σ ή Λ
6. Το σημείο του γεωμετρικού τόπου $\lvert z - z_0 \rvert = \rho$ που έχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι το σημείο τομής του γεωμετρικού τόπου με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την αρχή των αξόνων με την εικόνα του z_0.	Σ ή Λ
7. Ο μιγαδικός αριθμός z = (α – 3)i + 7, με $\alpha \in \mathbb{R}$ έχει εικόνα το σημείο Α(β -1, 5), όταν α = β = 8.	Σ ή Λ
8. Αν M_1, M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο και ο άξονας y΄y είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος M_1M_2, τότε είναι $z_1 = \overline{z}_2$.	Σ ή Λ
9. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ μπορεί να έχει λύσεις τις $2+i$ και $-2-i$.	Σ ή Λ
10. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στην ευθεία $x = 3$, τότε ισχύει $\mathrm{Re}(z-1) = 2$.	Σ ή Λ

(Μονάδες 10x2=20)

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω $z=\dfrac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}$

α) Να γράψετε τον z στη μορφή $z=\alpha+\beta i$.

(Μονάδες 9)

β) Να δείξετε ότι $z^3\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν Α, Β είναι οι εικόνες των $z,\bar{z}$ στο μιγαδικό επίπεδο και Γ(2, 0) , να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω $f(z)=\dfrac{iz-2+4i}{z-i}, z\neq i$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(z)=1-i$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε το σύνολο των σημείων M(z), όταν $\operatorname{Im}[f(z)]=0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν $u=z-i$ και $w=f(z)-i,$ να δείξετε ότι $u\cdot w=-3+4i$ και να βρείτε το $|u\cdot w|$.

(Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι αν τα σημεία M(z) ανήκουν στον κύκλο C με κέντρο K(0,1) και ακτίνα ρ, τότε τα σημεία $N\left(f(z)\right)$ ανήκουν σε κύκλο C΄ με το ίδιο κέντρο και ακτίνα που πρέπει να βρείτε. Πότε οι κύκλοι αυτοί συμπίπτουν;

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω $z\in\mathbb{C}$ με $|(1-i)z+2i|=2$ (1)

α) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(z)$ για τα οποία ισχύει η (1) είναι κύκλος με κέντρο K(1,-1) και ρ=$\sqrt{2}$.

(Μονάδες 9)

β) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $N(w)$ για τα οποία ισχύει $wz=4$ είναι η ευθεία $y=-x+2$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $A=|z-w|$.

(Μονάδες 9)

Ανάλυση

1ο κεφάλαιο:

Όριο - Συνέχεια Συνάρτησης

Εισαγωγή

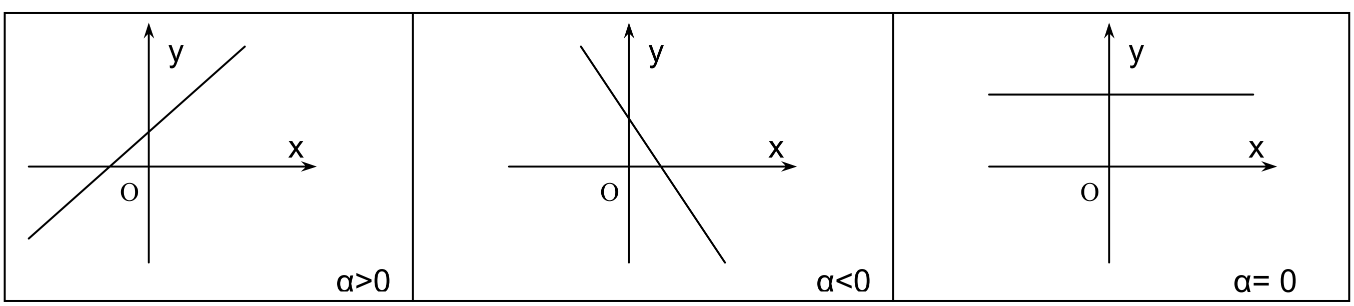
Η ανάλυση είναι ένας από τους πιο σύγχρονους κλάδους των μαθηματικών, παρουσιάζει ιδιαίτερη «λεπτότητα» στη χρήση των εννοιών και των θεωρημάτων, αφού πολλά εξ' αυτών έχουν μονόδρομη ισχύ. Έχει πολλές εφαρμογές στη σύγχρονη τεχνολογία και στις υπόλοιπες επιστήμες. Η ανάπτυξή της επήλθε μετά τον 6ο μ.Χ. αιώνα με την ανακάλυψη της έννοιας της παραγώγου από τον Leibniz και τον Newton και κατόπιν της έννοιας της εφαπτομένης καμπύλης*. Με βάση αυτές τις έννοιες αναπτύχθηκε ο διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός, που αποτελούν τον κορμό της ανάλυσης και ο οποίος διδάσκεται στα περισσότερα Α.Ε.Ι. και Τ.Ε.Ι. θετικών επιστημών, ακόμα και στα παιδαγωγικά τμήματα.

Για την καλύτερη και βαθύτερη γνώση των εννοιών και των θεωρημάτων της ΑΝΑΛΥΣΗΣ προτείνουμε να δώσετε βαρύτητα στη ΕΝΟΡΑΤΙΚΗ ΑΝΤΙΛΗΨΗ ΤΩΝ ΓΝΩΣΕΩΝ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΤΟΥΣ ΕΡΜΗΝΕΙΑΣ.

Αυτό θα σας βοηθήσει πέρα από την ουσιαστική και σε βάθος γνώση και στην επίλυση των ασκήσεων, αφού πολλές φορές στα ζητούμενα και στα δεδομένα των προβλημάτων χρησιμο-ποιείται η «γλώσσα» της γεωμετρικής ερμηνείας των εννοιών, π.χ. αντί να σου λέει η άσκηση να δείξεις ότι $f'(x_0)=0$ θα σου λέει να δείξεις ότι η εφαπτομένη στο x_0 είναι παράλληλη στον xx΄. Γι' αυτό το σκοπό θα χρειαστεί η «τέλεια» γνώση των γραφικών παραστάσεων των πιο βασικών συναρτήσεων που ακολουθεί αμέσως παρακάτω**.

Γραφικές παραστάσεις Βασικών συναρτήσεων

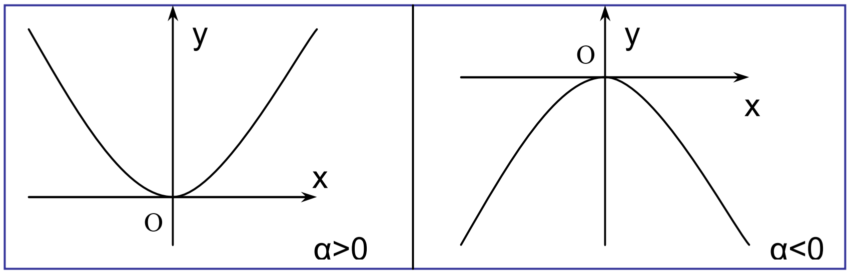
Η *πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)= \alpha x+\beta$*



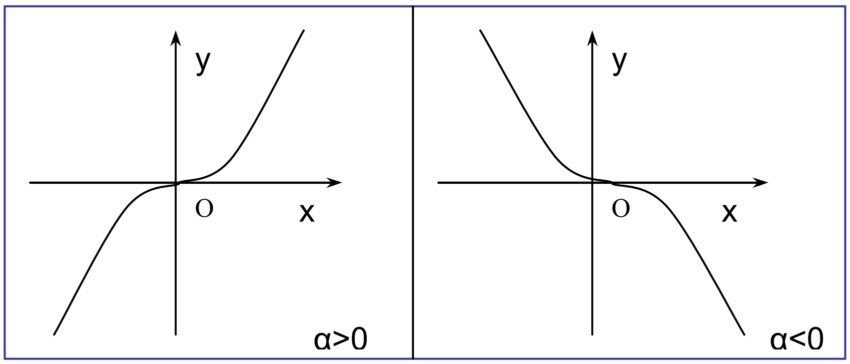
* Σημειωτέον ότι οι Αρχαίοι Έλληνες προσπάθησαν πάρα πολλά χρόνια για την εύρεση ορισμού εφαπτομένης καμπύλης. Ο Αρχιμήδης πλησίασε πολύ μέσω της έννοιας του ορίου στη θεμελίωση του Διαφορικού Λογισμού, η οποία τελικά πραγματοποιήθηκε από τους Leibniz και Newton, οι οποίοι με διαφορετικές προσεγγίσεις ο καθένας όρισαν την ίδια έννοια, αυτήν της παραγώγου. Εν τούτοις, για το ποιος θεωρείται πατέρας αυτής υπήρξε για πολλά χρόνια αντικείμενο επιστημονικής έριδας μεταξύ Γερμανών και Άγγλων καθότι ο Leibniz ήταν γερμανικής καταγωγής και ο Newton Αγγλικής.

** Επίσης μία άλλη δυσκολία που εμφανίζει η Ανάλυση είναι ότι προϋποθέτει ή αν θέλετε «απαιτεί» τις γνώσεις Άλγεβρας που αποκτήθηκαν στην Α΄ και Β΄ Λυκείου. Γι' αυτό το σχολικό βιβλίο όπως όλα σχεδόν τα βιβλία Ανάλυσης ξεκινούν με μία σύντομη επανάληψη των βασικών γνώσεων που αποκτήθηκαν στις προηγούμενες τάξεις. Να δώσετε ιδιαίτερη βαρύτητα στη μελέτη αυτή, προκειμένου να εξασφαλίσετε μια «άνετη» πορεία σ' αυτό το πραγματικά συναρπαστικό «ταξίδι» της γνώσης που ξεκινάτε.

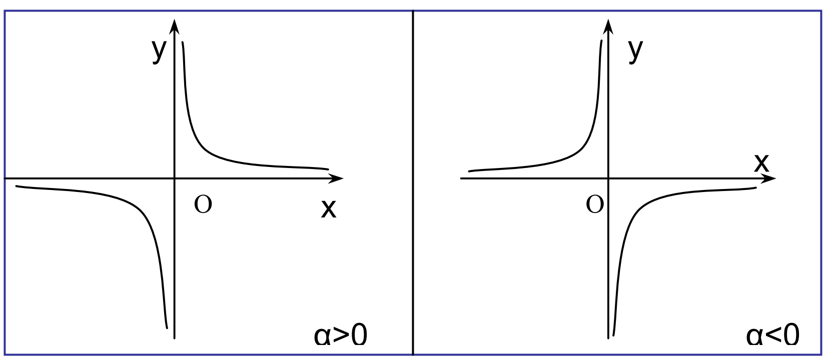
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)= ax^2, \ \alpha \neq 0$.



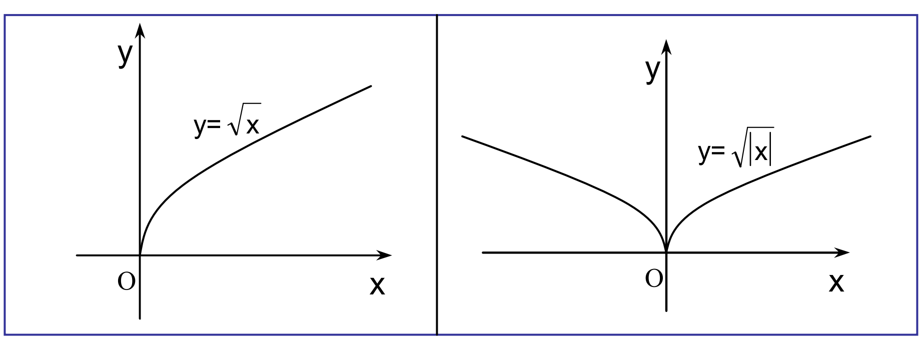
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)= ax^3, \ \alpha \neq 0$.



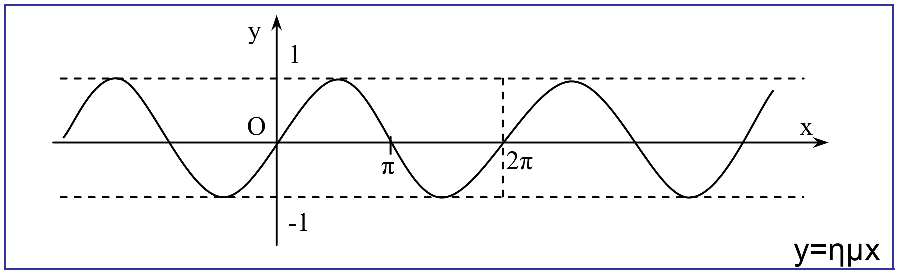
Η ρητή συνάρτηση $f(x)= \dfrac{\alpha}{x}, \ \alpha \neq 0$

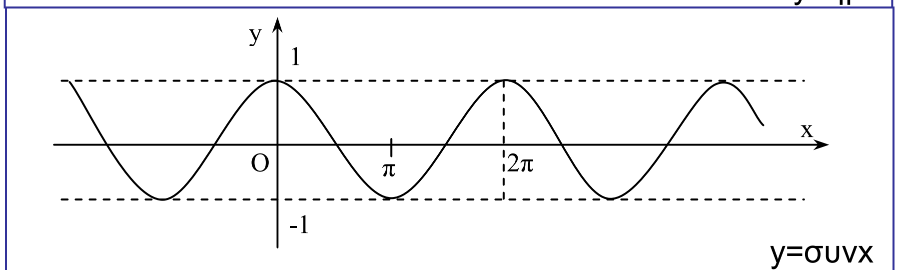


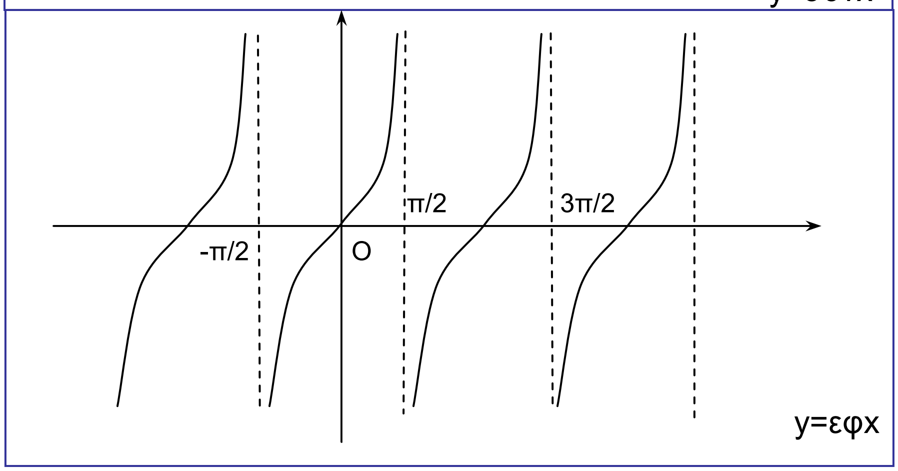
Οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)= \sqrt{|x|}$



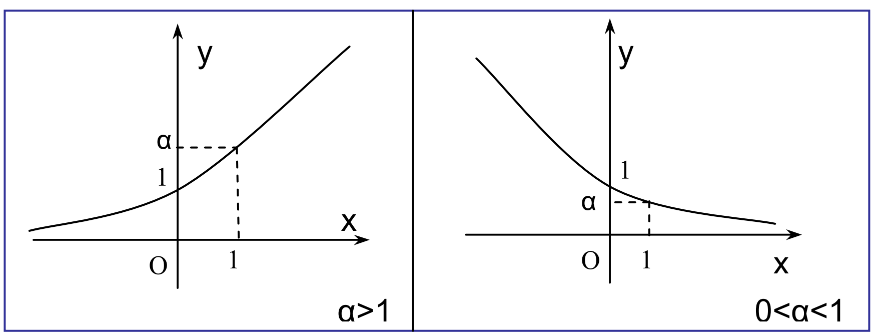
Οι τριγωνικές συναρτήσεις: f(x)= ημx, f(x)= συνx, f(x)= εφx



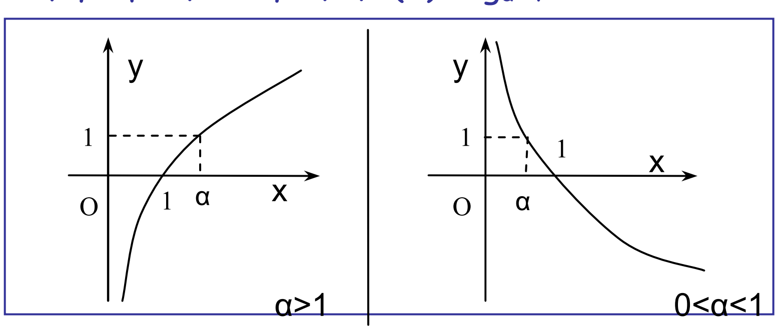




Η εκθετική συνάρτηση f(x)= a^x, 0<α≠1



Η λογαριθμική συνάρτηση f(x)=$\log_a x$, 0<α≠1



Μονοτονία συνάρτησης

Ορισμοί:

- Αν $x_1 < x_2$ και $f(x_1) < f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο A
- Αν $x_1 < x_2$ και $f(x_1) > f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A
- Αν $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \leq f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$, τότε η f είναι αύξουσα στο A
- Αν $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \geq f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$, τότε η f είναι φθίνουσα στο A
- Αν $x_1 < x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$, τότε η f είναι σταθερή στο A

Μονοτονίες γνωστών συναρτήσεων

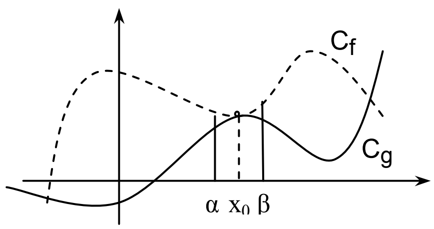
1. $f(x)=\alpha x+\beta$: για $\alpha>0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ενώ για $\alpha<0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
2. $f(x)=\alpha x^2$: για $\alpha>0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσαστο $(0,+\infty)$, ενώ για $\alpha<0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$
3. $f(x)=\alpha x^3$: για $\alpha>0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ενώ για $\alpha<0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
4. $f(x)=\frac{\alpha}{x}$: για $\alpha>0$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty]$, ενώ για $\alpha<0$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$
5. $f(x)=\sqrt{x}$: είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$
6. $f(x)=\eta\mu x$: είναι γνησίως αύξουσα στο $[2\kappa\pi, 2\kappa\pi+\frac{\pi}{2})$, γνησίως φθίνουσα στο $[2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}, 2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2})$ και γνησίως αύξουσα στο $[2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2}, 2\kappa\pi)$ με $\kappa \in Z$
7. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$: είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2\kappa\pi, 2\kappa\pi+\pi)$ και γνησίως αύξουσα στο $[2\kappa\pi+\pi, 2\kappa\pi)$, με $\kappa \in Z$
8. $f(x)=\varepsilon\varphi x$: είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα που ορίζεται
9. $f(x)=\sigma\varphi x$: είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα που ορίζεται
10. $f(x)=\alpha^x$: για $\alpha>1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ενώ για $0<\alpha<1$ είναι γνησίως φθίνου σα στο $\mathbb{R}$
11. $f(x)=\log_\alpha x$: για $\alpha>1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ενώ για $0<\alpha<1$ είναι γνησίως φθίνου σα στο $\mathbb{R}$
12. $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$: για $\alpha>0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha})$ και γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty)$, ενώ για $\alpha<0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha})$ και γνησί-ως φθίνουσα στο $[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty)$

Έννοια του Ορίου για $x \to x_0$ $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell}$

<u>Η θεμελιώδης έννοια της Ανάλυσης. Οι έννοιες που ακολουθούν στηρίζονται σ' αυτήν, αφού ορίζονται ως όρια. Καλή μελέτη της σελίδας 158-160.</u>
<u>ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΑ: Αποσαφηνίζουν τα λεπτά σημεία της θεωρίας.</u>

Ιδιότητες Ορίων

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0 (Ιδιότητα προσήμου ορίου)
2. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0 (Ιδιότητα προσήμου ορίου)
3. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ (Μπορεί $f(x)< g(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.)



Όρια και Πράξεις για Συναρτήσεις f και g που Έχουν Όριο στο x_0

Αν υπάρχουν τα όρια της f και g για $x \to x_0$ τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(\kappa f(x)) = \kappa \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\kappa\in\mathbb{R}$ σταθερός αριθμός
3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$
6. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x)\ge 0$ κοντά στο x_0, $\kappa\in N^*$ σταθερός αριθμός
7. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{\nu} = [\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^{\nu}$, $\nu\in N^*$
8. Αν $p(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} p(x)=P(x_0)$
9. Αν $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x με $Q(x_0)\neq 0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

10. Αν $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$ τότε και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

(Κριτήριο παρεμβολής)

Τριγωνομετρικα Όρια

11. $\lim\limits_{x \to x_0}$ ημx =ημx_0
12. $\lim\limits_{x \to x_0}$ συνx =συνx_0
13. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{ημ}x}{x}$=1 (Ας είναι γνωστό ότι |ημx|≤|x| για κάθε $x \in \mathbb{R}$)
14. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{συν}x - 1}{x}$ =0

Όριο Συνθετης Συναρτησης

15. $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u)$ όπου u=g(x) και $u_0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

Μη Πεπερασμενο Όριο Στο x_0. Δηλαδή

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Ή

16. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ τότε f(x)>0 κοντά στο x_0, ενώ αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ τότε f(x)<0 κοντά στο x_0.
17. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} (-f(x)) = -\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} (-f(x)) = +\infty$.
18. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$
19. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και f(x)>0 κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ αν f(x)<0 κοντά στο x_0 τό-

    τε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$
20. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$
21. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty$, $\kappa \in \mathbb{Z}^*$

ΌΡΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ X_0

Οι ιδιότητες αυτές συνοψίζονται στους παρακάτω τύπους:

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$,						
Το όριο της f είναι:	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της f+g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$,										
Το όριο της f είναι:	A>0	$\alpha<0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της f·g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

$(+\infty)+(-\infty)$		$0\cdot(+\infty)$	
$(+\infty)-(+\infty)$		$0\cdot(-\infty)$	
$(-\infty)-(-\infty)$		$\frac{0}{0}$	
$\frac{+\infty}{+\infty}$	$\frac{+\infty}{-\infty}$	$\frac{-\infty}{-\infty}$	$\frac{-\infty}{+\infty}$

ΌΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΆΠΕΙΡΟ

Όριο πολυωνυμικής και ρητής συνάρτησης

Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0$, με $\alpha_\nu\neq0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}(\alpha_\nu x^\nu) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$$

Για τη ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1x+\alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa+\beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\cdots+\beta_1x+\beta_0}$, $\alpha_\nu\neq0$ και $\beta_\kappa\neq0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left\langle\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right\rangle \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left\langle\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right\rangle$$

Όριο εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης

- Αν α>1, τότε

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \log_\alpha x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$$

- Αν 0<α<1, τότε:

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \log_\alpha x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ιδιότητες

1. Η πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής
2. Η ρητή συνάρτηση είναι συνεχής στο σύνολο ορισμού της
3. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι συνεχείς στο σύνολο ορισμού τους
4. Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha>0$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
5. Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$, $\alpha>0$ και $\alpha\neq 1$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$
6. Το άθροισμα και η διαφορά συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση στο κοινό σύνολο που ορίζονται.
7. Το γινόμενο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση στο κοινό σύνολο ορισμού τους
8. Αν f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο A και $g(x)\neq 0$ για $x \in A$ τότε και το πηλίκο τους $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο A
9. Το γινόμενο πραγματικού αριθμού c επί τη συνεχή συνάρτηση f είναι συνεχής συνάρτηση
10. Η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση
11. Η απόλυτη τιμή συνεχούς συνάρτησης είναι συνεχής συνάρτηση
12. Η ν-οστή ρίζα συνεχούς συνάρτησης είναι συνεχής συνάρτηση

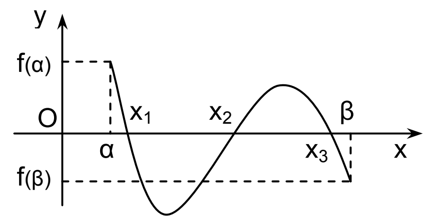
ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ [α, β]

Θεώρημα BOLZANO

> Αν η f ορισμένη στο [α, β] και συνεχής στο [α, β] και επί πλέον $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 (α,β) ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή η C_f τέμνει τον xx΄ σ' ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ή ότι η εξίσωση $f(x_0) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $x_0 \in (\alpha,\beta)$.

Σχόλια

1) Ενορατική αντίληψη του θεωρήματος



2) Δεν έχει αντίστροφη ισχύ το θεώρημα οπότε αν $f(x_0) = 0$ με $x_0 \in (\alpha, \beta)$ δεν σημαίνει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ ή αν $f(\alpha)\cdot f(\beta) > 0$ δε σημαίνει ότι δε θα υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

3) Από το θεώρημα προκύπτει ότι αν μία συνάρτηση είναι συνεχής στο [α, β] και δε μηδενίζεται σ' αυτό τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο δηλαδή είναι θετική για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ή αρνητική για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

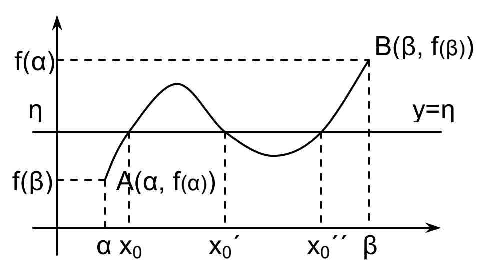
4) Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

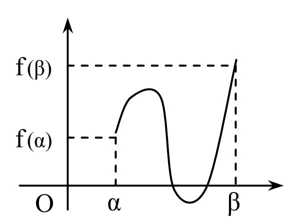
> Αν η f είναι ορισμένη και συνεχής στο [α, β] και $f(\alpha)\neq f(\beta)$ τότε για κάθε αριθμό n μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)= n$

Σχόλια

1) Ενορατική αντίληψη του θεωρήματος



2) Το ότι η f παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές δεν αποκλείει να παίρνει και επιπλέον από αυτές.



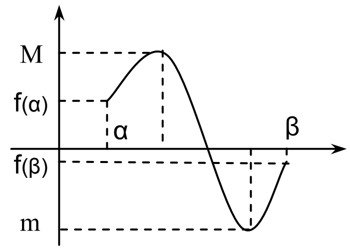
3) Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς και μη σταθερής f είναι διάστημα

Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής

> Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] τότε η f παίρνει στο [α, β] μία μέγιστη M και μία ελάχιστη τιμή m.

Σχόλια

1) Ενορατική αντίληψη του θέματος



2) Από το θεώρημα προκύπτει το σύνολο των τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f στο [α, β] είναι το κλειστό διάστημα [m, M]

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1

Με τη συνέχεια μιας συνάρτησης και την μονοτονία της μπορεί να βρεθεί το σύνολο των τιμών της. Έτσι:

α) Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και γνησίως αύξουσα σ' αυτό τότε το σύνολο τιμών της είναι το [f(α), f(β)]

β) Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και γνησίως φθίνουσα σ' αυτό τότε το σύνολο τιμών της είναι το [f(β), f(α)]

γ) Αν η f είναι συνεχής στο (α, β) και γνησίως αύξουσα σ' αυτό τότε το σύνολο τιμών της είναι το $\left(\lim_{x\to\alpha^+} f(x),\ \lim_{x\to\beta^-} f(x)\right)$

δ) Αν η f είναι συνεχής στο (α, β) και γνησίως φθίνουσα σ' αυτό τότε το σύνολο τιμών της είναι το $\left(\lim_{x\to\beta^-} f(x),\ \lim_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$

Συνδυασμός των παραπάνω περιπτώσεων:

ε) Αν η f είναι συνεχής στο [α, β) και γνησίως φθίνουσα σ' αυτό τότε το σύνολο τιμών της είναι το $(\lim_{x\to\beta} f(x)$, f(α)]

στ) Αν η f είναι συνεχής στο (-∞, β] και γνησίως αύξουσα σ' αυτό τότε το σύνολο τιμών της είναι το $(\lim_{x\to-\infty} f(x)$, f(β)]

2 Αν βρούμε κάποιο σύνολο τιμών με τον παραπάνω τρόπο και αυτό περιέχει και την τιμή μηδέν, αυτό σημαίνει ότι για κάποιο x_0 του διαγράμματος είναι f(x)=0, δηλαδή ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα

Α. Ασκήσεις

Α. Ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο

1. Α΄ Ομάδα σελ.145: Όλες γιατί αποτελούν επανάληψη των γνώσεων προηγούμενων τάξεων
   Β΄ Ομάδα σελ.147: Όλες για τον ίδιο λόγο
2. Α΄ Ομάδα σελ.156: ασκ. 2, 3, 4
3. Α΄ Ομάδα σελ.165: ασκ. 4, 5
4. Α΄ Ομάδα σελ.174: ασκ. 3, 6, 7, 8, 9
   Β΄ Ομάδα σελ.175: ασκ. 1, 2, 4
5. Β΄ Ομάδα σελ.181: ασκ. 1, 2
   Β΄ Ομάδα σελ.182: ασκ. 1, 2, 3, 4
6. Β΄ Ομάδα σελ.186: ασκ. 3
   Β΄ Ομάδα σελ.187: ασκ. 1, 2, 3, 4
7. Β΄ Ομάδα σελ.198: ασκ. 4, 6, 7, 8, 9, 10
   Β΄ Ομάδα σελ.199: ασκ. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8

Β. Ασκήσεις από ελληνική και ξένη βιβλιογραφία και ασκήσεις του συγγραφέα

Ασκήσεις στις συναρτήσεις

1. Να βρείτε το σύνολο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{3x+7}{\sqrt{x+4}-3}$ β) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+|x|}$

γ) $f(x)=\sqrt{2-|x+3|}$ δ) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4-x^2}$

ε) $f(x)=\sqrt{x^3-x}$ στ) $f(x)=\dfrac{\log(x^2-5x+6)}{\sqrt{16-x^2}}$

ζ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-|x|}}{|2x+3|-|x+3|}$ η) $f(x)=\sqrt{1-\left|\dfrac{2x-1}{x-2}\right|}$

θ) $f(x)=\dfrac{x}{4^x-2^x-2}$ ι) $f(x)=\log\left\langle\dfrac{3-x}{3+x}\right\rangle$

ια) $f(x)=\dfrac{x^2}{e^{2x}-e^x}$ ιβ) $f(x)=\sqrt{2\eta\mu x-1}$

ιγ) $f(x)=\dfrac{x}{2\eta\mu^2x+\eta\mu x-1}$ ιδ) $f(x)=\sqrt{\ln(\frac{3}{2}-\eta\mu x)}$

ιε) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x(x-1)}}$ ιστ) $f(x)=\sqrt{\ln^2x-\ln x}$

ιζ) $f(x)=\sqrt{-9^x+2\cdot3^x+3}$ ιη) $f(x)=\dfrac{2+\sqrt{1-x}}{2-\sqrt{1-x}}$

ιθ) $f(x)=\sqrt{2\sigma\upsilon\nu x+1}$ κ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-10}}{5-\sqrt{5x}}$

κα) $f(x)=\dfrac{x}{x-|x|}$ κβ) $f(x)=\ln(2\sigma\upsilon\nu^2x-3\sigma\upsilon\nu x+1)$

κγ) $f(x)=\ln(1+\ln x)$ κδ) $f(x)=\sqrt{|x-1|-|2x-1|}$

κε) $f(x)=\sqrt{x^2+|x|-2}$

Απ: α) A=[-4, 5)∪(5, +∞) β) A=3* γ) A=[-5, -1] δ) A=[-2, 2] ε) A=[-1, 0]∪[1, +∞) στ) A=(-4, 2)∪(3, 4) ζ) A=[-1, 0)∪(0, 1] η) A=[-1, 1] θ) A=3-{1} ι) Απ: A=(-3, 3) ια) A=3*

ιβ) $\frac{\pi}{6}\left[2\kappa\pi,\ \frac{5\pi}{6}+2\kappa\pi\right]$, $\kappa\in Z$ ιγ) {x ∈ 3 και $x\neq 2\kappa\pi+3\frac{\pi}{2}$, $x\neq 2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}$, $x\neq 2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}$, $x\neq 2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}$, $\kappa\in Z$} ιδ) $A=\left[\frac{5\pi}{6}+2\kappa\pi,\ 2\pi+2\kappa\pi\right]\cup\left[2\kappa\pi,\ 2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\right]$ $\kappa\in Z$ ιε) A=[-1, 0]∪[1, +∞)

ιστ) A=(0, 1]∪[e, +∞) ιζ) A=(-∞, 1] ιη) A=(-∞, -3)∪(-3, 1) ιθ) $A=[2\kappa\pi-\frac{2\pi}{3},\ 2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}]$ κ∈Z

κ) A=(5, +∞) κα) A=(-∞, 0) κβ) $A=[\frac{\pi}{3}+2\kappa\pi,\ \frac{5\pi}{3}+2\kappa\pi]$ $\kappa\in Z$ κγ) $A=(\frac{1}{e}, +\infty)$ κδ) $A=[0,\ \frac{2}{3}]$
κε) A=(-∞, -1]∪[1, +∞)

Σχόλιο
Η ποσότητα είναι υπερβολική γι' αυτήν την άσκηση και έρχεται σε αντίθεση με το πνεύμα του βιβλίου που είναι «Χρυσή Τομή», αλλά έγινε για δύο λόγους:
1) Με το σύνολο ορισμού έχει την ευκαιρία ο υποψήφιος να κάνει μια καλή επανάληψη στα μαθηματικά
2) Σε κάθε άσκηση της Ανάλυσης, ανεξαρτήτως ζητουμένων οφείλεις να βρίσκεις εκ των προτέρων το σύνολο ορισμού της.

2. α) Να βρείτε το λ ∈ ℝ 3 ώστε το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\sqrt{x^2+(\lambda+1)x+\lambda}$ να είναι το σύνολο 3.
β) Ομοίως, για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{\lambda x^2+(2\lambda-1)x+\lambda}$

Απ: α) $\lambda<-\frac{1}{3}$ ή $\lambda>1$ β) $\lambda>0$

3. Να ορίσετε τις συνθέσεις fog και gof των συναρτήσεων στις παρακάτω περιπτώσεις
α) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=1-x^2$

Απ: $(fog)(x)=\sqrt{1-x^2}$ με B΄= [-1, 1]
$(gof)(x)=1-x$ με A΄= [0, +∞)

β) $f(x)=3x-1$ με A= [-1, 7], $g(x)=x^2+3$ με B= [-7, 8]

Απ: $(fog)(x)=3x^2+8$ με B΄= [-2, 2]
$(gof)(x)=9x^2-6x+4$ με A΄= [-1, 3]

γ) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $g(x)=3x+2$

Απ: $(fog)(x)=\sqrt{-9x^2-12x-3}$ με $B΄=[-1,\ -\frac{1}{3}]$
$(gof)(x)=3\sqrt{1-x^2}+2$ με A΄= [-1, 1]

δ) $f(x)=\sqrt{x-1}$, $g(x)=\sqrt{3-x}$

Απ: $(fog)(x)=\sqrt{\sqrt{3-x}-1}$ με B΄= (-∞, 2]
$(gof)(x)=\sqrt{3-\sqrt{x-1}}$ με A΄= [1, 10]

ε) $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$, $g(x)=\frac{5}{x}$

Απ: $(fog)(x)=\frac{5-3x}{5+x}$ με $B'=\mathbb{R}-\{-5, 0\}$

$(gof)(x)=\frac{5(x+1)}{x-3}$ με $A'=\mathbb{R}-\{-1, 3\}$

στ) $f(x)=3x+5$, $g(x)=\begin{cases} x-1 & \text{αν } x<-1 \\ -2x+3 & \text{αν } x\geq -1 \end{cases}$

Απ: $(fog)(x)=\begin{cases} 3x+2 & \text{αν } x\in(-\infty, -1) \\ -6x+14 & \text{αν } x\in[-1, +\infty) \end{cases}$

$(gof)(x)=\begin{cases} 3x+4 & \text{αν } x\in(-\infty, -2) \\ -6x-7 & \text{αν } x\in[-2, +\infty) \end{cases}$

ζ) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{αν } x\in(-\infty, 3) \\ 5-x^2 & \text{αν } x\in[3, +\infty) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 0 & \text{αν } x\in(-\infty, 3) \\ 1-x & \text{αν } x\in[3, +\infty) \end{cases}$

Απ: $(fog)(x)=\begin{cases} 1 & \text{αν } x\in(-\infty, 3) \\ 2-x & \text{αν } x\in[3, +\infty) \end{cases}$

$(gof)(x)=\begin{cases} 0 & \text{αν } x\in(-\infty, 2)\cup[3, +\infty) \\ -\chi & \text{αν } x\in[2, 3) \end{cases}$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{αν } x\in(-\infty, 0] \\ 2-x & \text{αν } x\in(0,+\infty) \end{cases}$. Να ορίσετε τη συνάρτηση fof

Απ: $(fof)(x)=\begin{cases} x+4 & \text{αν } x\in(-\infty, -2] \\ -x & \text{αν } x\in(-2, 0] \\ x & \text{αν } x\in(0, 2) \\ 4-x & \text{αν } x\in[2, +\infty) \end{cases}$

5. Δίνεται η συνάρτηση $(fog)(x)=(x-2)(x-1)$ και η $g(x)=2\left(x-\frac{3}{2}\right)$. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

Απ: $f(x)=\frac{1}{4}(x^2-1)$

6. Αν $f(x)=3x+2$ και $g(x)=αx+β$. Να βρείτε τη συνάρτηση g αν γνωρίζετε ότι fog=gof και g(1)=2

Απ: $g(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

7. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως μονότονες στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση gof είναι:
   α) Γνησίως αύξουσα αν οι συναρτήσεις f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας
   β) Γνησίως φθίνουσα αν οι συναρτήσεις f, g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας

8. Να δείξετε ότι:
   i)Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση -f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ

ii)Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση f+g είναι γνησίως αύξουσα στο Δ
iii)Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ και ισχύει f(x)>0

9. Να δείξετε ότι η σύνθεση γνησίως μονότονων συναρτήσεων με την ίδια μονοτονία είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, ενώ η σύνθεση γνησίως μονότονων συναρτήσεων με διαφορετικό είδος μονοτονίας γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

10. Μελετήστε τη μονοτονία των παρακάτω συναρτήσεων:
α) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$
β) $f(x)=2^{x^3}$
γ) $f(x)=ημ(συνx)$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
δ) $f(x)=συν^2x+4ημx+1$, $x\in\left[\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right]$
ε) $f(x)=e^x+x^3$

11. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις αντιστρέφονται και να βρείτε την αντίστροφή τους:
α) $f(x)=\sqrt{x-2}$

Απ: $f^{-1}(x)=x^2+2$

β) $g(x)=\frac{2x+3}{x+4}$

Απ: $g^{-1}(x)=\frac{3-4x}{x-2}$

γ) $h(x)=\sqrt{1-\sqrt{x-2}}$

Απ: $h^{-1}(x)=x^4-2x+3$

δ) $φ(x)=\frac{4x^3-1}{3}$

Απ: $φ^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{\frac{3x+1}{4}} & αν\ x\geq-\frac{1}{3}\\ \sqrt[3]{\frac{-3x-1}{4}} & αν\ x<-\frac{1}{3}\end{cases}$

ε) $ω(x)=\frac{2^x}{1+2^x}$

Απ: $ω^{-1}(x)=\log_2\left\langle\frac{x}{1-x}\right\rangle$

στ) $τ(x)=\log(1-\sqrt{2x-3})$

Απ: $τ^{-1}(x)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(1-10^x)^2$

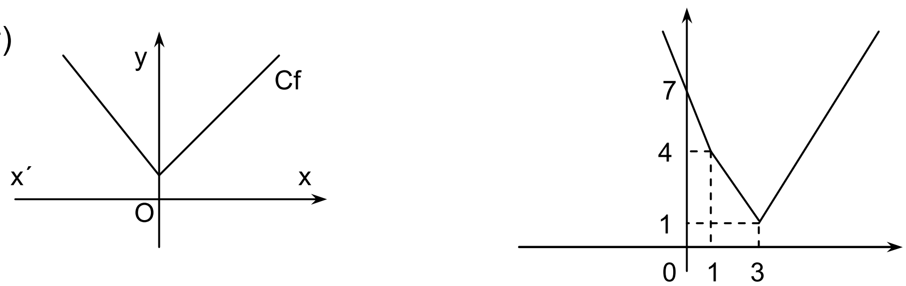
12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ και $g(x)=\sqrt{x^2-2x+1}+2\sqrt{x^2-6x+9}$. Να βρείτε:
α) το σύνολο ορισμού τους
β) τα ακρότατα αυτών εφόσον υπάρχουν
γ) τη μονοτονία τους

δ) την αντίστροφή τους εφόσον ορίζεται
ε) τη σύνθεση της f με τη g
στ) τη γραφική τους παράσταση

Απ: α) A=$\mathbb{R}$, B=$\mathbb{R}$
β) Ελάχιστη τιμή της f: y=1 και της g: y=2
γ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞, 0) και γνησίως αύξουσα στο [0, +∞)
Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞, 3) και γνησίως αύξουσα στο [3, +∞)
δ) Δεν αντιστρέφονται αφού δεν είναι 1-1

ε) $(gof)(x)=\begin{cases} -3x-4 & \text{αν } x<2 \\ x+4 & \text{αν } -2\leq x<0 \\ -x+4 & \text{αν } 0\leq x\leq 2 \\ 3x-4 & \text{αν } x>2 \end{cases}$

στ)



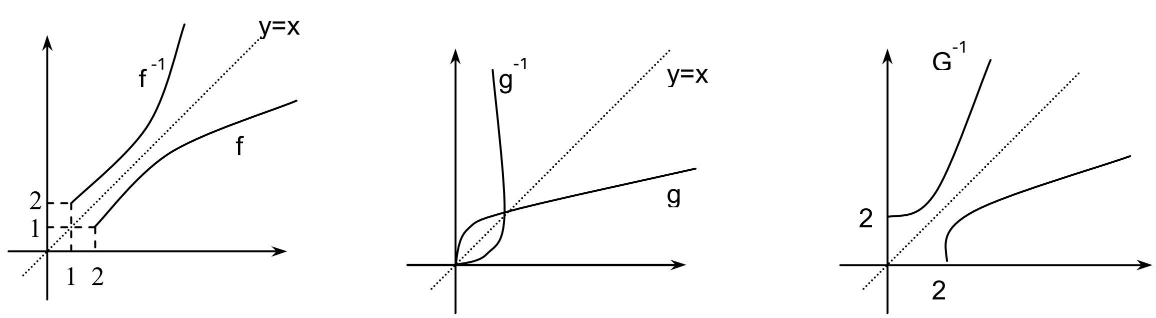
13. Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες:
α) $f(x)=e^x+3\ln x+x^2+1$
β) $g(x)=\ln(3^x+2x+1)$, $x\in[0,+\infty)$

Απ: α) Άθροισμα γνησίων αυξουσών συναρτήσεων
β) Σύνθεση γνησίων αυξουσών συναρτήσεων

14. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

α) $f(x)=1+\sqrt{x-2}$ β) $g(x)=\sqrt{\dfrac{x}{2}}$ γ) $G(x)=\sqrt{x-2}$

Απ: Βρίσκω την αντίστροφή τους που είναι γνωστή συνάρτηση και επειδή τα διαγράμματα αντιστρόφων συναρτήσεων είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο y=x βρίσκω τις γραφικές παραστάσεις που ζητώ.



15. Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι ένα προς ένα (1-1)
α) $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-2004)+1$
β) $g(x)=x^2-x\cdot h(x)+3$, όπου $(hoh)(x)=x^2-5x+9$ και $x\in\mathbb{R}$

16. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύουν
α) $2f(x^{2004})-f^2(x^2)\geq 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) $g^2(x) \le g(x)g(2004-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
να δείξετε ότι δεν αντιστρέφονται.

17. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(fof)(x)=f(x)+\kappa x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $\kappa \in \mathbb{R}^*$ είναι ένα προς ένα και ότι $f(0)=0$.

18. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη να λύσετε τη εξίσωση:
$(fof)(x^2+2x)=(fof)(3x+6)$

Απ.: $x_1=-2$, $x_2=3$

19. Αν για μια συνάρτηση f: $\mathbb{R}^* \to 3$ ισχύει ότι $(fof)(x)\_f(x)=2004$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και είναι 1-1 τότε να βρείτε τη συνάρτηση f.

Απ: $f(x)=\dfrac{2004}{x}$

20. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $(fof)(x)+3f(x)-x^{2\nu+1}=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\nu \in \mathbb{Z}^*$ να δείξετε ότι είναι 1-1 και να λύσετε την εξίσωση $f(x^3)=f(x+6)$

Απ: x=2

21. Αν μια συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη και $f(\alpha+f(\beta))=f(\alpha+\beta)+2$ για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της f.

Απ: $f(x)=x+2$

22. Αν συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και διέρχεται από τα σημεία Α(3, 2) και Β(5, 9) τότε:
α) να βρείτε το είδος της μονοτονίας της
β) να λύσετε την εξίσωση $f(3+f(x^2+2x))=9$

Απ:α) γνησίως αύξουσα
β) $x_1=1$, $x_2=-3$

23. Αν για τη συνάρτηση $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$ για κάθε x, y $\in (0, +\infty)$ και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα, τότε:
α) να δείξετε ότι η f είναι 1-1
β) να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f(x^2+1)=f(x^2-2)+f(x+1)$
γ) αν για $x<1$ είναι $f(x)<0$ να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

ΟΡΙΑ

1. Αν $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{f(x)}-2}{x-4}=1$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x\sqrt{f(x)}+x^2-6x-4f(x)}{3x^2-11x-4}$.

Απ: $\dfrac{4}{13}$

2. Με δεδομένο ότι τα όρια των συναρτήσεων f και g υπάρχουν για $x\to 0$ και ότι ικανοποιούν τη σχέση: $ημ^2x\cdot(f(x))^2+xεφx\cdot(g(x))^2+xf(x)ημ6x-\dfrac{5}{2}g(x)\cdot εφ^2 2x+34x^2=0$ σε μια περιοχή του 0, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$.

Απ: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-3$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=5$

3. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^2x^2+\alpha x+1}{f(x)}=0$ και f(x)·(συνx-2)<0 για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

Απ: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+\alpha x+\beta}$. Να βρεθούν τα α και β ώστε το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=+\infty$

Απ:α=-4, β=4

5. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+x-2}=1$ και $g(x)=\dfrac{f(x)+x^2-3x}{x\sqrt{4x^2+x+1}-x^2}$.Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

Απ: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=2$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x+4}+4xσυνθ+1$. Να βρεθεί το $θ\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ ώστε το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ να είναι πεπερασμένο

Απ: $θ=\dfrac{\pi}{3}$

7. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει f(x+y)=f(x)+f(y) για κάθε x, $y\in\mathbb{R}$ και είναι συνεχής στο $x_0=0$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$

Απ: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

8. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{4x^2+4x+3}-\sqrt{9x^2+6x+2}\right)$

Απ: 1

9. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)+x^2-x+2\right)=3$ να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-2f(x)-3}{f^2(x)-1}=2$

10. Αν $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x-1}-x+3}=5$ και $\lim\limits_{x\to 5}\left[g(x)\left(\sqrt{5x}-5\right)\right]=10$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 5}\left(f(x)g(x)\right)$

Απ: -75

11. Αν $\lim_{x\to -1}(3f(x)-2g(x))=5$ και $\lim_{x\to -1}(2f(x)+g(x))=1$ να βρείτε το $\lim_{x\to -1} f(x)$ και $\lim_{x\to -1} g(x)$

Απ: $\lim_{x\to -1} f(x)=1$, $\lim_{x\to -1} g(x)=-1$

12. Αν $\lim_{x\to 0}\frac{\alpha f(x)}{\eta\mu(\alpha x)}=4$ και $\lim_{x\to 0}\left[\left(\sqrt{4x^2+x+9}-3\right)g(x)\right]=15$, να βρείτε τον θετικό ακέραιο α ώστε $\lim_{x\to 0}(f(x)g(x))=\alpha^2+67\alpha$

Απ: α=5

13. Αν $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+x}{x-1}=2$ να βρείτε το $\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)-f(x)-2}{\sqrt{f^2(x)+3}-2x}$

Απ: $\frac{6}{5}$

14. Να βρείτε τα α και β ώστε $\lim_{x\to 1}\frac{(\alpha+2)x^3-\beta x^2+3x-8}{x^2-1}=\frac{1}{2}$

Απ: α=-14, β=-17

15. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι πραγματικός αριθμός το όριο:

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+(\alpha-1)x+5\alpha+\sqrt{x^2+3x+6}}{x-2}$ Απ. α=$-\frac{6}{7}$

16. Να βρείτε τα κ, λ $\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x\to 2}\frac{\kappa|1-x^2|+\lambda|9-x^2|-3x-7}{x^2-4}=-\frac{7}{4}$. Απ. κ=1, λ=2.

17. Αν f(x)>0 για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{f(x)}-2}{x-4}=1$ να βρείτε :

α) $\lim_{x\to 4} f(x)$ και β) $\lim_{x\to 4}\frac{3x\sqrt{f(x)}+x^2-6x-4f(x)}{3x^2-11x-4}$

18. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\eta\mu^2 x+2xf(x)\le f^2(x)\le \eta\mu^2 x+x(x+2f(x))$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

19. Αν $\frac{\sqrt{1+\eta\mu x}-\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{1+x}-1}\le f(x)\le x\eta\mu\frac{1}{x}+e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Απ: 1

20. Αν $2x\eta\mu x+f^2(x)\le 2xf(x)+\eta\mu^2 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Απ: 0

21. Αν $\sqrt{3x+3}\le(x-2)f(x)+3\le 3\sqrt{x+7}-6$ για κάθε $x\in(1,3)$ να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Απ: $\frac{1}{2}$

22. Αν $\left|f(x)\eta\mu x - 2x\right| \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε τα όρια i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\eta\mu x}{2x-\eta\mu x}$

Απ: i) 2 ii) 3

23. Αν $2x - x^2 \leq f(x) \leq 2x + x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)+\eta\mu 4x}{5f(x)+3x}$

Απ: i) 0 ii)2 iii) $\dfrac{8}{13}$

24. Αν $\eta\mu x + x \leq f(x) \leq 8\sqrt{x+4} - 16$ για κάθε x>-4 να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

Απ. 2

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1^{η}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(\alpha^2+\beta^2)x^2+2x(\beta-2\alpha)+5}{x+\sqrt{x}-x\sqrt{x}-1} & \alpha\nu\ x>1 \\ \lambda\ \alpha\nu\ x\le 1 \end{cases}$

Απ. α=2, β=-1, λ=-10

Να βρείτε τα α, β, λ $\in \mathbb{R}$ ώστε να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2^{η}

Αν $|f(x)-\eta\mu x|\le x^2$ για κάθε x$\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \alpha\nu\ x\ne 0 \\ \lambda^2-3\lambda-3 & \alpha\nu\ x=0. \end{cases}$

Να βρείτε το λ ώστε η g να είναι συνεχής στο x_o=0.

Απ. λ=4, λ=-1,

ΑΣΚΗΣΗ 3^{η}

Να βρείτε τα α και β ώστε η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -2\eta\mu x & \alpha\nu\ x\le -\dfrac{\pi}{2} \\ \alpha\eta\mu x+\beta & \alpha\nu\ -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu x & \alpha\nu\ x\ge\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Το ίδιο και την συνάρτηση

$g(x)=\begin{cases} 3\alpha e^{x+1}+x & \alpha\nu\ x\le -1 \\ 2x^2-\alpha x+3\beta & \alpha\nu\ -1<x<0 \\ \beta\eta\mu x+\alpha\sigma\upsilon\nu x+1 & \alpha\nu\ x\ge 0 \end{cases}$ (Πανελλήνιες 1986)

Απάντηση: α=-1, β=1 - α=4, β=$\frac{5}{3}$

ΑΣΚΗΣΗ $4^η$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2x-5 & \alpha\nu \quad x\le 2 \\ \dfrac{x^2-\alpha x-\beta}{x-2} & \alpha\nu \quad x>2 \end{cases}$.

Βρείτε τα α, $\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η f συνεχής στο x_0=2.

Απάντηση: α=5 – β=-6

ΑΣΚΗΣΗ $5^η$

$f(x)=\begin{cases} x^2-8x+16 & \alpha\nu \quad 0<x<5 \\ (\alpha^2+\beta^2)\ell n(x-5+e)+2(\alpha+1)e^{5-x} & \alpha\nu \quad x\ge 5 \end{cases}$.

Να βρείτε τα α και β ώστε να είναι συνεχής στο x_0=5.
(Πανελλήνιες 2000)

Απάντηση: α=-1 β=0

ΑΣΚΗΣΗ $6^η$

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} & \alpha\nu \quad x>1 \\ \dfrac{3}{2} & \alpha\nu \quad x=1 \\ \dfrac{x^2-\lambda x-\kappa}{x-1} & \alpha\nu \quad x<1 \end{cases}$. Βρείτε τα κ,$\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η f συνεχής στο x_0=1.

Απάντηση: λ=κ=$\frac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ $7^η$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0=0 και $|xf(x)-\eta\mu 2x|\le x^4$ για κάθε x$\in\mathbb{R}$ να βρείτε την τιμή της f στο x_0=0.

Απάντηση: f(0)=2

ΑΣΚΗΣΗ $8^η$

Αν $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)}{h}=5$ και η f είναι συνεχής στο 3, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$.

Απάντηση: 5

ΑΣΚΗΣΗ 9^η

Αν οι συναρτήσεις f,g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχουν την ιδιότητα $f^2(x)+g^2(x)+2f(x)+5 \le 4g(x)+συν^2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι f,g συνεχείς στο $x_0=\frac{\pi}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 10^η

Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει $\vartheta \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $|f(x)-f(y)| \le \vartheta|x-y|$ για κάθε x, $y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε 1) η f είναι συνεχής. 2) Η εξίσωση f(x)=x έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 11^η

Για την συνάρτηση f ισχύει $f(x+y)=f(x)συν2y+f(y)συν2x$ για κάθε $x,y \in \mathbb{R}$. Είναι η f συνεχής στο 0 και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ να δείξετε ότι i) Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii) $\lim_{x\to \alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=συν2\alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 12^η

Αν η συνάρτηση f πληρεί τη συνθήκη $\left|f(x)-x^2συν\frac{1}{x}\right| \le x^2ημ^4\frac{1}{x}$ για $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 13^η

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και $|xf(x)-ημ2x| \le x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε την τιμή της f στο $x_0=0$

Απ: f(0)=2

ΑΣΚΗΣΗ 14^η

Αν $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)}{h}=5$ και η f είναι συνεχής στο 3, να βρείτε το $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$.

Απ: 5

ΑΣΚΗΣΗ 15^η

Αν οι συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχουν την ιδιότητα $f^2(x)+g^2(x)+2f(x)+5 \le 4g(x)+συν^2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0=\frac{\pi}{2}$.

Συνέχεια Συνάρτησης σε Κλειστό Διάστημα [α, β]
Θεωρήματα: BOLZANO - Ενδιάμεσων Τιμών - Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής

ΑΣΚΗΣΗ 16η

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και ισχύει f(α)+f(β)=0 να αποδείξετε ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο [α, β].

ΑΣΚΗΣΗ 17η

Για τις συνεχείς συναρτήσεις f και g στο [α, β] ισχύουν:

α. f(x)<g(x) για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$,

β. f(α)=α και g(β)=β

να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε να ισχύει:

$\kappa f(x_0)+\lambda g(x_0)=(\kappa+\lambda)x_0$ με κ, λ ομόσημους πραγματικούς αριθμούς.

ΑΣΚΗΣΗ 18η

Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(x)=συν2x-x και g(x)=xημx-1 έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με θετική τετμημένη μικρότερη του π.

ΑΣΚΗΣΗ 19η

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g συνεχείς στο [α, β] με f(x)<g(x) για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, f(α)=α και g(β)=β. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $\lambda f(\xi)+(1-\lambda)g(\xi)=\xi$, $\lambda \in (0, 1)$.

ΑΣΚΗΣΗ 20η

Αν η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ είναι συνεχής και αβ>0 να αποδείξετε ότι η εξίσωση xf(x)=αβ έχει μία τουλάχιστον λύση στο [α, β].

ΑΣΚΗΣΗ 21η

Αν α>0 και α+β+1<0 να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3+\beta x^2+\alpha=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (-1,1).

ΑΣΚΗΣΗ 22η

Αν $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, α≠0 και 5α+3β+3γ=0 να δείξετε ότι: i)f(0)+f(1)+f(2)=0 ii)η εξίσωση f(x)=0 έχει μία τουλάχιστον λύση στο [0, 2].

ΑΣΚΗΣΗ 23η
Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$ και $g(x)=-x^2+\beta x+\gamma$ με $\gamma\neq 0$. Αν ρ_1 είναι η ρίζα της f και ρ_2 η ρίζα της g με $\rho_1<\rho_2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+2g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1, ρ_2).

ΑΣΚΗΣΗ 24η
Αν η f είναι συνεχής στο [1,5], f(1)=3 και f(5)=2 να δείξετε ότι η C_f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία y-x=0

ΑΣΚΗΣΗ 25η
Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β]. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \Delta$ ώστε:
$3f(x_1)+5f(x_2)=8f(x_0)$, όπου $x_1,x_2 \in [\alpha, \beta]$.

ΑΣΚΗΣΗ 26η
Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και x_1, x_2 …x_ν σημεία του [α, β] να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_\nu)}{\nu}$.

ΑΣΚΗΣΗ 27η
Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f και g στο [α, β] με τιμές στο [α, β]. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε 1. $(fog)(\xi)=\xi$ και 2. $(fog)(\xi)+(gof)(\xi)=2\xi$.

ΑΣΚΗΣΗ 28η
Να δείξετε ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

ΑΣΚΗΣΗ 29η
Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο [α, β] και f(α)=g(β) και f(β)=g(α) να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [\alpha, \beta]$ ώστε $f(x_0)=g(x_0)$. (Δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο).

ΑΣΚΗΣΗ 30η
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-e^{-x}+x+1$:
α. Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.
β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μία μόνο λύση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $3^{ο}$
ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Παράγωγος αριθμός

Άσκηση $1^{η}$

Να εξετάσετε αν υπάρχει f΄(0) για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x} & \alpha\nu \quad x\neq 0 \\ 0 & \alpha\nu \quad x=0 \end{cases}$

Άσκηση $2^{η}$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ όταν γνωρίζετε για κάθε $x\in 3$ ισχύει
$x^3 + x^2 + 2 \leq f(x) \leq x^4 + 2x^2 + 2$.

Άσκηση $3^{η}$

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} 2x-\eta\mu x & \alpha\nu \quad x\leq 0 \\ x^2+\eta\mu x & \alpha\nu \quad x>0 \end{cases}$.

Να βρείτε :
1. Το παράγωγο αριθμό της f στο $x_0=0$.
2. Την εξίσωση εφαπτομένης της f στο $x_0=0$.
3. Την κλίση της f στο $x_0=0$.

Άσκηση $4^{η}$

Αν η f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ με f(0) = 2005 να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της g(x) = f(x)ημx στο $x_0=0$.

Άσκηση $5^{η}$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{\eta\mu^2 x}=1002$ να βρείτε :

1. $\lim_{x\to 0} f(x)$
2. το f(0)
3. τον παράγωγο αριθμό f΄(0).
4. Την εξίσωση εφαπτομένης της f στο $x_0=0$.

Άσκηση $6^{η}$

Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει για κάθε $x,y\in 3$ με $f(x+y) = f(x)συνy+f(y)συνx$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2005$ να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της f στο $x_0=0$.

Άσκηση $7^{η}$

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f(0)=0$ και $f'(0)=1$ και η συνάρτηση g για την οποία ισχύει $1+f(x)\le g(x)\le f(x)+1+x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες των f και g στο $x_0=0$ είναι παράλληλες και έχουν κλίση 45^o.

Άσκηση $8^{η}$

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(x)^2-2xf(x)+xημx=0$. Να δείξετε ότι η διχοτόμος της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων είναι η εφαπτόμενη της f στο $x_0=0$.

Άσκηση $9^{η}$

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν $f^2(x)-ημ2xf(x)+x^2+g^2(x)-$ $-2λxg(x)+λ^2x^2=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το $λ\in\mathbb{R}$ ώστε οι εφαπτόμενες των f και g στην αρχή των αξόνων είναι κάθετες.

Άσκηση $10^{η}$

Αν για την συνάρτηση f ισχύει $f(1+h)=2+3h+3h^2+h^3$ για κάθε $h\in 3$ να δείξετε ότι :

(1) $f(1)=2$ **(2)** $f'(1)=3$ και **(3)** να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της f στο$x_0=1$.

ΣΧΟΛΙΟ: Όλες οι ασκήσεις αφορούν την παραγωγισιμότητα στο x_0. Ως x_0 έχει επιλεγεί το μηδέν. Παρατήρησε ότι όλες οι εκφωνήσεις είναι διαφορετικές αλλά απαιτούν το ίδιο πράγμα: Την παράγωγο στο $x_0=0$, που βρίσκεται ΜΟΝΟ με τον ορισμό και όχι ΜΕ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ROLLE

1η Άσκηση
Να βρείτε τα α, β, γ ώστε για την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2+\alpha x+\beta & \alpha\nu \quad x<0 \\ \gamma x^2+4x+2 & \alpha\nu \quad x\geq 0 \end{cases}$$ να ισχύει το θεώρημα Rolle στο [-2,2].

2η Άσκηση
Δίνεται συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο [α,β] με f(α)=f(β)=0 και f΄(α)=f΄(β)=0 να δείξετε ότι:
1) η εξίσωση f΄΄(x)=0 έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (α,β).
2) η εξίσωση f΄΄΄(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

3η Άσκηση
Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^3+18x+\mu=21x^2$ δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο (1,2).

4η Άσκηση
Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+2ax^3+6a^2x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες για κάθε α,β $\in\mathbb{R}$ με α$\neq 0$.

5η Άσκηση
Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^3+3(a-1)x^2+2\beta x-\alpha-\beta=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1) για κάθε α,β $\in\mathbb{R}$

6η Άσκηση
Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^3-21x^2+18x+6\mu=0$ έχει για κάθε μ$\in\mathbb{R}$ το πολύ μία ρίζα στο (1,2).

7η Άσκηση
Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2(2\ell nx-1)+8x(-\ell nx-1)+10=0$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα (1,2).

8η Άσκηση
Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και η παράγωγος της συνάρτησης δεν έχει ρίζα στο διάστημα αυτό, τότε να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση f έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα Δ.

<u>9η Άσκηση</u>
Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,5] και παραγωγίσιμη στο (0,5) και f(5)=0. Να δειχτεί ότι υπάρχει ξ $\in$(0,5) τέτοιο ώστε f(ξ)+ξf΄(ξ)=0.

<u>10η Άσκηση</u>
Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ με f(π)=0 και f(x)$\neq 0$ για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. Να δειχτεί ότι υπάρχει ξ $\in$ $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\varepsilon\varphi\xi$.

<u>11η Άσκηση</u>
Αν η f είναι συνεχής στο [1,2] παραγωγίσιμη στο (1,2), f(1)=3, f(2)=6 να δείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτόμενη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

<u>12η Άσκηση</u>
Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [1, 3] με f(1)=3 και f(3)=1. Να δείξετε ότι:

- **i.** υπάρχει $x_0\in$(1, 3) ώστε $f(x_0)= x_0$
- **ii.** υπάρχουν x_1, $x_2\in$(1, 3) ώστε $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=1$
- **iii.** υπάρχει ξ$\in$(1, 3) ώστε f΄΄(ξ)=0.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

1. Να δείξετε ότι : $\nu\cdot\beta^{\nu-1}\cdot(\alpha-\beta)<\alpha^{\nu}-\beta^{\nu}<\nu\cdot\alpha^{\nu-1}\cdot(\alpha-\beta)$, $\alpha, \beta\in\mathbb{R}_{+}^{*}$ και $\alpha>\beta$, $\nu\in\mathbb{N}^{*}, \nu>1$.

2. Να δείξετε ότι : $1-\frac{\alpha}{\beta}<\ell n\frac{\beta}{\alpha}<\frac{\beta}{\alpha}-1$ όπου $0<\alpha<\beta$.

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση f όπου $x\in[0, +\infty)$ συνεχή στο $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη σ’ αυτό. Αν $f(0) = \alpha$ και για ένα αριθμό $\kappa\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) \leq \kappa$ για κάθε $x\in(0, +\infty)$, τότε δείξτε ότι $f(x) \leq\alpha+\kappa x$.

4. Να δείξετε ότι : $\frac{1}{x+1}<\ell n\left(\frac{x+1}{x}\right)<\frac{1}{x}$ όπου $x>0$.

5. Αν $0\leq x<y<\frac{\pi}{2}$ να δείξετε ότι : $\frac{x-y}{\sigma\upsilon\nu^{2}y}<\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi y<\frac{x-y}{\sigma\upsilon\nu^{2}x}$.

6. Αν $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ να δείξετε ότι : $\varepsilon\varphi\alpha<\frac{\ell n(\sigma\upsilon\nu\alpha)-\ell n(\sigma\upsilon\nu\beta)}{\beta-\alpha}<\varepsilon\varphi\beta$.

7. Να δείξετε ότι : $1<\frac{e^{x}-1}{x}<e$ για κάθε $x\in(0, +1)$.

8. Να δείξετε ότι $e^{x}\geq x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

9. Αν $0<\alpha<\alpha+h<\frac{\pi}{2}$ να δείξετε ότι : $\eta\mu(\alpha+h)<\eta\mu\alpha+h\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$.

10. Σε ποιο σημείο η εφαπτομένη του διαγράμματος της f με τύπο $f(x)=\ell nx$ είναι παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $M_1(1, 0)$ $M_2(e, 1)$;

11. Έστω μια συνάρτηση f, συνεχής στο διάστημα [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β). Αν f(α)=β και f(β)=α, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_o\in(\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_o,f(x_o))$ nνα είναι κάθετη στην ευθεία ψ-x=0.

12. Αν 0<α<β, να αποδείξετε ότι αe < $\left(\frac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} < \beta e$.

13. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β), f(α)=β και f(β)=α, να αποδειχθεί ότι:

- **i.** υπάρχει γ$\in$(α, β) τέτοιο, ώστε f(γ)=γ,
- **ii.** υπάρχουν κ, λ$\in$(α, β) τέτοια, ώστε f΄(κ)f΄(λ)=1.

14. Μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β], δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) και ισχύουν f(α)=α, f(β)=β και f(γ)=γ για κάποιο γ $\in$ (α,β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ $\in$ (α,β) τέτοιο, ώστε f΄΄(ξ)=0.

15. Έστω συνάρτηση f 2 φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [1,3]. Αν είναι 2f(2)= f(1)+ f(3) να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει f΄΄(x_0)=0.

16. Αν για μία συνάρτηση f ισχύει f΄΄(x)= $4e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$ και $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$ να δείξετε ότι:

Ο τύπος της συνάρτησης f είναι f(x)= $e^{2x} - 2x + 1$.

17. Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης f για την οποία ισχύει f΄(x)=$\frac{1}{2}\left(e^{x-f(x)}\right)$ για κάθε x$\in \mathbb{R}$ και το διάγραμμά της διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

18. Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης f ορισμένης στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ για την οποία ισχύει f΄(x)·συνx+f(x)·ημx=f(x)·συνx και f(0)=2006.

19. Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης f για την οποία ισχύει f΄(x)+f(x)·εφx=ημ2x·ημx για κάθε x$\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και f(0)=1.

20. Έστω f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

α. Είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο Δ
β. f΄΄=g΄΄
γ. 0$\in$Δ και f(0)=g(0)

Να δείξετε ότι:

1. Για κάθε x$\in$Δ, f(x)-g(x)=cx όπου c$\in \mathbb{R}$.

2. Αν η εξίσωση f(x)=0 έχει δυο ρίζες ετερόσιμες ρ_1, ρ_2 τότε η εξίσωση g(x)=0 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο κλειστό διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

(Πανελλήνιες εξετάσεις 1989)

21. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f''(x)-g''(x)=4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $f'(1)=g'(1)$ και $f(2)=g(2)$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $h(x)=f(x)-g(x)$. (Πανελλήνιες 1997)

22. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους στο $\mathbb{R}$ με $f'=g$ και $g'=-f$ τότε να δείξετε ότι:

1. Υπάρχουν οι συναρτήσεις f'' και g'' και είναι συνεχείς.
2. ότι ισχύει $f''+f=g''+g=0$ και
3. η συνάρτηση $h=f^2+g^2$ είναι σταθερή. (Πανελλήνιες 1996)

23. Να βρεθεί η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $\Delta=(-1, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f''(x)=1995e^x+\frac{2001}{(x+1)^2}$ και η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο Α(0, 40) είναι -1.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

1) Δίνεται η συνάρτηση με f με τύπο f(x)=$x^3+\lambda x^2+\left(3\lambda+\frac{4}{3}\right)$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2) Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [1,2] και f(1)=0 και f΄(2)=1. Αν η συνάρτηση f΄είναι γνησίως αύξουσα στο [1,2] να δείξετε f(2)<2.

3) Να δείξετε ότι **α)** ημx-xσυνx>0 για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

β) Η συνάρτηση f(x)=$\frac{\eta\mu x}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

γ) $\frac{\eta\mu x}{\eta\mu y}>\frac{x}{y}$ για κάθε x, $y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ με x<y.

4) Να αποδείξετε ότι:

1) η συνάρτηση f(x)=$2x^3-3x^2+\alpha$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [0,1].

2) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο [0,1].

3) Αν $0\le\alpha\le1$ να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^3-3x^2+\alpha=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο [0,1].

5) Να αποδείξετε ότι $e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$ για κάθε x>0.

6) Να δείξετε ότι:

1) η εξίσωση $x\cdot e^x-1=0$ έχει μία μόνο ρίζα στο (0,1).

2) Η εξίσωση $x^3-3x+\alpha=0$ έχει 3 ακριβώς ρίζες στο $\mathbb{R}$ όταν $\alpha\in(-2,2)$.

7) Δίνεται η συνάρτηση f(x)=$x^2-2x+x\ell nx-\ell nx$.

Ζητούνται: **1)** Μονοτονία της f.

2) Πλήθος ριζών της εξίσωσης $x^2-2-(1-x)(\ell nx-2)=0$.

3) Να αποδείξετε ότι $(1-x)(\ell nx-2)\le x^2-1$ για κάθε x>0.

8) Μία συνάρτηση είναι 3 φορές παραγωγίσιμη με f(2006)=f΄(2006)=f΄΄(2006)=0 και f΄΄΄(x)>0 για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την μονοτονία της f και να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις f΄(x)=0 και f(x)=0 έχουν μοναδική ρίζα.

9) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{\ell nx}{2\sqrt{x}}$, x>0

(Πανελλήνιες 1991)

10) Έστω οι συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το R.
Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1.

α. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(f(x)+x^3-x)=g(f(x)+2x-1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

(Πανελλήνιες 2002)

11) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x)\geq f(1+x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}.

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση x=3.

(Πανελλήνιες 2003)

12) Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύουν $|z+2i|=|z+4i|$ και $w=\dfrac{z+4i}{z+2i}\in\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z_1=(x-1)+(|z|-2)i$ και $z_2=2\ell nx+(|z|-1)i$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή του $x\in\mathbb{R}$ ώστε ο αριθμός $u=\overline{z_1}\cdot z_2$ να είναι πραγματικός.

13) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{e^{\lambda x}}{x^2+\lambda^2}$ και λ>1. Να δείξετε:

1. Η f είναι γνησίως αύξουσα.

2. Για κάθε $x\geq 0$ ότι ισχύει $e^{\lambda x}\geq 1+\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)^2$, λ>1.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ - ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

1) Για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών 3, ισχύει ότι: $f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2<3\gamma$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 το ανοικτό διάστημα (0,1).

2) Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων

1. $f(x)=\eta\mu^2x+\eta\mu x-1,\ x\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$,

2. $g(x)=\left|x^2-x-2\right|$,

3. $h(x)=\begin{cases} x^3 & \alpha\nu\ \ x<0 \\ 3 & \alpha\nu\ \ x=0 \\ 2-x^2 & \alpha\nu\ \ x>0 \end{cases}$

4. $\phi(x)=\begin{cases} x^2 & \alpha\nu\ \ x\le 0 \\ \frac{1}{x} & \alpha\nu\ \ x>0 \end{cases}$.

3) Σημείο Α κινείται στον θετικό ημιάξονα Οx με ταχύτητα $u=\frac{1}{2}$ m/sec ξεκινώντας από το σημείο Ο. Για κάθε θέση του σημείου Α θεωρούμε το ορθογώνιο με κορυφές ΑΒΓΟ όπου Β σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=e^{-4x}$, Γ σημείο πάνω στον θετικό ημιάξονα Οy και Ο η αρχή των αξόνων. Να βρείτε:

1. Τη συνάρτηση E(x) και E(t) του εμβαδού του ορθογωνίου συναρτήσει του x και του χρόνου αντίστοιχα.

2. Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου τη χρονική στιγμή $t_0=\frac{3}{2}$ sec.

3. Ποια χρονική στιγμή το εμβαδό του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο και ποιες είναι αυτή τη στιγμή οι διαστάσεις του;

4. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}E(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0}E(x)$.

4) Να αποδείξετε τις ανισώσεις:

1. συν$x \geq 1-\frac{x^2}{2}$ για κάθε $x \in R$, **2.** $-2x\ln x \leq x^2-4x+3$ για κάθε $x>0$.

5) Δίνεται η συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία $f'(0)=0$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και να εξετάσετε αν υπάρχουν τοπικά ακρότατα της f.

6) Αν για μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο 3 ισχύει $f^3(x)+3f(x)=e^x-x+\frac{x^2}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι έχει ένα μόνο κρίσιμο σημείο.

7) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x-12$ και το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-1-\ell n(x+1)$, $x>-1$.

1) Να μελετήσετε την μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f.

2) Να βρείτε τα σημεία τομής με τον άξονα xx΄.

3) Να αποδείξετε ότι $1+\ell n(x+1) \leq e^x$ για κάθε $x>-1$

4) Αν είναι $\alpha^x \geq 1+\ell n(x+1)$ για κάθε $x>-1$ να δείξετε ότι $\alpha=e$

9) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f^3(x)+x^3=3xf(x)-1$ για κάθε $x>0$. Αν το $f(\alpha)$ είναι τοπικό ακρότατο της f, να αποδείξετε $\alpha=1$.

10) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^3-\alpha x^2+1$, $\alpha \neq 0$ έχει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

11) Έστω συνάρτηση $f:(0,1)\to \mathbb{R}$ και 3 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \geq 2006$ για κάθε $x \in (0,1)$. Αν υπάρχουν $x_1,x_2 \in (0,1)$ με $x_1<x_2$ ώστε $f(x_1)=f(x_2)=2006$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f'''(x)=0$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

12) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=2$ και $f(2x) \geq 2e^{-2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f'(0)=-2$.

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ell nx-\lambda x+1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το οποίο κινείται σε ευθεία καθώς ο λ διατρέχει το $\mathbb{R}$.

14) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^7 \cdot e^{2\lambda - x}$ με $\lambda \geq 0$, x>0. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η μέγιστη τιμή της f να γίνεται ελάχιστη.

15) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ και έστω $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ οι ρίζες της εξίσωσης f(x)=0. Να αποδείξετε ότι:

1) Υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1,\rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2,\rho_3)$ ώστε η f να παρουσιάζει στο ξ_1 τοπικό μέγιστο και στο ξ_2 τοπικό ελάχιστο.

2) Υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ ώστε η $f'(x)$ να έχει στο ξ τοπικό ελάχιστο.

16) Αν $x^3 \geq x^2+\alpha \ell n x$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ να δείξετε ότι α=1.

17) Έστω f και g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και τέτοιες ώστε $g(x)=1+(f(x))^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, f(A) = [-2,2] και η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0 \in (-2,2)$ ώστε $g'(x_0)=0$.

18) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f(0)=1 και ισχύει $f(x) \cdot e^{-x} \leq x^2+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $f'(0)=1$

19) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(1+x)-f(1-x) \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $f'(1)=0$.

20) Αν $g(x)=1+|f(x)-2|$, η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $g'(x_0)=0$.

ΚΑΝΟΝΑΣ DEL' HOSPITAL ΓΙΑ ΟΡΙΑ

1) Να υπολογίσετε τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - x - 1}{x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to +\infty}(e^x - x - 1)$

2) Ομοίως τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x + \ell n x}{x + 3\ell n x}$

3) Ομοίως τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x - \eta\mu x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \eta\mu x}{x^3}$

4) Ομοίως τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ell n x} - \dfrac{1}{x - 1}\right)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 + x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu^2 x}$

5) Ομοίως τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ell n^2 x + \ell n x + 1}{\ell n^2 x + 1}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{2e^x - x^2 - 2x - 2}$

6) Να βρείτε τα α, β, γ$\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha e^x + \beta e^{-x} + \gamma x}{x - \eta\mu x} = 4$

7) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ell n(x+1)}{x} & \alpha\nu \;\; x\in(-1,0) \\ \lambda^2 + 3\lambda - 3 & \alpha\nu \;\; x = 0 \\ (\varepsilon\phi x)^{\eta\mu x} & \alpha\nu \;\; x\in(0,1) \end{cases}$. Να βρείτε το λ$\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

8) Αν $x^x e^{-x} - \alpha^{x-e} \geq 0$ για κάθε x$\in$(0,π) όπου α>0 να δείξετε ότι α= $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\sigma\phi x}$.

9) Αν $\ell n(x+1) \geq \alpha x + \dfrac{x^2}{2}$ για κάθε x>-1 να δείξετε ότι α= $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

10) $f(x)=\begin{cases} \alpha^x-\dfrac{\ell n(x+1)}{x}, & x>0 \\ \\ \dfrac{1}{2}\eta\mu(\alpha x), & x\leq 0 \end{cases}$.

Να βρείτε το α ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

11) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f^5(x)+f^3(x)+f(x)=x-\eta\mu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=\dfrac{1}{6}$.

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

1. Αν μία συνάρτηση f ισχύει f΄΄(x) = $4e^{2x}$, $x\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0} f(x)=2$ και $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-2$ να βρείτε:

- **i** Το τύπο της f.
- **ii** Δείξτε ότι $e^{2x}-2x-1\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- **iii** Δείξτε ότι η εξίσωση $e^{2x}-2x=2x^2+1$ έχει μία μόνο ρίζα.

2. A. Έστω ότι η ευθεία y=2x+5 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$.

Να βρείτε τα όρια:

- **i** $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]$
- **ii** Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ, αν $\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu f(x)+4x}{xf(x)-2x^2+3x}=1$.

B.

- **i** Να αποδείξετε ότι $e^x-x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- **ii** Η εξίσωση $2e^x+2x=x^2+2$ έχει ακριβώς μία λύση την x=0.

Θέμα 4ης Δέσμης 1994

3. Να βρείτε το πολυώνυμο P(x) και το λ όταν η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{x^2+\lambda x-3}{P(x)}$ έχει $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1$, κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες με εξισώσεις x=1 και x=-2 και παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x_0=-1$.

4. Αν για την συνάρτηση f ισχύει $2x+3\leq f(x)\leq\frac{2x^3+3x^2+1}{x^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

Να δείξετε ότι η ευθεία y=2x+3 είναι πλάγια ασύμπτωτη της f για $x\to+\infty$ και $x\to-\infty$.

5. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των συναρτήσεων:

1) f(x)=$\frac{x^2+5x+6}{x-2}$ **2)** g(x)=$\sqrt{x^2+x}$

6. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των συναρτήσεων

1) f(x)=$\frac{x}{e^x-1}$ **2)** g(x)=$\frac{x\cdot e^x}{x-2}$

7. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των συναρτήσεων

1) f(x)=$\frac{\ell n(x^2+1)}{x}$ **2)** g(x)=$\frac{\eta\mu 2x}{x}$

8. Αν f και g συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και f(x)-g(x)=x-4 για $x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία y=3x-7 είναι ασύμπτωτη του C_f για $x\to+\infty$ να βρείτε τα όρια:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$ και **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)+3x+\eta\mu 2x}{xf(x)-3x^2+1}$

Πανελλήνιες 2000

9. Έστω η συνάρτηση f(x)=$\frac{\alpha x^2+\beta x}{x-2}$, $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ και α, β $\in\mathbb{R}$. Αν η ευθεία ε: y=2x-1 είναι ασύμπτωτη του C_f για $x\to+\infty$ να βρείτε τα α και β.

Πανελλήνιες 2001

10. Αν η ευθεία y=3x+5 είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf(x)+x^2+1}{x^2\cdot f(x)-3x^3+2x^2}$.

11. Να βρείτε τα α και β ώστε η συνάρτηση f(x)=$\frac{(\alpha^2-1)x^3+(\beta-1)x^2+x+3}{x(x-2)}$ να έχει για $x\to+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία y=3x+2.

12. Να βρείτε το κ,λ$\in\mathbb{R}$ ώστε η ευθεία y=x-2λ να είναι ασύμπτωτη της f(x)=$\frac{\kappa x^3-3\kappa^2x^2+2x+1}{2x^2+4x+1}$ για $x\to-\infty$.

13. Να βρείτε το α$\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f(x)=$\sqrt{x^2-x}+\sqrt{4x^2+3x+1}-\alpha x$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη για $x\to-\infty$.

14. Να βρείτε το λ$\in\mathbb{R}$ ώστε η πλάγια ασύμπτωτης της συνάρτησης f(x)=$\frac{2x^2+6x}{x+2}$ εφάπτεται της $g(x)=\lambda x^2+1$.

15. Να βρείτε το πολυώνυμο P(x) και τον αριθμό κ$\in\mathbb{R}$ όταν για την συνάρτηση

f(x)=$\frac{x^2-(\kappa+1)x-2}{p(x)}$ ισχύουν:

1) Η ευθεία Y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη του C_f
2) οι ευθείες x=0 και x=2 είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες του C_f
3) έχει τοπικό ακρότατο στο $x_0=1$

New York University

ΚΟΙΛΕΣ - ΚΥΡΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ- ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1) Έστω α πραγματικός αριθμός και f η συνάρτηση με
$f(x)=\frac{x^4}{3}+\frac{2\alpha x^3}{3}+\left(\alpha^2-2\alpha+\frac{5}{2}\right)x^2+\left(\alpha^3+7\right)x-5\alpha^2$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει η σημεία καμπής.

Θέμα 4ης Δέσμης 1990

2) $f(x)=(\beta+1)\ell nx-(\alpha+3)x^2-3x+\gamma$ και $g(x)=\frac{2x^2+3x+1}{x+1}$. Αν η εφαπτόμενη της f στο $x_0=2$ είναι παράλληλη προς την πλάγια ασύμπτωτη της g στο $+\infty$ και το σημείο Σ(1,0) είναι σημείο καμπής της C_f να βρείτε τα α και β.

3) Δίνεται η συνάρτηση g(x) $=e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0)=f\left(\frac{3}{2}\right)=0$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-f(\xi)$.

β. Εάν $f(x)=2x^2-3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα. $I(\alpha)=\int_{\alpha}^{0}g(x)dx,\ \alpha\in\mathbb{R}$

γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha)$

4) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=-x^4+2(\mu-1)x^3-6(\mu^2+\mu+2)x^2+\mu^2+1$ δεν έχει σημεία καμπής για όλες τις τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$, ενώ η συνάρτηση $f(x)=x^4+6(\mu+2)x^3+6(2\mu^2+8\mu+7)x^2+12x+2$ παρουσιάζει 2 σημεία καμπής για $\mu\in\mathbb{R}$.

5) Να μελετήσετε ως προς τα κοίλα και να βρείτε εφ' όσον υπάρχουν σημεία καμπής για τις συναρτήσεις $f(x)=x\cdot e^{-\sqrt{x}}$ και $g(x)=\ell n\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{(1+\eta\mu x)^2}\right), x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

6) Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$, $g'(x)>0$ και $g''(x)>0$ για κάθε $x\in f(\Delta)$ να δείξετε ότι η συνάρτηση gof είναι κυρτή στο Δ.

7) Αν η συνάρτηση f είναι τρείς φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν $f''(0)=0$ και $f'''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$ και κυρτή στο $[0,+\infty)$.

8)

A.1. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στο $(0,+\infty)$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση g με g(x)=lnf(x), $x\in\Delta$ στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $f(x)f''(x)\geq\left[f'(x)\right]^2$ για κάθε $x\in\Delta$.

2. Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα, στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x)=\ln(x^2+2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

B.1. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα η συνάρτηση f με $f(x)=\alpha^x-x$, $x\in\mathbb{R}$ και $0<\alpha<1$.

2. Να βρεθούν τα $\lambda\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει η ισότητα $\alpha^{\lambda^2-4}-\alpha^{\lambda-2}=(\lambda^2-4)-(\lambda-2)$ όπου $0<\alpha<1$.

Πανελλήνιες εξετάσεις1ης Δέσμης 1992

9) Σημείο Β κινείται στον άξονα Ox με ταχύτητα u=2m/sec ξεκινώντας από το σημείο Ο. Για κάθε θέση του σημείου θεωρούμε το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ (ΑΟ=ΑΒ) και η κορυφή Α είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\dfrac{8}{x^2+4}$.

Να βρείτε:

1. Ποια χρονική στιγμή t_0 έχουμε την ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου (ΟΑΒ).

2. Ποια είναι ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής του εμβαδού του (ΟΑΒ) και

3. Ποια χρονική στιγμή t το σημείο Α βρίσκεται σε σημείο καμπής της f και πόσο είναι το εμβαδό του τριγώνου (ΟΑΒ) αυτή τη χρονική στιγμή.

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{1-x^2}+x$ και η οποία στο x_1 και x_2 παρουσιάζει σημείο καμπής. Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1=x_1+if(x_1)$, $z_2=x_2+if(x_2)$ και $z_3=2+(\lambda-1)i$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε το λ ώστε ο αριθμός $w=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}$ είναι φανταστικός αριθμός.

1^{o} ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
Ο Ρ Ι Α - Σ Υ Ν Ε Χ Ε Ι Α

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α.

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=0$ τότε $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ — Σ ή Λ

2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$ τότε δεν υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=0$ — Σ ή Λ

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της στο [α,β] τότε για κάθε $m \le L \le M$ υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=L$ — Σ ή Λ

4. Αν $f(x)<g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ — Σ ή Λ

5. Αν $x_0 \in A$ όπου Α το σύνολο ορισμού της f τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ — Σ ή Λ

6. Αν η τιμή y=0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι συνεχής στο Α τότε η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο Α — Σ ή Λ

(6Χ2=12 Μονάδες)

Β.

Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε για κάθε κ ανάμεσα στους f(α) και f(β) υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=\kappa$.

(13 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^{o}

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x^2-3x+2}=1$ και $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{g(x)\cdot(x^2-2x+1)}{\sqrt{x}-1}=5$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$.

(25 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Να βρείτε τους κ,λ,μ$\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο:

f(x)=$\begin{cases} \dfrac{(\kappa^2+\lambda^2)x^2+2x(\lambda-2\kappa)+5}{x+\sqrt{x}-x\sqrt{x}-1} & \alpha\nu \quad x\neq 1 \\ \mu & \alpha\nu \quad x=1 \end{cases}$ να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(25 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ=(α,β) γνησίως φθίνουσα στο (α,γ] και γνησίως αύξουσα στο [γ,β), όπου γ$\in$ (α,β). Αν f(γ)=-1, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=2$ και $\lim\limits_{x\to\beta} f(x)=3$ να βρείτε:

1. το σύνολο τιμών της f

2. το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x)=0, x$\in$Δ.

(25 Μονάδες)

2^{o} ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΟΡΙΑ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α. Ερωτήσεις σωστού – λάθους

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και $f(x)\cdot f(\beta)>0$ τότε δεν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0)=0$ Σ ή Λ

2. Ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ Σ ή Λ

3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [1, 5] και f(1)=10 και f(5)=50 τότε f(A)=[10, 50]. Σ ή Λ

4. Ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ Σ ή Λ

Β. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

1. Είναι το $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\dfrac{x}{x^3+x^2}\right) =$ με Α.0, Β.$+\infty$, Γ.1, Δ. δεν υπάρχει.

2. Είναι $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(1-3x)^3}{(x-1)^3} =$ με Α.$+\infty$ Β.$-\infty$, Γ.9 Δ.27 Ε.0

3. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2} = 4$ και η f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Τότε f(2) είναι ίσο με :

   Α.2 Β.0 Γ.4 Δ.1

4. Αν το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^4-x}{x^3+x}$ δεν υπάρχει τότε :

   Α.$x_0=-1$ Β. $x_0=1$ Γ. $x_0=0$ Δ. $x_0=2$

(4x4=16 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^{o}

Α. α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\cdot(x-2)\ \ldots\ (x-2001)+2004$ δεν είναι 1 – 1.

β) Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f\left(f(x)\right)+\left(f(x)\right)^3 = 2x+3$ να δείξετε ότι είναι 1 – 1.

B. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - \alpha x - 3}{x - 3} & \alpha\nu \quad x \neq 3 \\ 4 & \alpha\nu \quad x = 3 \end{cases}$

είναι συνεχής στο $x_0=3$.

(25 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 3$^{\text{o}}$

Α. Να υπολογίσετε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \dfrac{1}{x} \right)$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\eta\mu x}{x} \right)$

3. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1 - x^2}{x^2 - x - 2} \right)$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x + 3} - 2}{\sqrt{x + 8} - 3}$

(4x4=16 Μονάδες)

Β. α) Αν $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^4 \cdot f(x) \right) = 2004$ να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

β) Αν $\lim\limits_{x \to 1} \left(f(x) + x^2 - x - 2 \right) = 5$ να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

(2x5=10 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 4$^{\text{o}}$

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός $\lambda \in (0, 1)$ και οι συναρτήσεις f, g, οι οποίες είναι συνεχείς στο [α, β]. Αν $f(x)<g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, f(α)=α και g(β)=β, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος $\lambda f(\xi)+(1-\lambda)g(\xi)=\xi$.

(25 Μονάδες)

3^o ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ-ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ-ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

ΘΕΜΑ $1^{Ο}$

Αν οι εικόνες M(z) του μιγαδικού z κινούνται σε κύκλο κέντρου O(0,0) και ακτίνας $ρ_1$=1 να δείξετε ότι οι εικόνες N(w) του μιγαδικού w=$\frac{3(z+1)+2(z-1)i}{3-2i}$ ανήκουν σε κύκλο κέντρου κ(1,0) και ακτίνας $ρ_2$=1. Κατόπιν βρείτε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της παράστασης A=$|z-w|$.

(25 Μονάδες)

ΘΕΜΑ $2^{Ο}$

Α. Ερώτηση: Είναι $f^{-1}(f(x))=x$ Σ ή Λ

(4 Μονάδες)

Β. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+3f(x)-x=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και f(3)=3

Ζητούνται:

1) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται (8 Μονάδες)

2) Να βρείτε την f^{-1} (8 Μονάδες)

3) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=4x^2$ (5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ $3^{Ο}$

Α. Αν f:[-2,2]→ $\mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(-2)=f(2)\neq f(0)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $ξ\in(-2,0)$ τέτοιο ώστε f(ξ)=f(ξ+2).

(12,5 Μονάδες)

Β. Στην προηγούμενη συνάρτηση να δείξετε ότι υπάρχει $ξ\in(-2,2)$ ώστε 5f(ξ)=f(-2)+f(2)+f(0)+f(-1)+f(1).

(12,5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^{o}

1. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [5,7] και επιπλέον f(6)f(5)=f(7)-f(6) να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (5,7)$ στο οποίο η εφαπτόμενη της f΄ είναι παράλληλη στον άξονα xx΄.

(8 Μονάδες)

2. Να δείξετε ότι $x+1 \leq e^{x} \leq x \cdot e+1$ για κάθε $x \in (0,1)$ (8 Μονάδες)

3. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ παραγωγίσιμη στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ και f(π)=0. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ ώστε $f'(\xi)=f(\xi)\cdot \in\varphi\xi$.

(9 Μονάδες)

4. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}=4$ να βρείτε:

1) Την τιμή f(1)
2) Την παράγωγο της f στο $x_0=1$
3)Την εξίσωση εφαπτομένης της f στο $x_0=1$

(8 Μονάδες)

4^{o} ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

ΘΕΜΑ 1^{O}

Α. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

(Μονάδες 4)

Β. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 8,5)

Γ. Πότε μια ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

(Μονάδες 4,5)

Δ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f΄ είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.

β. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

γ. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

δ. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0.

(4*2=8 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^{O}

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο $f(x)= \begin{cases} \alpha x^2, & x \leq 3 \\ \dfrac{1 - e^{x-3}}{x - 3}, & x > 3 \end{cases}$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι: $\alpha = -\dfrac{1}{9}$.

(Μονάδες 11)

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο A(4, f (4)).

(Μονάδες 14)

ΘΕΜΑ 3^{Ο}

Α. Αν $x^x \cdot e^{-x} - a^{x-e} \geq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ όπου α>0 να δείξετε ότι α=e

(Μονάδες 9)

Β. Αν η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν $f''(0)=f'(0)=0$ και $f'''(x)>0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, να αποδείξετε ότι:

i) η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $(-\infty, 0]$, ενώ στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $[0, +\infty)$.

(Μονάδες 8)

ii) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4^{Ο}

α) Δίνεται η συνάρτηση f(x)=lnx+x-1

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα την x=1 και να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης f(x).

(Μονάδες 10)

β) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $\varphi(x)=2x\ln x+x^2--4x+3$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g(x)=xlnx και $h(x)= -\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}$, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

(Μονάδες 5)

$5^{ο}$ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΟΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ 2001 – ΟΡΟΣΗΜΟ

ΘΕΜΑ $1^{Ο}$
ΘΕΩΡΙΑ

Α. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο τότε $f'(x_0)=0$

(Μονάδες 10)

Β.1. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο Δ και $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in$ Δ και έχουν ένα τουλάχιστο κοινό σημείο τότε οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες με το Δ.

Σωστό ή Λάθος

Β.2. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο Δ τότε είναι σταθερή αν $f'(x_0)=0$ για κάθε $x\in$ Δ και αντιστρόφως.

Σωστό ή Λάθος

Β.3. Αν το σύνολο τιμών f (A) μιας συνεχούς και γνησίως μονότονης συνάρτησης περιέχει το μηδέν τότε η f έχει το πολύ μία ρίζα στο Α.

Σωστό ή Λάθος

Β.4. Αν η f είναι άρτια συνάρτηση και παραγωγίσιμη στο Α τότε η f΄ είναι περιττή και αντίστροφα.

Σωστό ή Λάθος

Β.5. Αν η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ και $f'(7)=5$ τότε είναι αδύνατο να ισχύει και $f'(5)=7$.

Σωστό ή Λάθος

Β.6. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ακρότατο τότε στο x_0 η μονοτονία της f αλλάζει ή η παράγωγος μηδενίζεται.

Σωστό ή Λάθος

Β.7. Αν $f'(1)<f'(2)$ τότε η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο [1,2].

Σωστό ή Λάθος

Β.8. Μια συνάρτηση που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α,β] και κοίλη σ' αυτό έχει ελάχιστη τιμή το $f'(\alpha)$.

Σωστό ή Λάθος

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2$^{\text{Ο}}$

Δίνεται:

Α. Η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'''(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και $f''(0)=f'(0)=f(0)=0$

1. Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f.

(Μονάδες 10)

2. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της f στο $x_0=0$.

(Μονάδες 2)

3. Η συνάρτηση $g(x)=x^3$ πληροί τις προϋποθέσεις της παραπάνω συνάρτησης f.

Σωστό ή Λάθος

(Μονάδες 3)

Β. Αν $x^x \cdot e^{-x} \geq \alpha^{x-e}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ όπου α>0. Να αποδειχτεί ότι $\alpha = \lim (1+x)^{\sigma\varphi x}$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3$^{\text{Ο}}$

Α. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f(2)-f(1)=f(3)-f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της f' στο x_0 να είναι παράλληλη με την xx΄.

(Μονάδες 12,5)

Β. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [1,e] με $0<f(x)<1$ για κάθε $x \in [1,e]$ και $f'(x) \geq 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+x\ln x=x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (1,e).

(Μονάδες 12,5)

ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$

Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f''(\chi)=4e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$, $\lim f(x)=2$ και $\lim \dfrac{f(x)}{x}=-2$ να δείξετε ότι:

1. Ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x)=e^{2x}-2x+1$. (Μονάδες 6)

2. $e^{2x}-2x-1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

3. Η εξίσωση $e^{2x}-2x=2x^2+1$ έχει μία μόνο ρίζα. (Μονάδες 7)

4. Η ευθεία $y=-2x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη του C_f για $x \to -\infty$. (Μονάδες 6)

6^{o} ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
Π Α Ρ Α Γ Ω Γ Ο Ι

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α.

1. Να δείξετε ότι μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ είναι σταθερή αν και μόνο αν $f'(x)=0$ για κάθε $x \in \Delta$.

(7 μονάδες)

2. Αν f και g δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο Δ και $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$ να δείξετε ότι $f(x)=g(x)+c$. (c:σταθερός αριθμός).

(6 μονάδες)

Β.

1. Αν το σημείο $M(x_0,f(x_0))$ είναι το τοπικό ακρότατο μιας συνάρτησης f τότε $f'(x_0)=0$ Σ ή Λ.

2. Αν το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0)=0$ Σ ή Λ.

3. Αν η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε δεν είναι συνεχής στο x_0 Σ ή Λ.

4. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ και παραγωγίσιμη σ' αυτό τότε $f'(x)>0$ για κάθε $x \in \Delta$ Σ ή Λ.

(4x3=12 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^{o}

Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύουν:

i) η f συνεχής στο $x_0=2$ και

ii) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2f(x)-3}{x-2} = 3$ και $g(x)=(x^3+2\cdot x)\cdot f(x)$,

να δείξετε ότι:

α. $f(2)=3/2$ *(10 μονάδες)*

β. να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης g στο $x_0=2$

(15 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3^o

Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f''(x)=4e^{2x}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$ και $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-2$, να δείξετε ότι:

1. ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x)=e^{2x}-2x+1$. (7 μονάδες)
2. $e^{2x}-2x-1\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (6 μονάδες)
3. Η εξίσωση $e^{2x}-2x=2x^2+1$ έχει 1 μόνο ρίζα. (6 μονάδες)
4. Η ευθεία $y=-2x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f για $x\to -\infty$. (6 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^o

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε $2f(x)\leq f(1)+f(2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

1. $f(1)=f(2)$ (6 μονάδες)
2. $f'(1)=f'(2)=0$ (6 μονάδες)
3. Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο (1, 2). (6 μονάδες)
4. Η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει 2 τουλάχιστον ρίζες στο (1, 2). (7 μονάδες)

7^o ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1^O

Α. Ερωτήσεις Σωστού Λάθους.

1. Το μέτρο του μιγαδικού z=3-4i είναι 12. Σ ή Λ

2. Ισχύει $z\bar{z}=z^2$ για κάθε μιγαδικό z. Σ ή Λ

3. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για $x\neq 4$ ισχύει $f(x)=\dfrac{x^2-7x+12}{x-4}$ τότε το f(4)=1. Σ ή Λ

4. Αν η f είναι συνεχής στο [-1,1] και f(-1)=4, f(1)=3 τότε υπάρχει $x_0\in(-1,1)$ ώστε $f(x_0)=\pi$
Σ ή Λ

5. Αν η f είναι ↘ στο διάστημα (α,β) τότε το σύνολο τιμών της είναι το f(A)=(f(β),f(α))
Σ ή Λ

6. Αν το $\lim\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^3-x}$ δεν υπάρχει τότε $x_0=1$. Σ ή Λ

7. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ=[0,3] και f(0)=2 και f(3)=-1 τότε υπάρχει $x_0\in(0,3)$ ώστε $f(x_0)=0$. Σ ή Λ

8. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο [α,β] με f(α)=g(α) και f(β)=g(β) τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_0)=g'(x_0)$. Σ ή Λ

9. Αν η f παραγωγίσιμη στο [α,β] και είναι f(β)<f(α) τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_0)<0$.
Σ ή Λ

10. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, α, β, γ, $\delta\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής. Σ ή Λ

11. Αν $f'(x_0)=0$ τότε η f στο x_0 παρουσιάζει ακρότατο. Σ ή Λ

12. Το όρισμα του μιγαδικού z=κ – κi, κ>0 είναι 135^o. Σ ή Λ

(2 μονάδες η κάθε ερώτηση)

ΘΕΜΑ 2^O

Α. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\eta\mu x)=e^x\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο $x_0=0$.

(Μονάδες 9)

Β. Να αποδείξετε ότι η παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει :
$2f^3(x)+6f(x)=2x^3+6x+1$ δεν έχει ακρότατα ενώ αν για την f ισχύει $f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0$ δεν έχει σημεία καμπής.

(Μονάδες 16)

ΘΕΜΑ $3^{Ο}$

A. Να αποδείξετε ότι υπάρχει 1 τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ ώστε $f(\xi)=g(\xi)$ αν γνωρίζετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο [0,1] και $f(0)<g(0)$, $f(1)>g(1)$.

(Μονάδες 12)

B. Αν f συνάρτηση συνεχής στο $x_0=0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $|x \cdot g(x) - ημx| \leq x^2$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ $4^{Ο}$

A. Να δείξετε ότι $e^x \geq e \cdot x + 1$ για κάθε $x \in (0,1)$.

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-1$

Ζητούνται:

1). Να δείξετε ότι είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

2). $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

3). $f'(x)+f''(x) \geq f'''(x)$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
2001 - ΟΡΟΣΗΜΟ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$$

ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ

Δ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Δ1. ΝΑ ΒΡΕΘΟΥΝ ΟΙ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕ ΤΟΥΣ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΤΥΠΟΥΣ.

1. f(x) = $\frac{4}{\sqrt[3]{x}}$ Απ. F(x) = $6\sqrt[3]{x^2}+c$

2. f(x) = $e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x$ Απ. F(x) = $e^x \cdot \eta\mu x + c$

3. f(x) = $4(3x^2+1)(x^3+x+1)^3$ Απ. F(x) = $(x^3+x+1)^4+c$

4. f(x) = $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}$ Απ. F(x) = $\sqrt{x^2+4x+8}+c$

5. f(x) = $(\alpha x^\mu+\beta)^\nu \cdot x^{\mu-1}$ Απ. F(x) = $\frac{(\alpha x^\mu+\beta)^{\nu+1}}{\alpha\mu\cdot(\nu+1)}+c$

6. f(x) = $\frac{\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$ Απ. F(x) = $\frac{x}{\eta\mu x}+c$

7. f(x) = $x^{\mu+3}$, $\mu\in\mathbb{R}$ Απ. F(x) = $\begin{cases} \frac{x^{\mu+4}}{\mu+4}+c_1 & \alpha\nu \quad \mu\neq -4 \\ \ln|x|+c_2 & \alpha\nu \quad \mu=-4 \end{cases}$

8. f(x) = $\frac{5}{x^{\mu-2}}$, $\mu\in\mathbb{R}$ Απ. F(x) = $\begin{cases} \frac{5\cdot x^{3-\mu}}{3-\mu} & \alpha\nu \quad \mu\neq 3 \\ 5\ln|x| & \alpha\nu \quad \mu=3 \end{cases}$

9. f(x) = $\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}$ Απ. F(x) = $\frac{1}{2}\varepsilon\phi^2 x+c$

10. f(x) = $\frac{1}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}$ Απ. F(x) = $\ell n\,|\eta\mu x| - \ell n\,|\sigma\upsilon\nu x|+c$

11. $f(x)=\frac{x\cdot e^x-e^x}{x^2}$ Απ. F(x) = $\frac{e^x}{x}+c$

12. $f(x)=\frac{\eta\mu x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}$ Απ. F(x) = $-2\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}+c$

13. $f(x)=\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu x$ — Απ. F(x) = $\frac{1}{3}\cdot\eta\mu^3 x$+c

14. $f(x)=\eta\mu\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)$ — Απ. F(x) = $-\frac{1}{5}\sigma\upsilon\nu\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)$+c

15. $f(x)=\frac{1-\ell nx}{x^2}$ — Απ. F(x) = $\frac{\ell nx}{x}$+c

16. $f(x)=\frac{x\cdot\sigma\upsilon\nu\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}$ $\mu\varepsilon$ $|x|>2$ — Απ. F(x) = ημ$\sqrt{x^2-4}$+c

17. $f(x)=x^3+\eta\mu x+\sigma\upsilon x$ — Απ. F(x) = $\frac{x^4}{4}$-συνx+ ημx+c

18. $f(x)=3x\cdot\sqrt{x}$ — Απ. F(x) = $\frac{6}{5}\cdot x^2\cdot\sqrt{x}$+c

19. $f(x)=\frac{x^3+3x^2+5x+1}{x}$, x>0 — Απ. F(x) = $\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}$+5x+$\ell$nx+c

20. $f(x)=2e^x-\frac{3}{x}+\eta\mu 2x$, x>0 — Απ. F(x) = 2e^x-3ℓnx-$\frac{1}{2}$συν2x+c

21. $f(x)=\frac{x^3+27}{x+3}$ — Απ. F(x) = $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}$+9x+c

22. $f(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$ — Απ. F(x) = εφx+σφx+c

23. $f(x)=\frac{x+5}{x+1}$ — Απ. F(x) = x+4ℓn(x+1)+c

24. $f(x)=e^x\sigma\upsilon\nu e^x$ — Απ. F(x) = ημe^x+c

25. $f(x)=\frac{e^x}{e^x+5}$ — Απ. F(x) = ℓn(e^x+5)+c

26. $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ell nx}}$, x>1 — Απ. F(x) = 2·$\sqrt{\ell nx}$+c

27. $f(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)\ell n(e^x+1)}$ — Απ. F(x) = ℓn(ℓn(e^x+1))+c

28. $f(x)=\dfrac{\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x^2}$ Απ. F(x) =+συν$\left(\dfrac{1}{x}\right)$+c

29. $f(x)=\dfrac{\eta\mu 2x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}$ Απ. F(x) = - ℓn(1+συν^{2}x)+c

30. $f(x)=\varepsilon\varphi x\cdot \ell n$ (συνx), συνx>0 Απ. F(x) = $-\frac{1}{2}$ ℓn^2(συνx)+c

31. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ $e^{\eta\mu x}$ Απ. F(x) = $e^{\eta\mu x}$+c

32. $f(x)=\varepsilon\varphi x$, συνx>0 Απ. F(x) = -ℓn(συνx)+c

33. $f(x)=\eta\mu^2 x$, Απ. F(x) = $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\eta\mu 2x}{4}$+c

34. $f(x)=f'(x)$ Απ. F(x) = f(x)+c

$Δ_2$. ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΟΥΝ ΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ:

1. $\int_0^{\Pi/3}\eta\mu^3 x dx$ Απ. $\dfrac{5}{24}$

2. $\int_{\Pi/4}^{\Pi/2}\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$ dx Απ. $\sqrt{2}$

3. $\int_{\Pi/3}^{\Pi/2}\dfrac{dx}{\eta\mu x}$ Απ. $\ell n\sqrt{3}$

4. $\int_0^1 e^x\cdot e^{e^x}dx$ Απ. e^e-e

5. $\int_1^2\dfrac{x^3-5x^2+1}{x}$ dx Απ. ℓn2-$\dfrac{31}{6}$

6. $\int_1^3\dfrac{2x^5-5x^3+3x^2-7x+4}{x^3}$ dx Απ. $\dfrac{40}{9}$+3ℓn3

7. $\int_1^9(\sqrt{x}-\dfrac{3}{\sqrt{x}})$ dx Απ. $\dfrac{16}{3}$

8. $\int_1^1 x\cdot(3x^2-1)^2$ dx Απ. 0

9. $\int_0^{\Pi/2}$ (ημx+xσυνx)dx Απ. $\frac{\pi}{2}$

10. $\int_0^{\Pi}(3x^2\sigma\upsilon\nu x - x^3\eta\mu x)$ dx Απ. $-\pi^3$

11. $\int_0^{\Pi}\frac{\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ dx Απ. $-\pi$

12. $\int_{-1}^{0} e^{-3x+2}dx$ Απ. $-\frac{1}{3}(e^2-e^5)$

13. $\int_0^{\Pi/4}\eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu x dx$ Απ. $\frac{1}{16}$

14. $\int_{-1}^{1}(2x+3)(x^2+3x+4)^2$ dx Απ. 168

15. $\int_0^{\Pi/2}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{\eta\mu x}}$ dx Απ. 2

16. $\int_0^1\frac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x+4}}$ dx Απ. 1

17. $\int_0^1\frac{xdx}{x^2+1}$ Απ. $\frac{1}{2}\ell n\,2$

18. $\int_3^5\frac{dx}{x-2}$ Απ. $\ell n\,3$

19. $\int_{\Pi/6}^{\Pi/3}\eta\mu 3x$ dx Απ. $\frac{1}{3}$

20. $\int_{\Pi/6}^{\Pi/2}(4\sigma\upsilon\nu 3x+5\eta\mu 2x)$ dx Απ. $\frac{13}{12}$

21. $\int_0^{\Pi/2}\sigma\upsilon\nu^2 x dx$ Απ. $\frac{\pi}{4}$

22. $\int_4^6\frac{2x^2-5x+7}{x-3}dx$ Απ. 22+10 $\ell n3$

23. $\int_0^1\left(5^x+3^x\right)dx$ Απ. $\frac{4}{\ell n5}+\frac{2}{\ell n3}$

24. $\int_0^e \frac{x+2}{x+1}dx$ Απ. e+ℓn(e+1)

25. $\int_1^e \frac{\eta\mu(\ell n x)}{x}dx$ Απ. 1-συν1

26. $\int_0^{\Pi/6} \varepsilon\phi x dx$ Απ. - $\ell n\frac{\sqrt{3}}{2}$

27. $\int_{\Pi/4}^{\Pi/3} \frac{1+\varepsilon\phi^2 x}{\varepsilon\phi x}dx$ Απ. $\ell n\sqrt{3}$

28. $\int_3^4 \frac{x\cdot\sigma\upsilon\nu\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}dx$ Απ. ημ2$\sqrt{3}$-ημ$\sqrt{5}$

29. $\int_{\Pi/4}^{\Pi/3} \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu x}dx$ Απ. $\ell n\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}$

30. $\int_0^{\Pi} \frac{3^x\ell n3-\eta\mu x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x+3^x}}dx$ Απ. $2\left(\sqrt{3^{\Pi}-1}-\sqrt{2}\right)$

31. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1\frac{dx}{1+e^x}$ και κατόπιν το $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$.

Απ. 1+ℓn2-ℓn(e+1) και ℓn(ε+1)- ℓn2-$\frac{1}{2}$.

Δ3.

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

1. $\int \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x e^{\eta\mu x}dx$ Απ.

2. $\int_0^1 x\ell n(9+x^2)dx$ Απ. 5 $\ell\text{n}10-\frac{9}{2}\ell\text{n}9-\frac{1}{2}$

3. $\int_0^1 x\cdot e^{-x}dx$ Απ. $\frac{e-2}{e}$

4. $\int_0^{\Pi/4} \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$ Απ. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ell\text{n}2$

5. $\int_{\frac{\Pi}{4}}^{\Pi} \eta\mu 3x\cdot\sigma\upsilon\nu x dx$ Απ. - $\frac{1}{2}$

6. $\int_0^{\Pi/2} x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x dx$ Απ. $\frac{\pi^2-4}{16}$

7. $\int_0^{\Pi} e^x \sigma\upsilon\nu x dx$ Απ. $-\frac{e^{\Pi}+1}{2}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1991

8. $\int_{\frac{\Pi}{2}}^{\Pi} x\eta\mu x dx$ Απ. π-1

9. $\int_{\frac{\Pi}{4}}^{\Pi/2} x\sigma\upsilon\nu 2x dx$ Απ. $-\frac{\pi+2}{8}$

10. $\int_0^{\Pi/2} x^2\cdot\sigma\upsilon\nu x dx$ Απ. $\frac{\pi^2}{4}-2$

11. $\int_0^1 xe^x dx$ Απ. 1

12. $\int_{-1}^1 x^2 e^x dx$ Απ. $\frac{e^2-5}{e}$

13. $\int_e^{e^2} \ell n x dx$ Απ. e^2

14. $\int_1^2 x\ell n 4x dx$ Απ. $5\ell n2-\frac{3}{4}$

15. $\int_1^2 x^2 \ell n x dx$ Απ. $\frac{8}{3}\ell n2-\frac{7}{9}$

16. $\int_0^{\Pi/2} e^{2x}\cdot\eta\mu x dx$ Απ. $\frac{1+2e^{\Pi}}{5}$

17. $\int_{-1}^1 \left(\sqrt{x^2}+1\right)dx$ Απ. 3

18. $\int_0^2 \left(\sqrt{x^2-2x+1}\right)dx$ Απ. 1

19. $\int_4^7 \frac{dx}{x^2-5x+6}$ Απ. $\ell n\frac{8}{5}$

20. $\int_0^2 f(x)dx \ \mu\varepsilon f(x)=\begin{cases} 2x^2-1 & \alpha\nu \ \ x\le 1 \\ 5-4x & \alpha\nu \ \ x\ge 1 \end{cases}$ Απ. $-\frac{4}{3}$

21. $\int_0^e f(x)dx \ \mu\varepsilon f(x)=\begin{cases} e^x-e & \alpha\nu \ \ x<1 \\ \frac{\sqrt{\ell nx}}{x} & \alpha\nu \ \ x\ge 1 \end{cases}$ Απ. $-\frac{1}{3}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1991

22. $\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+3x-2}dx$ Απ. $\frac{7}{5}\ell n4-\frac{4}{5}\ell n3$

23. $\int_2^3 \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}dx$ Απ. $\ell n\frac{27}{16}+1$

24. $\int \frac{x^3+6x^2+3x+6}{x^3+2x^2}dx$ Απ. x-$\frac{3}{x}$+4·ℓn|x+2|+c

Δ4. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_{-2}^{\Pi} f(x)dx$ όπου $f(x)=\begin{cases} 3\alpha e^{x+1}+x, & \alpha\nu \ \ x\le -1 \\ 2x^2-\alpha x+3\beta, & \alpha\nu \ \ -1<x<0 \\ \beta\eta\mu x+\alpha\sigma\upsilon\nu x+1, & \alpha\nu \ \ 0\le x \end{cases}$

Απ.
i) $\alpha=4,\ \ \beta=\frac{5}{3}$
ii) $\int_{-2}^{\pi} f(x)dx=\pi-\frac{12}{e}+\frac{43}{2}$.

2. $\int_{-\Pi}^{\Pi} g(x)dx$ όπου $g(x)=\begin{cases} -2\eta\mu x, & \alpha\nu \ \ x\le -\frac{\pi}{2} \\ \alpha\eta\mu x+\beta, & \alpha\nu \ \ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu x, & \alpha\nu \ \ \frac{\pi}{2}\le x \end{cases}$

Απ. i) α=-1, β=1 ii) $\int_{-\Pi}^{\Pi} g(x)dx=1+\pi$.

Δ5.

1. Αν $I_\nu=\int_0^{\Pi/4} \varepsilon\phi^\nu x dx,\ \nu\in\mathbb{Z}^*$ τότε δείξτε ότι $I_\nu=\frac{1}{\nu-1}-I_{\nu-2}$ και κατόπιν υπολογίστε το I_5 (ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1991) (Απ.I_5=-$\frac{1}{4}-\ell n\frac{\sqrt{2}}{2}$)

2. Αν $I_\nu=\int_1^e \ell n^\nu x dx$ δείξτε ότι: $I_\nu=e-\nu\cdot I_{\nu-1}$ και κατόπιν υπολογίστε το I_3, $\nu\in\mathbb{Z}^*$.
(Απ. $I_3=-2e+6$)

3. Αν $I_\nu=\int_0^{\Pi/2} \eta\mu^\nu x dx$ τότε δείξτε ότι $I_\nu=\frac{\nu-1}{\nu}I_{\nu-2}$ και κατόπιν υπολογίστε τα ολοκληρώματα I_3 και I_4, $\nu\geq 2$, $\nu\in\mathbb{Z}^*$.

4. Αν $I_\nu=\int_0^{\Pi/2} \sigma\upsilon\nu^\nu x dx,\ \nu\in\mathbb{Z}^*$ βρείτε τη σχέση που συνδέει το I_ν με το $I_{\nu-2}$, $\nu>2$ και κατόπιν υπολογίστε το I_2.

5. Αν $I_\nu=\int_0^1 3^\chi\cdot x^\nu dx,\ \nu\in\mathbb{Z}^*$ βρείτε τη σχέση που συνδέει το I_ν με το $I_{\nu-1}$ και κατόπιν υπολογίστε το I_2.

6. Αν $I_\nu=\int_{\Pi/4}^{\Pi/2} \sigma\phi^\nu x dx,\ \nu\in\mathbb{Z}^*$ τότε δείξτε ότι: $I_\nu=\frac{1}{\nu-1}-I_{\nu-2},\quad \nu>2$ και κατόπιν υπολογίστε το I_5. (Απ. $I_5=-\frac{1}{4}+\ell n\sqrt{2}$).

Δ6. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [1, e] με f΄΄ συνεχή στο [1, e] και f(1)=f(e). Δείξτε ότι: $\int_1^e xf''(x)dx=e\cdot f'(e)-f'(1)$.

Δ7. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ με f΄΄ συνεχή στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$. Αν $I=\int_0^{\Pi/2}[f(x)+f''(x)]\sigma\upsilon\nu x]dx=1$ δείξτε ότι: f΄(0)=1.

Δ8.
Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι:

1. $\int_{a+t}^{\beta+t} f(x-t)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx$

2. $\frac{1}{x}\int_{ax}^{\beta x} f\left(\frac{t}{x}\right)dt=\int_\alpha^\beta f(x)dx$

Δ9.
Να δείξετε ότι:

1. $\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 f(x)dx$

2. Αν $\int_{2001}^{2004} f(x)dx = 2005$ να δείξετε $\int_{2001x}^{2004x} f(\frac{t}{x})dt$ =X·2005

3. Αν $\int_1^2 f(x)dx = 2005$ τότε $\int_{1+t}^{2+t} f(x-t)dx = 2005$

4. $\int_0^1 x^\alpha \cdot (1-x)^\beta dx = \int_0^1 x^\beta (1-x)^a dx$

Δ10. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων.

1. g(x)=$\int_\alpha^x xtdt$

2. h(t)= $\int_1^t t^2 e^x dx$

3. G(x)=$\int_1^2$ F(xt)dt+$\int_1^x (x-t)$ F(t)dt

Δ11. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης F : [-1, 3]→$\mathbb{R}$ με F(x)=$\int_{x+1}^{x^2-1} e^{t^2+1}dt$.

Απ. F΄(x)=-$e^{(x+1)^2+1} + 2xe^{(x^2-1)^2+1}$.

Δ12. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις:

α) $f(x) = \int_x^{x+1} e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi t} dt$ και

β) $g(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$ είναι σταθερές.

Δ13. Αν F(x)=$\int_1^x f(t)dt$ και κατόπιν f(t)=$\int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u} du$ να βρείτε το F΄΄(2).

Δ14. Δίνεται η συνάρτηση f: (0, +∞)→$\mathbb{R}$ με f(x)=1+x+$\int_1^x \left(\ell n^2 t + 2\ell nt\right)dt$. Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών αυτής.

Δ15. Δείξτε ότι: $\lim_{x\to 0^+} \int_0^{x^2} \eta\mu\sqrt{t}dt$ =0 και κατόπιν υπολογίστε το $\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \eta\mu\sqrt{t}dt}{x^3}$ Απ. $\frac{2}{3}$

Δ16. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει f(x)=$\int_0^x e^{t-f(t)}dt,$ για κάθε x$\in\mathbb{R}$.

Δ17. Δίνεται η $f(x)=x+1+\frac{1}{x+1}$. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της συνάρτησης f, του άξονα Ox, και τις ευθείες με εξισώσεις x=2, x=5. Απ. $\frac{27}{2}+\ell n2$ τ.μ.

Δ18. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της f με $f(x)=-x^2+5x-6$ τον άξονα x΄x, τον άξονα ψ΄ψ και την ευθεία με εξίσωση x=4. Απ. $E=\frac{17}{3}$ τ.μ.

Δ19. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα x΄x και τη γραφική παράσταση C της f με $f(x)=x^3+x^2-6x$

Απ. $E=\frac{253}{12}$ τ.μ.

Δ20. Δίνονται οι συναρτήσεις f με $f(x)=x^2-4x$ και g με $g(x)=-x$. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις C_f, C_g και:

1. τις ευθείες με εξισώσεις x=-2 και x=-1
2. τις ευθείες με εξισώσεις x=1 και x=2
3. τις ευθείες με εξισώσεις x=-1 και x=4
4. μόνο από τις γραφικές παραστάσεις C_f, C_g.

Απ. 1)$E=\frac{41}{6}$ τ.μ.2)$E=\frac{13}{6}$ τ.μ.3)$E=\frac{49}{6}$ τ.μ.4)$E=\frac{9}{2}$ τ.μ.

Δ21. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f με $f(x)=x^3-x^2-6x$ και g με $g(x)=3x-x^2$

Απ. $E=\frac{81}{2}$ τ.μ.

Δ22. Δίνεται η συν/ση $f(x)=ημ(2x+\frac{\pi}{2})$ και πεδίο ορισμού $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την εφαπτομένη της f στο $x_0=\frac{\pi}{8}$ τη γραφική παράσταση της f και τους θετικούς ημιάξονες.

Πανελλήνιες εξετάσεις

Δ23. Δίνεται η παραβολή: C_1:f(x)=x^2 και η υπερβολή c_2: g(x)=$\frac{1}{x}$ Να υπολογίσετε:

1) Το Ε του χωρίου που περικλείεται από τα διαγράμματα C_1,C_2 την ευθεία x=2 και τον ημιάξονα Οx.

2)Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:Ι=$\int_1^{\lambda}$ |f(x)-g(x)|dx, **λ**>0

3) Να βρεθεί $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}$ Ι(λ).

Απ. 1)$\frac{1}{3}+\ell n2$τ.μ.2)αν $\lambda\geq1$ είναι $-\ell n\lambda+\frac{1}{3}(\lambda^3-1)$ αν 0<λ<1 είναι $\ell n\lambda-\frac{1}{3}(\lambda^3-1)$ 3) $+\infty$

Δ24. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περιορίζεται από το διάγραμμα της f:f(x)=$3x^2$ και: ί)τις ευθείες x=-2 και x=-1 ίί) Τις ευθείες y=2 και y=3 το διάγραμμα της f και τον άξονα yy΄.

Απ. ί) 7τ.μ. ίί) 2-$\frac{4\sqrt{6}}{9}$ τ.μ.

Δ25. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περιορίζεται από το διάγραμμα της παραβολής $y^2=4x$, y>0 την εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο ($\frac{1}{2},\sqrt{2}$),

και τις ευθείες με εξισώσεις x=$\frac{1}{2}$, x=γ όπου Ε(γ,0) η εστία της παραβολής .

Απ. 0,375τ.μ.

Δ26. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περιορίζεται από τις γραμμές με εξισώσεις f(x)=$\int_{-1}^{0}e^{x+1}dx+1-e+x^3$ και g(x)=$\int_0^x(3t^2+2t-1)dt-2$

Απ. $\frac{9}{2}$ τ.μ.

Δ27. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=3x+$\frac{1}{2x^2}$. Ζητούνται:

α) Να βρείτε το εμβαδό Ε(α) του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της ευθείας με εξίσωση y=3x και των ευθειών x=1 και x=α με α>1. β) Να βρείτε το $\lim\limits_{a\to+\infty}$ Ε(α).

Απ. α) $-\frac{1}{2a}+\frac{1}{2}$ β) $\frac{1}{2}$

Πανελλήνιες εξετάσεις

Δ28. Δίνεται η συν/ση f με τύπο f(x)=κx^3-λx^2, κ,λ$\in\mathbb{R}$

ί) Να βρείτε τα κ και λ ώστε το σημείο Σ(1,-2) να είναι σημείο καμπής της f.

ίί) Για τις τιμές των κ και λ που βρήκατε να δείξετε ότι η συν/ση που προκύπτει τοπ. ακρότατα και σημείο καμπής συνευθειακά σημεία. ίίί) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του διαγράμματος της f και της ευθείας που ενώνει το σημείο καμπής και τα τοπικά ακρότατα.

Απ. ί) ίίί)

Δ29. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=$\sqrt{1-\sqrt{x-2}}$. Να ορίσετε την αντίστροφή της και κατόπιν υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα xx΄, τις ευθείες x=0, x=1 και το διάγραμμα της f^{-1}.

Απ. $\frac{38}{15}$ τ.μ. εμβαδού

Δ30. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περιορίζεται από το διάγραμμα της f:f(x)=-x^2-2x+3, την εφαπτομένη της f στο σημείο Α(2,-5) και τον άξονα yy΄.

Απ. $\frac{8}{3}$ τ.μ.

Δ31. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περιορίζεται από τις ευθείες x=o, x=$\frac{\pi}{2}$ και τις γραμμές f(x)=ημx και g(x)=συνx.

Απ. $2\sqrt{2}$ -2τ.μ.

Δ32. α)Αν η f είναι περιττή στο [-α,α] και συνεχής τότε $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

β)Αν η f είναι άρτια και συνεχής στο [-α,α] τότε $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

Δ33. Αν Ε το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f(x)= e^x, τις ευθείες x=0, x=1 και τον άξονα xx΄, να βρείτε το λ$\in\mathbb{R}$ ώστε η ευθεία x=λ να χωρίζει το Ε σε δύο ισοεμβαδικά χωρία.

Δ34. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f με f΄(x)=$\frac{2x-1}{e^x}$ και f(0)=-1.

Να υπολογίζετε τι εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με g(x)=$\frac{f(x)}{2x+1}$ τον άξονα yy΄ και την ευθεία x=1.

Δ35. Αν Ε το χωρίο που περικλείεται από το διάγραμμα της f με τύπο f(x)=$\frac{1}{x^2}$, τις ευθείες x=1, x=3 και τον xx΄. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία y=α να χωρίζει το Ε σε δύο ισο-εμβαδικά χωρία.

Δ36. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=$\sqrt{x}$, την εφαπτομένη της στο x_0=1 και τον άξονα xx΄. Κατόπιν βρείτε την ευθεία x= α, η οποία χωρίζει το χωρίο αυτό σε δύο ισοεμβαδικά χωρία.

Δ37. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

1. $\int \frac{dx}{x^2+3x+2}$
2. $\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{(\eta\mu x+1)(\eta\mu x+2)}dx$
3. $\int \frac{e^x}{(e^x+1)(e^x+2)}dx$

Δ38. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x\int_0^t e^u du dt}{\int_0^x\int_0^t 2u du dt}$ Απ. +∞

Δ39. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{1+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}e^x dx$ Απ. $e^{\frac{\Pi}{2}}$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ.

Δ1. Δίνεται η εκθετική συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\alpha^x$, $\alpha \neq 1$, $\alpha>0$.

1. Να βρείτε το α ώστε η διχοτόμος της πρώτης γωνίας των αξόνων να εφάπτεται στο διάγραμμα της f στο σημείο $M(x_0,y_0)$.
2. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα ψψ΄ και την διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων.
3. Αν το σημείο Ο κινείται στον θετικό ημιάξονα Οx με ταχύτητα u=1m/sec, η εφαπτομένη της f στο σημείο Μ κινείται γύρω από το Μ ακολουθώντας το σημείο Ο, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ=ΟΜΝ ως προς το χρόνο, η χρονική στιγμή t_o κατά την οποία το ΟΝ=1m.

Δ2 . Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής με συνεχή παράγωγο στο διάστημα [α,β] η οποία αντιστρέφεται. Να δείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx$$

Δ3. Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις

ε_1:(2ημθ)x+(συνθ)ψ=4

ε_2:(2συνθ)x+(ημθ)ψ=4ημ2θ, $\theta \in [0,\pi)$.

1. Να βρείτε τη θέση των ευθειών για τις διάφορες τιμές του $\theta \in [0,\pi)$.
2. Να δείξετε ότι όταν οι ευθείες τέμνονται, το σημείο τομής τους κινείται σε έλλειψη.
3. Βρείτε το σημείο της έλλειψης που έχει την μεγαλύτερη απόσταση από την ευθεία ε:2x+ψ=0.

Δ4. Να δείξετε ότι: $\int_0^\Pi x f(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\Pi f(\eta\mu x)dx$ και κατόπιν να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\Pi \frac{x\,\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}dx$ Απ. $\frac{\pi}{4}\ell n3$

Δ5. 1.Δείξτε ότι αν μία παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι περιττή τότε η παράγωγός της είναι άρτια συνάρτηση.

2.Έστω περιττή συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο συνεχή. Η εφαπτομένη της f στο σημείο Α(2,3) σχηματίζει με τον άξονα xx' γωνία 45^o. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I=$\int_{-2}^{2} f''(x)(x^2+x+1)dx$.

Δ6. Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α,β]. Αν f(x)< g(x) για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ και f(α)=g(α) και f(β)=g(β) να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ευθεία $x=x_0$ με $x_0\in(\alpha,\beta)$ η οποία να χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Δ7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο f(x)= $\frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}$

1. Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I_1=\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

3. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από το διάγραμμα της f^{-1}, τις ευθείες x=-1 και x=1 και τον άξονα xx΄.

Δ8. Να βρεθεί η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $\Delta=(-1,+\infty)$ για την οποία ισχύει $f''(x)=2005e^x+\frac{2001}{(x+1)^2}$ και η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο Α(0,50) είναι -1.

Δ9. α) Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει f΄΄(x)-f΄(x)<f΄(x)-f(x), να δείξετε ότι η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=f(x)e^{-x}$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\mathbb{R}$.

β) Αν για την συνεχής συνάρτηση f ισχύει $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2005}$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\xi^{2004}$.

Δ10. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

1. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ αν γνωρίζετε ότι $\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x (e^{\lambda-f(t)})dt}{x^x-1}=e^{\lambda^2+1}$ και ότι το διάγραμμα της f διέρχεται από το σημείο Α(1,3λ).

2. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της συνάρτησης $F(x)=\int_1^x (e^{\lambda-f(t)})dt$ στο $x_0=1$.

Δ11. Έστω η συνεχής συνάρτηση: f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε f(1)=1. Αν για κάθε x$\in \mathbb{R}$,

ισχύει g(x)=$\int_1^{x^3} |z| f(t)dt - 3|z+\frac{1}{z}|(x-1) \geq 0$, όπου z=α+βί$\in$C, με α,β$\in \mathbb{R}^*$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τη g΄.

β. Να αποδείξετε ότι $|z|=|z+\frac{1}{z}|$

γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος β να αποδείξετε ότι $Re(z^2)=-\frac{1}{2}$

δ. Αν επιπλέον f(2)=α>0, f(3)=β και α>β, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2004

Δ12. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη και f΄ συνεχής στο $\mathbb{R}^*$, και η συνάρτηση g συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ και G(x)=$\int_1^2 f'(xt)dt + \int_1^{x^2+x-1} (xt)g(t)dt + e^{x-1} + \ell ne$, x$\in \mathbb{R}^*$.

Αν G(x)$\geq$G(1) για κάθε x$\in \mathbb{R}^*$, να δείξετε ότι 2f΄(2)-f΄(1)=f(2)-f(1)-3g(1)-1.

Δ13. Έστω f και g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση h(x)=$\int_1^x xf(t)dt - \int_0^{x^2-1} g(t)dt - x^2 - x + 1$ για την οποία ισχύει h(x)$\geq$h(1) για κάθε x$\in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

1. f(1) = 2g(0)+3
2. Η εξίσωση xf(x)-1 = 2xg(ημπx) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).
3. Αν η ρίζα της εξίσωσης του $2^{ου}$ ερωτήματος είναι η x=1/2 και f, g παραγωγίσιμες τότε να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 1)$ ώστε $f'(x_1)+4g'(x_2)=2$.

Δ14. Έστω μία πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i) f(x)$\neq$0, για κάθε x$\in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = 1-2x^2 \int_0^1 tf^2(xt)dt$, για κάθε x$\in \mathbb{R}$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο g(x)=$\dfrac{1}{f(x)}-x^2$, για κάθε x$\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2x f^2(x)$.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: f(x)=$\dfrac{1}{1+x^2}$.

δ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)\eta\mu 2x\right)$.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2001

Δ15. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και f(x)$\geq$2 για κάθε x$\in\mathbb{R}$. Επίσης η g(x)=x^2-5x+1-$\int_0^{x^2-5x} f(t)dt,\ x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση g(x)=0 έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα (-3, 0).

Δ16. Α. Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $\int_0^3 f(2x+1)dx = \dfrac{1}{2}\int_1^7 f(x)dx$.

β. Έστω ότι $4\int_0^3 f(2x+1)dx = \int_1^7 f(x)dx + 2004$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ$\in$(1,7) τέτοιο, ώστε f(ξ)=334.

Β. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί την ισότητα:

$$\int_0^x (1+t^2)f(t)\ dt = x^2 + \int_0^1 6x(t^2+t)dt,\ x\in\mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι f(x)=$\dfrac{2x+5}{x^2+1}$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Α(0,f(0)).

Δ17. Δίνεται η συνάρτηση g (x) = $\int_1^x \dfrac{1}{\sqrt{|z|+t^2}}dt$ όπου z= α + β i, α, β$\in\mathbb{R}^*$

1. Η μονοτονία της g και πρόσημο της g.

2. Όταν g (x)$\leq\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{2}}-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε $|z|=1$

3. Να βρείτε το Ε χωρίου που περικλείεται από το διάγραμμα της g, xx΄, yy΄ και την ευθεία x=1.

Απ. 1) g γνησίως αύξουσα και g(x)>0 για x>1 και g(x)<0 για x<1
3) $E=\sqrt{|z\ |+1}-\sqrt{|z\ |}$ τ.μ.

Δ18. Αν η f συνεχής στο [0,1] και $\int_0^1 f(x)dx = p(1)$ όπου p(x) πολυώνυμο με p(0)=0.

Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(0,1) ώστε f(ξ)=p΄(ξ).

Δ19. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο f(x)= e^x, x∈ℝ να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=\int_1^x f(t^2)dt$ για τους άξονες x΄x και y'y και την ευθεία με εξίσωση x = 1.

Δ20. Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\int_0^{x^3} f(t)dt+\int_0^{-x^3-1} f(t)dt$ όπου η f είναι παραγωγίσιμη και ορισμένη στο ℝ -{-1}.
Να βρείτε :
1) Το σύνολο ορισμού της συνάρτησης g.
2) Την παράγωγο της g.
3) Αν στο $x_0=-\frac{1}{2}$ η g παρουσιάζει τοπικό ακρότατο να δείξετε ότι $f\left(-\frac{1}{8}\right)=f\left(-\frac{7}{8}\right)$.
4) Υπάρχει σημείο ξ∈(-1, 0) ώστε η εφαπτομένη της f να είναι παράλληλη προς xx΄ όπως υπάρχει και x_0∈(-1, 0) ώστε εφαπτόμενη της g να είναι παράλληλη προς xx΄αλλά δεν είναι δυνατόν ποτέ x_0=ξ.

Δ21. Αν f και g συνεχείς στο [1, 2] να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(1, 2) ώστε $f(\xi)\int_2^{\xi} g(t)dt+g(\xi)\int_1^{\xi} f(t)dt=0$

Δ22. Έστω F μία αρχική συνάρτηση της συνάρτησης f που είναι ορισμένη στο ℝ και ισχύει
$$\int_0^1 f(x)dx = f(0) = f(1)$$
Ζητούνται:
1. Αν η f είναι πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού να βρεθεί ο τύπος της αν f΄(1)=1.
2. Να δείξετε ότι η f έχει 2 τοπικό ακρότατο στο (0, 1)
3. Να δείξετε ότι η εξίσωση f΄(x)=0 έχει 2 τουλάχιστον ρίζες στο (0, 1).

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΟΛΗ ΤΗΝ ΥΛΗ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Νο 1

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και f΄(x)>0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

(Μονάδες 15)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο x_0 έναν πραγματικό αριθμό ℓ τότε αναγκαστικά το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 2)

β) Κάθε συνάρτηση f ορισμένη σε κλειστό διάστημα [α,β] παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή

(Μονάδες 2)

γ) Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ και $\alpha \in \Delta$ τότε $\left(\int_{a}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))$.

(Μονάδες 2)

δ) Αν η συνάρτηση f είναι 1-1, τότε $f(f^{-1}(x))=x$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο τιμών της f.

(Μονάδες 2)

ε) Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $z\bar{z} = z^2$.

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-e^{2x}+1}{\eta\mu 2x}=5$$

α) Να βρείτε το f(0).

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o=0$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν $h(x)=e^{-x}f(x)$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h στα σημεία $A(0,\ f(0))$ και $B(0,\ h(0))$ αντίστοιχα, είναι παράλληλες.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 $\nu \in N^*$ με ν>1 για τους οποίους ισχύει $z_1^\nu = 2+i$ και $z_2^\nu = 1+2i$.

Ζητάμε να δείξετε ότι:

1) Ο μιγαδικός $w = \frac{z_1}{z_2}$ δεν είναι πραγματικός.

(Μονάδες 7)

2) Ο αριθμός $u = \frac{w+1}{w-1} \in \mathrm{I}$

(Μονάδες 7)

3) Η ελάχιστη τιμή της παράστασης $f(z) = |z+w| + |z-w|$ είναι δύο.

(Μονάδες 8)

4) Το ολοκλήρωμα $\int_0^e |z_1|^\nu \cdot |z_2|^\nu \cdot |w| dx = 5e$

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Αν $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει f(x)=2004(x-1)+$\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt$ για κάθε x>0.

α) Να δείξετε f(x)=2004$x \ln x$. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι το εμβαδό Ε του χωρίου μεταξύ της C_f, του άξονα xx΄ και της ευθείας $x=e$ είναι 501$\left(e^2+1\right)$ τ.μ.

(Μονάδες 10)

Β. Έστω συνεχής συνάρτηση f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \int_x^1 (\int_0^u f(t)\,dt)\,du$.

Να δείξετε ότι f ΄΄ (1)=0.

(Μονάδες 5)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Νο 2

ΘΕΜΑ 1^o

Α. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο Δ και είναι f΄(x)>0 για κάθε x, εσωτερικό του Δ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

(Μονάδες 10)

Β. Γράψτε τον ορισμό της συνεχούς συνάρτησης στο σημείο $x_0 \in A$, Α το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 5)

Γ. Απαντήστε αν είναι Σωστές ή Λάθος οι παρακάτω ερωτήσεις:

1. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια δεν αντιστρέφεται. Σ ή Λ

2. Στο τοπικό ακρότατο η μονοτονία αλλάζει. Σ ή Λ

3. Το μέτρο του αθροίσματος δύο μιγαδικών ισούται με το άθροισμα των μέτρων τους. Σ ή Λ

4. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών ισούται με το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους. Σ ή Λ

5. $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\gamma^\delta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx + \int_\delta^\alpha f(x)\,dx = 0$ όπου α< β< γ< δ και η f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Σ ή Λ

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2^o

Αν για τον μιγαδικό z=x+yi ισχύει $|z-12-5i|=8$ να βρείτε:

1. Τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

(Μονάδες 9)

2. Να υπολογίσετε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης Α= $|z-7+7i|$

(Μονάδες 8)

3. Να δείξετε ότι η ελάχιστη και μέγιστη τιμή της παράστασης Α συμπίπτει με την ελάχιστη και μέγιστη τιμή αντίστοιχα του μέτρου του μιγαδικού z.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3ο

Αν η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f''(0) = f'(0) = f(0) = 0$ και $f'''(x)>0$, για κάθε $x\in \mathbb{R}^*$ να δείξετε ότι:

1. f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 0]$ και άνω στο $[0, +\infty)$.

   (Μονάδες 8)

2. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

   (Μονάδες 9)

3. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της f στο $x_0 = 0$.

   (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4ο

α) Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)-f'(x)<f'(x)-f(x)$, να δείξετε ότι η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=f(x)e^{-x}$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν για την f ισχύει $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2005}$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\xi^{2004}$.

(Μονάδες 13)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Νο 3

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] με $f(\alpha)\neq f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=\eta$.

(Μονάδες 13)

Β. ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ.

1). Αν η συνάρτηση f έχει μία μόνο ρίζα στο [α,β] τότε είναι γνησίως μονότονη στο [α,β]. Σ ή Λ

2). $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |iz| = |-i\overline{z}|$ Σ ή Λ

3). Αν η f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$ Σ ή Λ

4). $f^{-1}(f(x))=x$ Σ ή Λ

5). Αν η f είναι συνεχής στο x_0 είναι και παραγωγίσιμη σ' αυτό. Σ ή Λ

6). $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = 0$ Σ ή Λ

(Μονάδες 6)

Γ. Γράψτε τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [1, 3] για την οποία ισχύει f(1)=3 και f(3)=1.

Να δείξετε ότι:

1). Υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0\in(1,3)$ ώστε $f(x_0)=x_0$.

(Μονάδες 9)

2). Υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,3)$ ώστε $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=1$.

(Μονάδες 8)

3). Να δείξετε ότι αν το x_0 του 1ου ερωτήματος είναι το $x_0=2$ τότε η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1,3).

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται μία συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] και οι μιγαδικοί $z=\alpha^2+if(\alpha)$ και $w=f(\beta)+i\beta^2$ με $\alpha\beta\neq0$ και για τους οποίους ισχύει $|w|^2+|z|^2=|w-z|^2$. Να δείξετε ότι:

α) $w\overline{z}+z\overline{w}=0$ (Μονάδες 15)

β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[\alpha,\beta]$ στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον xx΄.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση g(x)$\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{|z|+t^2}}$ όπου z=α+βi, $x\in\mathbb{R}$.

1. Να βρείτε τη μονοτονία της g και μετά να δείξετε ότι η εξίσωση g(x)=0 έχει μοναδική ρίζα.

(Μονάδες 10)

2. Να κάνετε τον πίνακα προσήμου της g.

(Μονάδες 5)

3. Όταν $g(x)\leq \dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{2}}-1$ για κάθε $x\in 3$ τότε $|z|=1$.

(Μονάδες 5)

4. Να βρείτε το Εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από το διάγραμμα της g, τους άξονες xx΄, yy΄και την ευθεία x=1.

(Μονάδες 5)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Νο 4

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξει ότι: Έστω μια συνάρτηση *f* ορισμένη σ' ένα διάστημα *Δ* και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του *Δ*. Αν η *f* παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$

(10 Μονάδες)

Β. Να γράψετε τον ορισμό της κοίλης συνάρτησης (5 μονάδες)

Γ. Να απαντήσετε αν είναι σωστή ή λάθος κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις

1. Η εικόνα κλειστού διαστήματος μιας συνεχούς συνάρτησης είναι κλειστό διάστημα. Σ ή Λ

2. Αν το $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ τότε το $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)}=\infty$ Σ ή Λ

3. Αν $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ Σ ή Λ

4. Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο 3 τότε στα σημεία που η παράγωγός της μηδενίζεται εμφανίζει τοπικά ακρότατα Σ ή Λ

5. Το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από το διάγραμμα της f, τον άξονα xx', τις ευθείες x=α και x=β είναι $E=\int_\alpha^\beta |f(x)|dx$ Σ ή Λ

(5x2=10 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Να δείξετε ότι:

1) $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z}=z$ και $z\in I \Leftrightarrow \bar{z}=-z$

(10 Μονάδες)

2) Αν $|z_1|=|z_2|=1$ τότε ο $w=\dfrac{1+z_1}{1-z_1}\in I$ και ο $u=\left(\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)^2\in\mathbb{R}$

(10 Μονάδες)

3) Αν $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ τότε $|z_1+z_2+z_3|=\left|\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}\right|$

(5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 3^{o}

Έστω η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε $2f(x) \le f(1)+f(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

1. $f(1)=f(2)$ (6 μονάδες)
2. $f'(1)=f'(2)=0$ (6 μονάδες)
3. Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο (1, 2). (6 μονάδες)
4. Η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει 2 τουλάχιστον ρίζες στο (1, 2). (7 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^{o}

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)= e^{x}$, $x \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=\int_1^x f(t^2)dt$ για τους άξονες x΄x και y'y και την ευθεία με εξίσωση x = 1.

(Μονάδες 12)

B. Αν η f είναι συνεχής στο [0,1] και $\int_0^1 f(x)dx = p(1)$ όπου p(x) πολυώνυμο με p(0)=0.

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f(\xi)=p'(\xi)$.

(Μονάδες 13)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Νο 5

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο Δ, είναι σταθερή σ' αυτό αν και μόνο αν $f'(x)=0$ για κάθε $x \in \Delta$.

(10 Μονάδες)

Β. Ορισμός παραγώγου αριθμού συνάρτησης f στο x_0.

(5 Μονάδες)

Γ. Απαντήστε αν είναι σωστή ή λάθος κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο σύνολο ορισμού της τότε αντιστρέφεται Σ ή Λ

2. Αν $f:A \to \Gamma$ και $g: \mathbb{R} \to \Delta$ τότε το σύνολο ορισμού της gof είναι το Α. Σ ή Λ

3. Αν η f συνεχής στο [α,β] τότε η f παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ f(α) και f(β) και μόνον αυτές Σ ή Λ

4. Αν μία συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $M(x_0,f(x_0))$ σημείο καμπής τότε η εφαπτομένη της f στο Μ διαπερνά την γραφική παράσταση της f Σ ή Λ

5. Το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τα σημεία του επιπέδου M(x,y) για τα οποία $\alpha \le x \le \beta$ και $0 \le y \le f(x)$ είναι $E=\int_\alpha^\beta f(x)dx$ όπου f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Σ ή Λ

(2x5=10 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Δίνονται οι μιγαδικοί $z=f(0)+i$ και $w=1+f(1)i$ για τους οποίους ισχύει $|z+w|=|z-w|$ όπου f μία συνάρτηση συνεχής στο [0, 1]. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο [0, 1].

(5 Μονάδες)

Β. Δίνονται οι μιγαδικοί $z=3+(x-3)i$ και $w=1+i\ell nx$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο $x\in(1,e)$, ώστε το γινόμενο wz να είναι πραγματικός αριθμός.

(5 Μονάδες)

Γ. Αν $z=\sigma\upsilon\nu 2\theta+i\eta\mu 2\theta$, $\theta \in (0,\pi)$ και $w=\dfrac{1+z}{1-z}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} |w|\,d\theta$

(10 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

Αν για τη συνάρτηση $f:(0, +\infty)\to\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$ για κάθε x, y $\in$ (0, +∞) και η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα, τότε:

α) να δείξετε ότι η f είναι 1-1 (10 Μονάδες)

β) να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f(x^2-1)=f(x^2-2)+f(x+1)$ (10 Μονάδες)

γ) αν για x<1 είναι f(x)<0 να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0, +∞).
(5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\int_0^{x^3} f(t)dt+\int_0^{-x^3-1} f(t)dt$ όπου η f είναι παραγωγίσιμη και ορισμένη στο $\mathbb{R}$ -{-1}.

Να βρείτε :

1) Το σύνολο ορισμού της συνάρτησης g. (5 Μονάδες)

2) Την παράγωγο της g. (5 Μονάδες)

3) Αν στο $x_0=-\frac{1}{2}$ η g παρουσιάζει τοπικό ακρότατο να δείξετε ότι $f\left(-\frac{1}{8}\right)=f\left(-\frac{7}{8}\right)$.
(9 Μονάδες)

4) Υπάρχει σημείο ξ$\in$(-1, 0) ώστε η εφαπτομένη της f να είναι παράλληλη προς xx΄ όπως υπάρχει και $x_0\in$(-1, 0) ώστε εφαπτόμενη της g να είναι παράλληλη προς xx΄.

(6 Μονάδες)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Νο 6

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Β. Γράψτε τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης για x→+∞.

Γ.

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και f(α)f(β)>0 τότε είναι αδύνατο να υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0)=0$ Σ ή Λ.

2. Είναι $(f^{-1} \circ f)(x)=x$ για κάθε x από το σύνολο ορισμού της συνάρτησης $f^{-1} \circ f$. Σ ή Λ

3. Αν η F είναι αρχική της f τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\alpha) - F(\beta)$. Σ ή Λ

4. Αν τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ δεν υπάρχουν τότε κατ' ανάγκη και το $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x)\right)$ δεν υπάρχει. Σ ή Λ

5. $\bar{i} = \frac{1}{i} = -i$ Σ ή Λ.

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x) - f'(x)=3x^2+1$ $x \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε πολυώνυμο P(x), 2ου βαθμού με την ιδιότητα $P(x) - P'(x)=3x^2+1$.

ii) Να βρείτε την f όταν f(0)=8

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)= e^x+3x^2+6x+7$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η εξίσωση z^2-λz+1=0, $\lambda \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ με ρίζες z_1,z_2 και μία παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία f(0)=$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$ και f(2)=$z_1^2+z_2^2$

Ζητούνται:

1) Οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση f΄(x)=0 να έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο (0,2)
2) Για την μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να λύσετε την δεδομένη εξίσωση
3) Για λ=3 να δείξετε ότι υπάρχει 1 τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$ ώστε f ΄(ξ)=2
4) Για λ=-2 να δείξετε ότι υπάρχει 1 τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο (0,2).

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνάρτηση f(x)=x-ℓnx+e^x, $x \geq 1$

i) Να δείξετε ότι η f είναι ↑
ii) Να βρεθεί το f(A).
iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση x+e^x=ℓnx+2005 έχει μοναδική ρίζα στο $[1,+\infty)$
iv) Να υπολογιστεί το I=$\int_1^e f(x)dx + \int_{1+e}^{e-1+e^e} f^{-1}(x)dx$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Νο 7

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να δείξετε ότι μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ είναι σταθερή σ' αυτό <u>αν και μόνο αν</u> $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\Delta$.

Β.1) Αν z_1,z_2 ρίζες της εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ όπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\alpha\neq 0$ και $z\in\mathbb{C}$ τότε

$z_1+z_2=\dfrac{-\beta}{\alpha}$ και $z_1\cdot z_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$ Σ ή Λ.

2) Αν μία συνάρτηση είναι ορισμένη στο x_0 και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Σ ή Λ.

3) Τα κοινά σημεία (όταν υπάρχουν) των γραφικών παραστάσεων δύο αντιστρόφων συναρτήσεων βρίσκονται πάνω στη διχοτόμο y=x

Σ ή Λ.

4) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ Σ ή Λ.

5) Αν f και g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ τότε $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Σ ή Λ.

ΘΕΜΑ 2ο

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και διέρχεται από τα σημεία Α(3,2) και Β(5,9) τότε:

α) να βρείτε το είδος της μονοτονίας της

β) να λύσετε την εξίσωση $f(3+f(x^2+2x))=9$ και την ανίσωση $f(3x-1)-2<0$

γ) Να βρείτε τα όρια 1) $\lim\limits_{x\to 2} f^{-1}(x)$

2) $\lim\limits_{x\to 5} f(x-2)$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη $z_1=\alpha^2+i\,f(\alpha)$

$z_2=\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{f(\beta)}i$ όπου $0<\alpha<\beta$ και $f(x)\neq 0$ και $\left|z_1+\bar{z}_2\right|=\left|z_1-\bar{z}_2\right|$

Να δείξετε:

1) $\dfrac{\alpha^2}{f(\alpha)}=\dfrac{\beta^2}{f(\beta)}$

2) $x_0\in(0,+\infty)$ ώστε $x_0\cdot f'(x_0)=2f(x_0)$

3) αν $f(1)=1$ να υπολογίσετε το $\displaystyle\int_1^2\frac{f'(x)}{f^2(x)+f(x)}dx$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Έστω f, g συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ και $f(\alpha)=g(\alpha)$ και $f(\beta)=g(\beta)$ να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ευθεία $x=x_0$ με $x_0\in(\alpha,\beta)$ η οποία να χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\eta\mu x$ και $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. Να βρείτε την παράγωγο της $f^{-1}(x)$.

Γ. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής με συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ η οποία αντιστρέφεται.

Να δείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)-\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}f^{-1}(x)dx$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Μιχάλη Καραμαύρου Ανάλυση, Μιγαδικοί, Ολοκληρώματα.
2. Θ. Ν. Καζαντζή Συναρτήσεις – Ολοκληρώματα.
3. Θέματα για τις Πανελλήνιες Εξετάσεις ″ΤΟ ΝΕΟ ΠΝΕΥΜΑ„ Σ. ΛΙΠΟΡΔΕΖΗ.
4. Η ΤΕΛΙΚΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΗΣ 1ης ΔΕΣΜΗΣ με 100 Συνδυαστικά θέματα Σ. ΛΙΠΟΡΔΕΖΗ.
   Ανάλυση Γ' Λυκείου Γεωργακίλα Εκδόσεις Μάθηματική Βιβλιοθήκη.
   Μαθηματικά Γ' Λυκείου Η. Κωνσταντόπουλου Εκδόσεις Γκρίτζογλου.
   Μαθηματικά Γ' Λυκείου ΣΚΥΦΑΣ ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΑΚΟΣ Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα.
   Μαθηματικά Γ' Λυκείου Γιάννη Μαντά Θ. Παυλόπουλου
   Θέματα Μαθηματικής Ανάλυσης Παντελή Πιστοφίδη.
   Ανάλυση Γιώργου Κόλλια Εκδόσεις Σαββάλα.
   Ανάλυση Γεωργανίκη Ευσταθόπουλου Καββαδία Σβέριου Εκδόσεις Αναστασάκη.
   Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης Χριστοφ. Αχτσαγιωτίδη Εκδόσεις Ανικούλα.
   Ανάλυση Ε. ΠΟΤΟΥΡΙΔΟΥ – Ν. ΚΑΜΠΑΝΗΣ Εκδόσεις Κορφή.
   Ανάλυση (Διαφορικός Λογισμός Νίκος Ροτζιώκος – Μιχ. Ρούσσης) Χρ. Φραντζής.
   Γενικά θέματα Εξετάσεων Γ. Μπατζάκης Εκδόσεις ΑΝΙΚΟΥΛΑ.
   Επιλεγμένα θέματα επανάληψης Γ. Κορεκλίδη Εκδόσεις ΑΝΙΚΟΥΛΑ.
   Μαθηματικά 1ης Δέσμης Καπράλος Μπιρμπάκος Μπαρόλιας.
   Ολοκληρώματα Γ. Μπορολός Εκδόσεις Σπηλιώτη.
   Ανάλυση
   Μαθηματικά Γ' Λυκείου Π. ΚΑΝΔΥΛΑ.
   Επαναληπτικά θέματα Θ. Ν. Καζαντζή Γ. Μ. Μαυρίδη Ε. Μήτσιου Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη
5. Ζανταρίδη Νίκου Επαναληπτικά Θέματα.
6. Μαυρίδης Θέματα Μαθηματικών Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ Θετ. & Τεχν. Κατεύθυνσης.
7. ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΥ ΛΑΖΑΡΙΔΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΟΡΙΟ ΣΥΝΕΧΕΙΑ – ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ Εκδοτικού
8. Στεργίου – Νάκη Εκδόσεις Σαββάλλα Συναρτήσεις Όρια Συνέχεια Διαφορικός Λογισμός – Ολοκληρώματα.
9. Ηλία Κωνσταντόπουλου , Μαθηματικά Γ' Λυκείου 1, Ανάλυση – Συναρτήσεις – Όρια – Συνέχεια , Θετ. – Τεχν. Κατεύθυνσης, Εκδόσεις Γκρίτζαλη.
10. Κώστα Γκατζούλη – Νίκου Ζανταρίδη, Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Επαναληπτικά Κριτήρια Αξιολόγησης, Θετ. – Τεχν. Κατεύθυνσης, Εκδόσεις Γκατζούλη.
11. Γ. Δεμερτζή – Δ. Γουβίτσα, Ολοκληρωτικός Λογισμός, Γ' Λυκείου, Θετ. – Τεχν. Κατεύθυνσης, Εκδόσεις Όλυμπος.
12. Κ. Γκατζούλη, Μαθηματικά Γ' Λυκείου 1, Μιγαδικοί Αριθμοί, Θετ. – Τεχν. Κατεύθυνσης, 15 Κριτήρια Αξιολόγησης, Εκδόσεις Γκατζούλη.
13. Ηλία Κωνσταντόπουλου , Μαθηματικά Γ' Λυκείου 2, Ανάλυση – Παράγωγος, Θετ. – Τεχν. Κατεύθυνσης, Εκδόσεις Γκρίτζαλη.
14. Γ. Δεμερτζή – Δ. Γουβίτσα, Μαθηματικά 2, Διαφορικός Λογισμός, Γ' Λυκείου, Θετ. – Τεχν. Κατεύθυνσης, Εκδόσεις Όλυμπος.
15. Π. Κανδύλα, Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής, Διαφορικός Λογισμός – Στατιστική – Πιθανότητες, Γ' Λυκείου, Γεν. Παιδείας, Εκδόσεις Κανδύλα.
16. Π. Κανδύλα, Μαθηματικά, Γ' Λυκείου, 1ο Τεύχος, Θετ. Κατεύθυνσης, Εκδόσεις Κανδύλα.
17. Ηλία Κωνσταντόπουλου , Μαθηματικά Γ' Λυκείου 3, Ανάλυση – Ολοκλήρωμα – Γενικά Θέματα,, Θετ. – Τεχν. Κατεύθυνσης, Εκδόσεις Γκρίτζαλη.
18. Π. Κανδύλα, Μαθηματικά Θετ. Κατεύθυνσης, Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης – Διαφορικός Λογισμός – Ολοκληρωτικός Λογισμός, Γ' Λυκείου, 2ο Τεύχος, Εκδόσεις Κανδύλα.
19. Χαλίδη Γιάννη – Μουταφίδη Ιορδάνη, Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής, Γ' Λυκείου, Γεν. Παιδείας, Εκδόσεις Όλυμπος.
20. Γιάννη Μπαϊλάκη, Μαθηματικά Θέματα με Κατεύθυνση για μια Πορεία με Επίγνωση, Γ' Λυκείου, Θετ. – Τεχν. Κατεύθυνσης, Εκδόσεις Σαββάλα.
21. Κ. Γκατζούλη, Μαθηματικά Γ' Λυκείου 3, Παράγωγοι – Ολοκληρώματα, Θετ. – Τεχν. Κατεύθυνσης, Εκδόσεις Γκατζούλη.
22. Γιάννη Δ. Μπαϊλάκη, Διαγωνίσματα Μαθηματικών, Θετ. – Τεχν. Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, Εκδόσεις Σαββάλα.
23. Χαρ. Στεργίου – Χρ. Νάκη – Ιωαν. Στεργίου, Επαναληπτικά Θέματα Μαθηματικών Γ' Λυκείου Θετ. Κατεύθυνσης, Εκδόσεις Σαββάλα.
24. Αν. Ηλιόπουλου – Σαβ. Λαζαρίδη, Μαθηματικά Θετ. – Τεχν. Κατεύθυνσης 1, Μιγαδικοί Αριθμοί – Συναρτήσεις, Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης, Εκδοτικός Όμιλος Συγγραφέων Καθηγητών.
25. Κ. Γκατζούλη, Ανάλυση 4ης Δέσμης, 50 Διαγωνίσματα με τις Απαντήσεις, Εκδόσεις Γκατζούλη.
26. Μ. Καραμαύρου, Ανάλυση 4ης Δέσμης, Εισαγωγικές Έννοιες, Όριο – Συνέχεια, Παράγωγοι, Ολοκληρώματα, Εκδόσεις Μαθηματικών Βιβλίων.

27. Σπ. Καλομητσίνη – Γ. Μπαϊλάκη – Αλεξ. Καλομητσίνη, Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Πίνακες – Μιγαδικοί Αριθμοί, Θετ. Κατεύθυνσης, Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα.
28. Γ. Λ. Μαυρίδη, Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Θετ. – Τεχν. Κατεύθυνσης, Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη.