Η ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Σάκης Λιπορδέζης

ΘΕΩΡΙΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}

Σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ (λανθασμένη).

1.1

1. Τα συγγραμμικά διανύσματα έχουν την ίδια κατεύθυνση. Σ☐ Λ☐

2. Τα αντίρροπα διανύσματα είναι αντίθετα. Σ☐ Λ☐

3. Τα αντίθετα διανύσματα είναι αντίρροπα. Σ☐ Λ☐

4. Αν $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=180^\circ$ ή $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=0^\circ$ τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά. Σ☐ Λ☐

5. Τα ομόρροπα διανύσματα είναι συγγραμικά. Σ☐ Λ☐

6. Τα συγγραμμικά διανύσματα είναι ομόρροπα. Σ☐ Λ☐

1.2

1. Ισχύει $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{B\Gamma}$. Σ☐ Λ☐

2. Ισχύει $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{B\Gamma}$. Σ☐ Λ☐

3. Ισχύει $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B\Gamma}$. Σ☐ Λ☐

4. Αν $\lambda\vec{\alpha}=\vec{0}$, τότε $\lambda=0$. Σ☐ Λ☐

5. Αν $\lambda\vec{\alpha}=\vec{0}$, τότε $\vec{\alpha}=\vec{0}$. Σ☐ Λ☐

6. Ισχύει $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{EZ}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Delta E}+\overrightarrow{ZA}=\vec{0}$. Σ☐ Λ☐

1.3

1. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$, τότε $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$. Σ☐ Λ☐

2. Ισχύει $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) + \left(\widehat{-\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 180^{o}$ για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Σ☐ Λ☐

3. Ισχύει $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \left(\widehat{-\vec{\alpha},\ -\vec{\beta}}\right)$ για οποιαδήποτε μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Σ☐ Λ☐

4. $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$ για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Σ☐ Λ☐

5. Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές. Σ☐ Λ☐

6. Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{\alpha}$, τότε είναι συγγραμμικό και με το $\vec{\beta}$. Σ☐ Λ☐

7. Ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$. Σ☐ Λ☐

8. Ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$. Σ☐ Λ☐

Σε κάθε μία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

1.4

Η ισότητα $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ με $\lambda \in 3^*$ σημαίνει ότι:

☐ Α: το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι μεγαλύτερο του $\vec{\beta}$.

☐ Β: το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{\beta}$.

☐ Γ: τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

☐ Δ: τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

☐ Ε: $|\vec{\alpha}| > |\vec{\beta}|$

1.5

Ποια από τις παρακάτω ισότητες δηλώνει ότι το σημείο Δ είναι υποδηλώνει ότι το σημείο Δ είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ;

☐ Α: $\overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{\Delta B}$ ☐ Β: $|\overrightarrow{\Delta A}| = |\overrightarrow{\Delta B}|$ ☐ Γ: $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{AB}$

☐ Δ: $\overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{\Delta B} = \vec{0}$ ☐ Ε: καμία από τις προηγούμενες.

1.6

Αν Α, Β και Γ είναι τρία συνευθειακά σημεία για τα οποία ισχύει ότι $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{A\Gamma}$ με $0 < \lambda < 1$, τότε το σημείο Γ βρίσκεται:

☐ Α: ανάμεσα στα σημεία Α και Β
☐ Β: στην προέκταση της ευθείας ΑΒ προς το μέρος του σημείου Β
☐ Γ: στην προέκταση της ευθείας ΑΒ προς το μέρος του σημείου Α
☐ Δ: στο μέσο του ΑΒ.

1.7

Αν $\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| = \left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right|$, τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$:

☐ Α: είναι αντίρροπα
☐ Β: είναι αντίθετα
☐ Γ: είναι ομόρροπα
☐ Δ: έχουν την ίδια κατεύθυνση.

1.8

Αν $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$, $\lambda \in 3$, τότε:

☐ Α: $\left|\vec{\alpha}\right| > \left|\vec{\beta}\right|$
☐ Β: $\lambda > 0$
☐ Γ: τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα
☐ Δ: $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) < 90^o$

1.9

Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} > 0$, τότε η γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ είναι:

☐ Α: οξεία ☐ Β: αμβλεία ☐ Γ: ορθή ☐ Δ: 180^o

1.10

Αν Α(x_1, y_1) και Β(x_2, y_2), τότε οι συντεταγμένες του μέσου Μ(x, y) του $\overrightarrow{AB}$ είναι:

☐ Α: $x = \frac{x_1 + y_1}{2}$, $y = \frac{x_2 + y_2}{2}$
☐ Β: $x = \frac{x_1 - x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 - y_2}{2}$
☐ Γ: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$
☐ Δ: $x = \frac{x_1 - y_1}{2}$, $y = \frac{x_2 - y_2}{2}$

1.11

Για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

☐ Α: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$.

☐ Β: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$

☐ Γ: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$

☐ Δ: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$.

☐ Ε: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$.

1.12

Αν Μ(x, y) είναι το σημείο του επιπέδου, τότε να αντιστοιχίσετε κατάλληλα τα στοιχεία της στήλης Α με τα στοιχεία της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
i) Α(x, - y)	α) Συμμετρικό του Μ ως προς τον άξονα y΄y.
ii) Β(- x, y)	β) Συμμετρικό του Μ ως προς τον άξονα x΄x.
iii) Γ(-x, -y)	γ) Συμμετρικό του Μ ως προς τη διχοτόμο της γωνίας του πρώτου τεταρτημορίου.
iv) Δ(y, x)	δ) Συμμετρικό του Μ ως προς την αρχή των αξόνων.

1.13

Αν Α και Β είναι δύο σημεία του επιπέδου και Μ ένα άλλο σημείο τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$, να αντιστοιχίσετε τις τιμές της στήλης Α που παίρνει ο λ με τη θέση του Μ, για τις τιμές αυτές, της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
Τιμές του λ	*Θέση του Μ*
i) $\lambda > 1$	α) Ανάμεσα στα σημεία Α και Β.
ii) $0 < \lambda < 1$	β) Στην προέκταση του ΑΒ προς το μέρος του Β.
iii) $-1 < \lambda < 0$	γ) Στην προέκταση του ΑΒ προς το μέρος του Α.
iv) $\lambda = 1$	δ) Συμπίπτει με το Α.
v) $\lambda = 0$	ε) Συμπίπτει με το Β.
vi) $\lambda < -1$	στ) Στο μέσο του ΑΒ.

1.14 Αν $\vec{\alpha}=(x_1,\ y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,\ y_2)$, να αντιστοιχίσετε κάθε έκφραση της στήλης Α με μία μόνο έκφραση της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
i) $\vec{\alpha}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$	α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$
ii) $x_1y_2-x_2y_1$	β) $\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert}$
iii) $x_1x_2+y_1y_2$	γ) $\lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert$
iv) $\lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$	δ) $\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert}{\lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\vec{\beta}}$
v) $\vec{\beta}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$.	ε) $\det\left(\vec{\alpha},\ \vec{\beta}\right)$
vi) $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\ \vec{\beta}}\right)$	

1.15 Αν $\overrightarrow{AB}=\left(x_1,\ y_1\right)$, $\overrightarrow{B\Gamma}=\left(x_2,\ y_2\right)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\left(x_3,\ y_3\right)$ οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αντιστοιχίσετε κάθε σχέση της στήλης Α με το είδος του τριγώνου της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
i) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0$	α) Οξυγώνιο τρίγωνο.
ii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}<0$	β) Αμβλυγώνιο τρίγωνο.
iii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}=$ $=\frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{A\Gamma}\rvert=\frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{\Gamma A}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{\Gamma B}\rvert$	γ) Ορθογώνιο τρίγωνο στο Α.
iv) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}>0,\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}>0$ και $\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}>0$	δ) Ισόπλευρο τρίγωνο.
v) $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{\Gamma}=-\frac{1}{2}\ \lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cdot\lvert\vec{\Gamma}\rvert$	ε) Τρίγωνο με τη γωνία $\hat{B}$ οξεία.
vi) $x_1x_2=-y_1y_2$	
vii) $x_1x_2+y_1y_2<0$	στ) Ορθογώνιο τρίγωνο στο Β.

1.16

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$. Αν σε κάθε σχέση της στήλης Α αντιστοιχεί μία από τις θέσεις των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ που αναφέρονται στη στήλη Β, να κάνετε τη σωστή, μεταξύ τους, αντιστοιχία.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
i) $x_1y_2-x_2y_1=0$	α) $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$
ii) $x_1x_2+y_1y_2=0$	β) $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$
iii) $x_1x_2+y_1y_2=$ $=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$	γ) $\vec{\alpha}\downarrow\uparrow\vec{\beta}$
iv) $x_1x_2+y_1y_2>0$	δ) $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ συγγραμμικά
v) $x_1x_2+y_1y_2+$ $+\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}=0$	ε) $\widehat{(\vec{\alpha},\ \vec{\beta})}<90^\circ$
vi) $x_1x_2+y_1y_2<0$	στ) $\widehat{(\vec{\alpha},\ \vec{\beta})}>90^\circ$

1.17

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i) Αν για τρία σημεία Α, Β και Γ του επιπέδου ισχύει $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{B\Gamma}$, $\lambda\in 3^*$, τότε τα σημεία Α, Β και Γ είναι ……………………………………….

ii) Το διάνυσμα θέσης του μέσου Μ ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ισούται με …………………………………………………………….

iii) Η τετμημένη ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ με άκρα τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ ισούται με ……………………………………………………..…….

iv) Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, τότε οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\delta}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$, $\lambda,\ \mu\in 3$, είναι $x=$………………… και $y=$………………………….

v) Αν $\vec{\alpha}=(x,y)$ και το πέρας του διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι το σημείο $B(x_2,y_2)$, τότε οι συντεταγμένες της αρχής Α είναι $x_1=$…………………… και $y_1=$……………………

1.18

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i) Αν $\vec{\alpha} = \alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j}$, τότε οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι ……………………….

ii) Αν $\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$, τότε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι $|\vec{\alpha}| =$ …………………………..

iii) Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με $x_1, x_2 \neq 0$. Αν ισχύει $x_1y_2 = y_1x_2$, τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ………………………….., ενώ αν ισχύει $x_1x_2 = -y_1y_2$, είναι …………………………………….

iv) Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία του επιπέδου και για το σημείο Γ(x,y) ισχύουν $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, τότε το σημείο Γ είναι ……………………………

v) Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι δύο μη συγγραμμικά διανύσματα του επιπέδου και ισχύει $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε οι αριθμοί λ και μ είναι ………………………………………………

1.19

Αν Μ είναι το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

i) $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$, όπου Ο σημείο του επιπέδου,

ii) αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, τότε οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ είναι $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

1.20

Να αποδείξετε ότι κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}$ και $\vec{j}$.

1.21

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\delta} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$, $\lambda, \mu \in 3$.

1.22

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, να αποδείξετε ότι η τετμημένη του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι ίση με την τετμημένη του πέρατος μείον την τετμημένη της αρχής και η τεταγμένη του $\overrightarrow{AB}$ είναι ίση με την τεταγμένη του πέρατος μείον την τεταγμένη της αρχής.

1.23

Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$, να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1.24

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

ii) $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

(ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1999)

1.25

Να αποδείξετε τις παρακάτω ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων:

i) $\vec{\alpha} \cdot \left(\vec{\beta} + \vec{\gamma}\right) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$

ii) $\left(\lambda\vec{\alpha}\right) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \left(\lambda\vec{\beta}\right) = \lambda\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right), \lambda \in 3.$

1.26

Να αποδείξετε τις παρακάτω συνθήκες καθετότητας δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$.

i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

ii) $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$

iii) $\lambda_1 \lambda_2 = -1$, όπου $\lambda_1 = \lambda\vec{\alpha}$ και $\lambda_2 = \lambda\vec{\beta}$, εφόσον $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \not\parallel y'y$.

(ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1999)

1.27

Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}} \vec{v}$.

1.28

Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$,

ii) αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$,

iii) αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.

1.29

Δίνεται ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. Καθεμία από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστή ή λάθος. Αν είναι σωστή, κυκλώστε το γράμμα Σ, αν είναι λάθος κυκλώστε το Λ.

i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ Σ Λ

ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Delta}$ Σ Λ

iii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ Σ Λ

iv) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{\Delta\Gamma}|$ Σ Λ

v) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Delta}$ Σ Λ

vi) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{B\Gamma}|$ Σ Λ

1.30

Αν Α, Β, Γ και Δ είναι τέσσερα σημεία, να συμπληρώσετε τις ισότητες:

i) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

ii) $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} - \overrightarrow{B\Delta} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

iii) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta B} = \ldots\ldots\ldots$

iv) $\overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{A\Delta} = \ldots\ldots\ldots$

v) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \ldots\ldots\ldots$

vi) $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{BA} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

vii) $\overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \ldots\ldots\ldots$

viii) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} - \overrightarrow{A\Gamma} = \ldots\ldots\ldots$

ix) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \ldots\ldots\ldots$

1.31

Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ, να συμπληρώσετε τις ισότητες:

i) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Delta} = \ldots\ldots\ldots$

ii) $2\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{B\Gamma} - 2\overrightarrow{AB} = \ldots\ldots\ldots$

iii) $\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Delta B} = \ldots\ldots\ldots$

iv) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \ldots\ldots\ldots$

v) $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{\Gamma O} = \ldots\ldots\ldots$

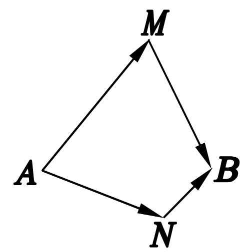
1.32

Για τα διανύσματα του διπλανού σχήματος να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

i) $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right| > \left|\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NB}\right|$

ii) $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NB}\right|$

iii) $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right| < \left|\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NB}\right|$



1.33

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο δίνεται το σημείο Α(-3,-2). Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

i) Συμμετρικό του Α ως προς τον x΄x: A_1: (….., …..)
ii) Συμμετρικό του Α ως προς τον y΄y: A_2: (….., …..)
iii) Συμμετρικό του Α ως προς την αρχή Ο: A_3: (….., …..)
iv) Συμμετρικό του Α ως προς τη διχοτόμο της $x\hat{O}y$: A_4: (….., …..)

1.34

Δίνονται τα σημεία Α(3, 1), Β(6, 5), Γ(-4, -2), Δ(3, -3) και Ε(-3, 5). Να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε διάνυσμα της πρώτης στήλης με τις συντεταγμένες του στη δεύτερη στήλη

Διάνυσμα	Συντεταγμένες διανύσματος
$\overrightarrow{AB}$	(0, -4)
$\overrightarrow{A\Gamma}$	(3, 4)
$\overrightarrow{AE}$	(-7, -3)
$\overrightarrow{A\Delta}$	(-6, 4)
$\overrightarrow{BE}$	(-9, 0)

1.35

Δίνονται τα σημεία Α(3, 2), Β(-4, 5), Γ(-3, -2), Δ(3, -4). Να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε τμήμα της πρώτης στήλης με τις συντεταγμένες του μέσου του στη δεύτερη στήλη.

<u>Τμήμα</u>	<u>Συντεταγμένες μέσου</u>
ΑΒ	(0, 0)
ΒΓ	$\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$
ΓΔ	$\left(-\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$
ΑΓ	(0, -3)

1.36

Να βάλετε σε κύκλο τον αριθμό που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

i) Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(3,-2)$ και τα σημεία Α(4, -1), Β(-2, 7), Γ(0, 3) και Δ(1, 5). Ποιο από τα διανύσματα είναι ίσο με το $\vec{\alpha}$:

1. $\overrightarrow{AB}$ 2. $\overrightarrow{A\Gamma}$ 3. $\overrightarrow{\Delta B}$ 4. $\overrightarrow{B\Delta}$ 5. $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$

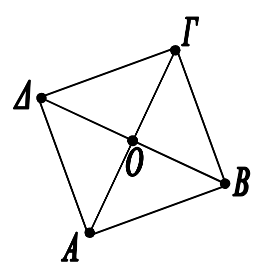
ii) Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(3,-2)$. Ποιο από τα διανύσματα είναι παράλληλο με το $\vec{\alpha}$:

1. $\vec{\beta}=(8,4)$ 2. $\vec{\gamma}=(-4,-2)$ 3. $\vec{\delta}=(-6,3)$ 4. $\vec{\varepsilon}=(-6,4)$

1.37

Δίνονται τετράγωνο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και πλευρά α. Να βρείτε ως συνάρτηση του α τα εσωτερικά γινόμενα:

i) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$
ii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$
iii) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$
iv) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O\Gamma}$
v) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma}$
vi) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$
vii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}$



1.38

Τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ έχουν μέτρα 2 και 3 αντιστοίχως. Να βρείτε το γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{v}$, αν η γωνία των διανυσμάτων αυτών είναι:

i) 0° ii) 30° iii) 60° iv) 90° v) 120° vi) 150° vii) 180°

1.39

Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση: Αν $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$ και $\vec{u}\neq\vec{0}$, τότε

Α. $\vec{u}=\vec{w}$ Β. $\vec{v}\,//\,\vec{w}$ Γ. $\vec{u}\perp\vec{v}-\vec{w}$ Δ. $\vec{u}\perp\vec{v}+\vec{w}$ Ε. $\vec{v}=\vec{w}$ ή $\vec{u}\perp\vec{v}-\vec{w}$

1.40

Να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε ζεύγος διανυσμάτων της πρώτης στήλης με το είδος της γωνίας τους που αναφέρονται στη δεύτερη στήλη.

Διανύσματα	Γωνία
1. $\vec{u}=(7,5),\ \vec{v}=(-1,2)$	ορθή
2. $\vec{u}=(-3,4),\ \vec{v}=(2,-1)$	
3. $\vec{u}=(3,5),\ \vec{v}=(6,0)$	οξεία
4. $\vec{u}=(0,-1),\ \vec{v}=(-5,4)$	
5. $\vec{u}=(-2,3),\ \vec{v}=(3,2)$	αμβλεία
6. $\vec{u}=(\kappa,\lambda),\ \vec{v}=(-\lambda,\kappa)$	

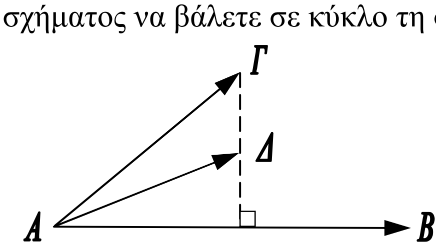
1.41

Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση:

i) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}>\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$

ii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}<\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$

iii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$



Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}

2.1

Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ(λανθασμένη).

i) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που ενώνει τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι $\lambda = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. Σ☐ Λ☐

ii) Η ευθεία με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$ είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$. Σ☐ Λ☐

iii) Ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ παράλληλο προς μια ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα x΄x την ίδια γωνία που σχηματίζει και η ε. Σ☐ Λ☐

iv) Το παράλληλο διάνυσμα προς την ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι το διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, -B)$. Σ☐ Λ☐

v) Οι τετμημένες δύο σημείων που ορίζουν ευθεία παράλληλη προς τον άξονα y΄y είναι ίσες. Σ☐ Λ☐

2.2

i) Αν δύο σημεία Α και Β έχουν ίσες τετμημένες και άλλα δύο σημεία Γ και Δ έχουν ίσες τεταγμένες, τότε η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη στη ΓΔ. Σ☐ Λ☐

ii) Η απόσταση σημείου $A(x_0, y_0)$ από την ευθεία ε: $Ax + By + \Gamma = 0$ δίνεται από τον τύπο $d = \dfrac{|A^2 + B^2|}{\sqrt{Ax_0 + By_0 + \Gamma}}$. Σ☐ Λ☐

iii) Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $E = \dfrac{1}{2}\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)$. Σ☐ Λ☐

iv) Η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x$ είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{v} = \vec{i} + \lambda\vec{j}$. Σ☐ Λ☐

v) Κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει στο επίπεδο ευθεία γραμμή. Σ☐ Λ☐

Σε κάθε μία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

2.3

Το κάθετο διάνυσμα προς την ευθεία με εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 είναι το:

- ☐ Α: $\vec{\delta} = (-A, B)$
- ☐ Β: $\vec{\delta} = (-B, A)$
- ☐ Γ: $\vec{\delta} = (A, -B)$
- ☐ Δ: $\vec{\delta} = (A, B)$
- ☐ Ε: $\vec{\delta} = (B, -A)$

2.4

Η ευθεία που ενώνει τα σημεία Α(x_1, y_1) και Β(x_2, y_2), με $x_1 \neq x_2$ έχει εξίσωση:

- ☐ Α: $y - y_1 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}(x - x_1)$
- ☐ Β: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
- ☐ Γ: $y - y_2 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}(x - x_2)$
- ☐ Δ: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(y - y_2)$
- ☐ Ε: $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

2.5

Η ευθεία που ενώνει τα σημεία Α(x_0, y_0) και Β(y_0, x_0) με $x_0y_0 > 0$ είναι κάθετη προς:

- ☐ Α: τον άξονα x΄x.
- ☐ Β: τον άξονα y΄y.
- ☐ Γ: τη διχοτόμο της πρώτης και της τρίτης γωνίας των αξόνων.
- ☐ Δ: τη διχοτόμο της δεύτερης και της τέταρτης γωνίας των αξόνων.
- ☐ Ε: την ευθεία με εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

2.6

Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α(x_0, y_0) και είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x έχει εξίσωση:

- ☐ Α: $x = x_0$
- ☐ Β: $x = y_0$
- ☐ Γ: $y = y_0$
- ☐ Δ: $x = -x_0$
- ☐ Ε: $y = -y_0$

2.7

Αν η ευθεία ε_1 είναι κάθετη στην ευθεία ε_2 και λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών αυτών, τότε ισχύει:

- [ ] Α: $\lambda_1 = \lambda_2$
- [ ] Β: $\lambda_1\lambda_2 = 1$
- [ ] Γ: $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2}$
- [ ] Δ: $\lambda_1\lambda_2 = -1$

2.8

Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x όταν:

- [ ] Α: $A = 0$
- [ ] Β: $B = 0$
- [ ] Γ: $\Gamma = 0$
- [ ] Δ: $B = \Gamma = 0$
- [ ] Ε: $A = \Gamma = 0$

2.9

Αν μια ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\hat{\omega} > 90^o$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας:

- [ ] Α: είναι $\lambda > 0$
- [ ] Β: είναι $\lambda < 0$
- [ ] Γ: δεν ορίζεται
- [ ] Δ: είναι $\lambda > 1$
- [ ] Ε: είναι $\lambda < 1$

2.10

Οι ευθείες με εξισώσεις $Ax + By + \Gamma = 0$ και $Bx + Ay + \Gamma = 0$ με $A \neq B \neq 0$:

- [ ] Α: είναι παράλληλες
- [ ] Β: είναι κάθετες
- [ ] Γ: τέμνονται σε ένα σημείο
- [ ] Δ: συμπίπτουν

2.11

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$ είναι:

- [ ] Α: $\lambda = -\frac{\beta}{\alpha}$
- [ ] Β: $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$
- [ ] Γ: $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$
- [ ] Δ: $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$
- [ ] Ε: $\lambda = \alpha$
- [ ] Ζ: $\lambda = \beta$

2.12

Η απόσταση του σημείου $A(x_0, y_0)$ από την ευθεία ε: $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι:

☐ Α: $d = \dfrac{|Ay_0 + Bx_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

☐ Β: $d = \dfrac{|A^2 + B^2|}{\sqrt{Ax_0 + By_0 + \Gamma}}$

☐ Γ: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}$

☐ Δ: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

☐ Ε: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

2.13

Σε κάθε γωνία της στήλης Α που σχηματίζει μια ευθεία ε με τον άξονα x΄x αντιστοιχεί ένας συντελεστής διεύθυνσης από τη στήλη Β. Να κάνετε τη σωστή αντιστοίχιση.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
	α) $\lambda = 0$
i) $\hat{\omega} = 45^o$	β) $\lambda = 1$
ii) $\hat{\omega} = 60^o$	γ) $\lambda = -1$
iii) $\hat{\omega} = 135^o$	δ) $\lambda = \sqrt{3}$
iv) $\hat{\omega} = 150^o$	ε) $\lambda = -\sqrt{3}$
v) $\hat{\omega} = \dfrac{2\pi}{3}$	στ) $\lambda = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
vi) $\hat{\omega} = \dfrac{\pi}{6}$	ζ) $\lambda = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
	η) $\lambda = \dfrac{1}{2}$
vii) $\hat{\omega} = 0^o$	θ) $\lambda = -\dfrac{1}{2}$

2.14

Να αντιστοιχίσετε σε κάθε εξίσωση ευθείας από τη στήλη Α την απόστασή της d από την αρχή των αξόνων που δίνεται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
i) $y=\alpha x+\beta$	α) $d=\dfrac{\lvert\alpha\beta\rvert}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$
ii) $y=\alpha x$	β) $d=0$
iii) $y=y_0$	γ) $d=\dfrac{\lvert\gamma\rvert}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$
iv) $x=x_0$	δ) $d=\lvert y_0\rvert$
v) $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ με $\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert\neq 0$	ε) $d=\lvert x_0\rvert$
vi) $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}=1$ με $\alpha\beta\neq 0$	στ) $d=\dfrac{\lvert\beta\rvert}{\sqrt{1+\alpha^2}}$
	ζ) $d=\dfrac{\lvert\alpha+\beta+\gamma\rvert}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

2.15

Να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα.

Εξίσωση ευθείας	Κάθετο διάνυσμα $\vec{\delta}$	Παράλληλο διάνυσμα $\vec{\varepsilon}$	Συντελεστής διεύθυνσης
$y=\lambda x+\beta$			
$y=\lambda x$			
$Ax+By+\Gamma=0 \quad (A\neq 0)$			
$y-y_0=\lambda(x-x_0)$			
$Bx-Ay+\Gamma=0$			

2.16

Σε καθεμία από τις ευθείες που περιγράφονται στη στήλη Α αντιστοιχεί μία εξίσωση από τη στήλη Β. Να κάνετε τη σωστή αντιστοίχιση.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
i) Ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και διέρχεται από το σημείο Α(x_0, y_0).	α) $y=\lambda x+\beta$
ii) Ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Α(0, β).	β) $y=\lambda x$
iii) Ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(x_1, y_1) και Β(x_2, y_2) με $x_1 \neq x_2$.	γ) $y=y_0$
iv) Ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α(x_0, y_0) και είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x.	δ) $y=y_0-\lambda\left(x-x_0\right)$
v) Ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.	ε) $x=x_0$
vi) Ευθεία που τέμνει τους άξονες στα σημεία Α(0, β) και Β(α, 0).	στ) $y-y_0=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_0\right)$
vii) Ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α(x_0, y_0) και είναι παράλληλη προς τον άξονα y΄y.	ζ) $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$
viii) Ευθεία που είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,\ A)$.	η) $y-y_0=\lambda\left(x-x_0\right)$
ix) Ευθεία που είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,\ -A)$.	θ) $Ax+By+\Gamma=0$
	ι) $Ax-By-\Gamma=0$
	ια) $Bx+Ay-\Gamma=0$
	ιβ) $\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}=0$
	ιγ) $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

2.17

Να συμπληρώσετε τα κενά στις προτάσεις που ακολουθούν.

i) Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας δεν ορίζεται μόνο στην περίπτωση που η ευθεία είναι ……………………………………………………………………………………………

ii) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που ενώνει τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ ορίζεται όταν…………………………………………………………………………..

iii) Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας παίρνει αρνητικές τιμές όταν η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x είναι ………………………………………………

iv) Δύο ευθείες ε_1 και ε_2 με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 κα λ_2 αντίστοιχα είναι κάθετες όταν ……………………………και παράλληλες όταν ……………………….................

v) Όταν μια ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x, έχει εξίσωση ……………………………………………………………………………………………….. ενώ όταν είναι παράλληλη προς τον άξονα y΄y, έχει εξίσωση ……………………………………………………………………..……………………

vi) Οποιαδήποτε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής ………………………………... που λέγεται και γενική μορφή εξίσωσης ευθείας.

2.18

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις.

i) Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει στο επίπεδο ευθεία όταν …………………………….. Ειδικότερα, όταν Α = 0, είναι ευθεία παράλληλη προς τον άξονα …………, ενώ όταν Β = 0, είναι ευθεία παράλληλη προς τον άξονα ………………. Τέλος, η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων όταν ……………………………………………………………………………………….…

ii) Τρία σημεία Α, Β και Γ είναι κορυφές ενός τριγώνου όταν η det(…...,……) είναι ……………………………………………………………………………………………

iii) Η ευθεία που ενώνει τα σημεία $A(x_0, y_0)$ και $B(-x_0, y_0)$ με $x_0 \neq 0$ είναι κάθετη προς τον ……………………………. Η ευθεία που ενώνει τα σημεία $A(x_0, y_0)$ και $B(x_0, -y_0)$ είναι κάθετη προς τον ………………………… Η ευθεία που ενώνει τα σημεία $A(x_0, y_0)$ και $B(y_0, x_0)$ είναι κάθετη προς ……………..……………………….……

2.19

Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που ενώνει τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

2.20

Να αποδείξετε τις ισοδυναμίες $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ και $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$.

2.21

Να αποδείξετε ότι η ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση $y = y_0 + \lambda(x - x_0)$.

2.22

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και:

i) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
ii) τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Α(0, β).

2.23

Να αποδείξετε ότι η ευθεία που ενώνει τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ έχει εξίσωση $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

2.24

Να αποδείξετε το θεώρημα που αναφέρει ότι κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ (1) και αντίστροφα, δηλαδή ότι κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

2.25

Σε καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς να κυκλώσετε το Α, αν είναι αληθής, και το Ψ, αν είναι ψευδής.

- Η ευθεία $y=-3x+5$ σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα x΄x. Α Ψ
- Οι ευθείες $x=5$ και $y=-2$ είναι κάθετες. Α Ψ
- Η εξίσωση $(\alpha+1)x+(\alpha^2-1)y+10=0$, $\alpha\in\Re$ παριστάνει πάντοτε ευθεία. Α Ψ
- Η ευθεία $3x+4y-1=0$ δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Α Ψ
- Η εξίσωση $y-2=\lambda(x-3)$, $\lambda\in\Re$ παριστάνει για τις διάφορες τιμές του λ όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α(3,2). Α Ψ

2.26

Να αντιστοιχίσετε κάθε σημείο της πρώτης στήλης στις ευθείες της δεύτερης στήλης στις οποίες ανήκουν:

Σημείο	Ευθεία
Α (2, 1)	
Β (2, 3)	$y=3$
Γ (1, 2)	$x=2$
Δ (0, 3)	$3x-2y=0$
Ε (0, 0)	$2x-5y=-8$
Ζ (2, 8)	

2.27

Να κυκλώσετε τη σωστή κάθε φορά απάντηση:

- Οι ευθείες $2x-y-4=0$ και $x-3y+3=0$ τέμνονται στο σημείο:
  Ο (0, 0) Α (2, 0) Β (0, 1) Γ (3, 2) Δ (1, 1)
- Αν η ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης, τότε συμπεραίνουμε ότι:
  $\Gamma=0$ $A\neq 0$ $B\neq 0$ $A=0$
- Μια ευθεία κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y=x$ είναι η:
  $y=x+5y$, $y=2$, $x+y=8$, $y=-2x$, $x=-1$.

2.28

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = 3x + 8$. Να γράψετε:

- Δύο ευθείες παράλληλες στην ε
- Δύο ευθείες κάθετες στην ε
- Την ευθεία την παράλληλη στην ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων
- Την ευθεία την κάθετη στην ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

2.29

Να κυκλώσετε την ευθεία που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων:

- $\varepsilon_1: 3x - 10y - 1 = 0$
- $\varepsilon_2: 3x - 10y - 6 = 0$
- $\varepsilon_3: 3x - 10y - 9 = 0$
- $\varepsilon_4: 3x - 10y + 6 = 0$

2.30

Οι ευθείες $2x + y + 2 = 0$ και $2x - y + 2 = 0$, είναι:

- ☐ Α. Παράλληλες
- ☐ Β. Κάθετες
- ☐ Γ. Συμμετρικές ως προς τον άξονα x΄x
- ☐ Δ. Συμμετρικές ως προς τον άξονα y΄y.

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

3.1

Σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ (λανθασμένη).

i) Οι εξισώσεις $x = \rho\eta\mu\varphi$ και $y = \rho\sigma\upsilon\nu\varphi$, $\varphi \in (0, 2\pi]$, είναι εξισώσεις κύκλου.	Σ☐	Λ☐
ii) Η εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ είναι εξίσωση εφαπτομένης κύκλου με κέντρο το σημείο $K(x_1, y_1)$ και ακτίνα ρ.	Σ☐	Λ☐
iii) Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.	Σ☐	Λ☐
iv) Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxy η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2px$ βρίσκεται πάντα στο ημιεπίπεδο που ορίζει ο άξονας $y'y$ και η εστία Ε.	Σ☐	Λ☐

Σε καθεμία από τις ερωτήσεις που ακολουθούν να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

3.2

Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ είναι πάντα εξίσωση κύκλου όταν:

☐ $A: \Gamma = A^2 + B^2$

☐ $B: 4\Gamma > A^2 + B^2$

☐ $\Gamma: AB = 2\Gamma$

☐ $\Delta: 4\Gamma = A^2 + B^2$

☐ $E: \Gamma < 0$

☐ Ζ: δεν συμβαίνει καμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις.

3.3

Ο κύκλος με εξίσωση $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ εφάπτεται πάντα στον άξονα x΄x όταν:

☐ Α: $x_0=\rho$ ☐ Β: $y_0=\rho$ ☐ Γ: $|x_0|=\rho$

☐ Δ: $|y_0|=\rho$ ☐ Ε: $|x_0|=|y_0|$ ☐ Ζ: $x_0=y_0$

3.4

Αν ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ έχει το κέντρο του στον άξονα y΄y, τότε είναι:

☐ Α: $B=0$ ☐ Β: $\Gamma=0$ ☐ Γ: $A=0$ ☐ Δ: $A=B$

3.5

Το σύνολο των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία είναι σταθερό και μεγαλύτερο της απόστασης αυτών των δύο σταθερών σημείων είναι:

☐ Α: κύκλος ☐ Β: παραβολή ☐ Γ: έλλειψη ☐ Δ: υπερβολή

3.6

Σε μια παραβολή άξονας συμμετρίας είναι:

☐ Α: ο άξονας x΄x ☐ Β: ο άξονας y΄y

☐ Γ: η διχοτόμος της πρώτης γωνίας των αξόνων

☐ Δ: η ευθεία που είναι κάθετη στη διευθετούσα και περνάει από την εστία

3.7

Οι κύκλοι με εξισώσεις $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ και $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ είναι ομόκεντροι όταν:

☐ Α: $2x_0=A$ και $2y_0=B$ ☐ Β: $2x_0+A=0$ και $2y_0+B=0$

☐ Γ: $x_0=A$ και $y_0=B$ ☐ Δ: $x_0=-A$ και $y_0=-B$

3.8

Η υπερβολή με εξίσωση $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$ τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία:

☐ Α: $A(\alpha,0)$ και $B(-\alpha,0)$ ☐ Β: $A(\beta,0)$ και $B(-\beta,0)$

☐ Γ: $A(\alpha,0)$ και $B(\beta,0)$ ☐ Δ: σε κανένα σημείο

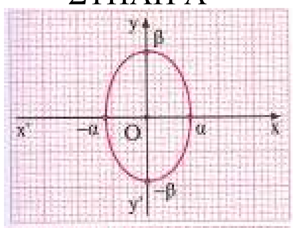
3.9

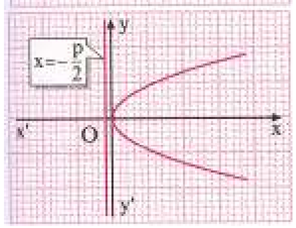
Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$. Για κάθε θέση του κύκλου που περιγράφεται στη στήλη Α να αντιστοιχίσετε μια σχέση μεταξύ των συντελεστών Α, Β και Γ από αυτές της στήλης Β.

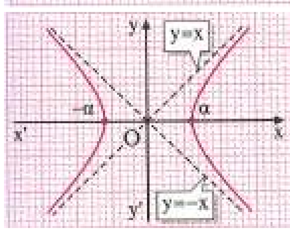
ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
	α) $A=B=\Gamma=0$
i) Ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.	β) $A^2+B^2=4\Gamma+1$
ii) Ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα x΄x.	γ) $A=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$
iii) Ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα y΄y.	δ) $A^2=4\Gamma$
iv) Ο κύκλος εφάπτεται και στους δύο άξονες.	ε) $B^2=4\Gamma$
v) Ο κύκλος έχει ακτίνα $\rho=\frac{1}{2}$.	στ) $\Gamma=0$
	ζ) $A^2=B^2=4\Gamma$

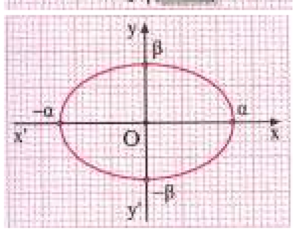
3.10 Σε καθεμία από τις γραφικές παραστάσεις της στήλης Α να αντιστοιχίσετε την κατάλληλη εξίσωση από τη στήλη Β.

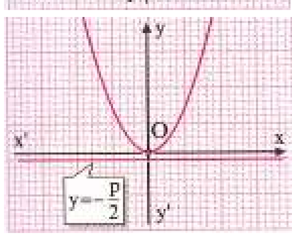
ΣΤΗΛΗ Α

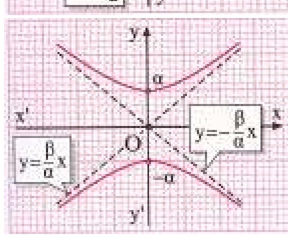
i) 

ii) 

iii) 

iv) 

v) 

vi) 

ΣΤΗΛΗ Β

- α) $y^2 = 2px,\ p>0$
- β) $y^2 = 2px,\ p<0$
- γ) $x^2 = 2py,\ p>0$
- δ) $x^2 = 2py,\ p<0$
- ε) $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ \alpha>\beta>0$
- στ) $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ 0<\alpha<\beta$
- ζ) $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$
- η) $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$
- θ) $x^2-y^2=\alpha^2$
- ι) $y^2-x^2=\alpha^2$

3.11

Να συμπληρώσετε τα κενά στις προτάσεις που ακολουθούν.

i) Αν η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ παριστάνει κύκλο, τότε ισχύει …………………...

ii) Αν το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K(x_0, y_0)$ και η ακτίνα του ρ, τότε η εξίσωσή του είναι ……………………………………………………………………………………………

iii) Δίνεται ένα σημείο Ε του επιπέδου και μια ευθεία του δ. Για κάθε σημείο Μ μιας παραβολής ισχύει…………………………………………………………………………………

iv) Η εστία και η διευθετούσα της παραβολής με εξίσωση $x^2=2py$ είναι ………………………. και ………………………… αντίστοιχα.

3.12

Να βρείτε την εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ.

3.13

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου με εξίσωση $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $P(x_1, y_1)$.

3.14

Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με $A^2+B^2-4\Gamma>0$ (1) και αντίστροφα κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει στο επίπεδο κύκλο.

3.15

Να αναπτύξετε τους ορισμούς του κύκλου, της παραβολής, της έλλειψης και της υπερβολής.

3.16

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Κωνική τομή	Εστίες	Συμμετρίες	Σημεία τομής με τον άξονα x΄x	Σημεία τομής με τον άξονα y΄y	Εξισώσεις κατακόρυφων εφαπτομένων
$x^2 = 2py$					
$y^2 = 2px$					
$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ \alpha>\beta$					
$\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1,\ \alpha>\beta$					
$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$					
$\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{x^2}{\alpha^2}=1$					
$x^2-y^2=\alpha^2$					
$y^2-x^2=\alpha^2$					

3.17

Σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ (λανθασμένη).

i) Οι κύκλοι με εξισώσεις $(x + 1)^2 + (y – 2)^2 = 9$ και $x^2 + y^2 + 2x – 4y +1 = 0$ είναι ομόκεντροι. Σ☐ Λ☐

ii) Τα σημεία Α(–1, 2) και Β(5, 6) είναι σημεία του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 – 4x – 8y + 11 = 0$. Σ☐ Λ☐

iii) Η ακτίνα του κύκλου με εξίσωση $(2x – 3)^2 + (2y – 1)^2 = 16$ είναι $\rho = 2$. Σ☐ Λ☐

iv) Ο κύκλος με εξίσωση $(x – 2)^2 + (y – 3)^2 = 9$ εφάπτεται στον άξονα y΄y. Σ☐ Λ☐

v) Οι κύκλοι με εξισώσεις $x^2 + y^2 = 1$ και $x^2 + y^2 – 6x – 8y + 9 = 0$ εφάπτονται. Σ☐ Λ☐

vi) Η εξίσωση της παραβολής με εστία Ε(0, 2) είναι $y^2 = 8x$. Σ☐ Λ☐

Σε καθεμία από τις παρακάτω ασκήσεις να σημειώσετε τη σωστή ή τις σωστές απαντήσεις.

3.18

Η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το Κ(–3, –2) και εφάπτεται στον άξονα x΄x είναι:

☐ Α: $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$ ☐ Β: $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$

☐ Γ: $(x – 3)^2 + (y – 2)^2 = 4$ ☐ Δ: $(x – 3)^2 + (y – 2)^2 = 9$

3.19

Οι κύκλοι με εξισώσεις $(x – \alpha)^2 + (y + \beta)^2 = \rho_1^2$ και $(x + \gamma)^2 + (y – \delta)^2 = \rho_2^2$ είναι ομόκεντροι όταν:

☐ Α: $|\alpha| = |\gamma|$ και $|\beta| = |\delta|$ ☐ Β: $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$

☐ Γ: $\gamma = – \alpha$ και $\beta = – \delta$ ☐ Δ: $\rho_1 = \rho_2$

3.20

Ο κύκλος με εξίσωση $(x – x_0)^2 + (y – y_0)^2 = \rho^2$ εφάπτεται στους άξονες x΄x και y΄y όταν:

☐ Α: το κέντρο του βρίσκεται στη διχοτόμο μιας γωνίας των αξόνων.

☐ Β: $x_0 = y_0 = \rho$ ☐ Γ: $|x_0| = |y_0|$

☐ Δ: $|x_0| = |y_0| = \rho$ ☐ Ε: $|x_0| = |y_0| = |\rho|$

3.21

Αν δίνονται οι κύκλοι C_1: $(x-\alpha)^2+y^2=\alpha^2$ και C_2: $x^2+(y-\alpha)^2=\alpha^2$ με $\alpha \in 3^*$, τότε:

☐ Α: ο C_1 εφάπτεται στον άξονα x΄x και ο C_2 στον y΄y.
☐ Β: η απόσταση των κέντρων τους είναι 2α.
☐ Γ: οι κύκλοι είναι ίσοι.
☐ Δ: τα σημεία τομής τους βρίσκονται στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων.
☐ Ε: οι κύκλοι εφάπτονται.

3.22

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $(x-\rho)^2+(y-\rho)^2=\rho^2$, $\rho \neq 0$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι λανθασμένη;

☐ Α: Ο κύκλος διέρχεται από τα σημεία Α(ρ, 0) και Β(0, ρ).
☐ Β: Το κέντρο του κύκλου βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων.
☐ Γ: Ο κύκλος εφάπτεται στους άξονες x΄x και y΄y.
☐ Δ: Το σημείο Μ(2ρ, 2ρ) είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.
☐ Ε: Το σημείο Α΄(ρ, 2ρ) είναι αντιδιαμετρικό του Α(ρ, 0).

3.23

Δίνονται δύο κύκλοι που έχουν εξισώσεις $x^2+y^2-2x+6y+1=0$ και $x^2+y^2+4x-2y+1=0$.

☐ Α: Οι κύκλοι είναι ομόκεντροι. ☐ Β: Οι κύκλοι εφάπτονται

☐ Γ: Τα κέντρα τους βρίσκονται στην ευθεία με εξίσωση $4x+3y-5=0$.

☐ Δ: Αν Κ, Λ τα κέντρα των κύκλων και ρ_1, ρ_2 οι ακτίνες τους, τότε ισχύει $\rho_1+\rho_2=2ΚΛ$.

3.24

Το σημείο της παραβολής με εξίσωση $y^2=4x$ που ισαπέχει από την εστία της, τη διευθετούσα και την αρχή των αξόνων έχει συντεταγμένες:

☐ Α: $(2, 2\sqrt{2})$ ☐ Β: $(1, 2)$ ☐ Γ: $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ ☐ Δ: $\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{2}\right)$

3.25

Δίνονται οι ελλείψεις με εξισώσεις $4x^2+9y^2=36$ και $20x^2+25y^2=500$.

☐ Α: Οι ελλείψεις έχουν τους μεγάλους άξονες πάνω στον άξονα y΄y.
☐ Β: Οι εστίες των ελλείψεων βρίσκονται πάνω στον άξονα y΄y.
☐ Γ: Οι ελλείψεις είναι όμοιες.
☐ Δ: Οι ελλείψεις έχουν τις ίδιες εστίες.
☐ Ε: Η πρώτη έλλειψη είναι πιο «στρογγυλή» από τη δεύτερη.

3.26

Αν η έλλειψη $C_1: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, η υπερβολή C_2: $x^2 - y^2 = 8$ και η παραβολή C_3: $y^2 = 2px$ έχουν κοινή εστία, τότε:

- ☐ Α: $\beta = 3$, $p = 8$ και η κοινή εστία είναι η $E(4, 0)$.
- ☐ Β: $\beta = -3$, $p = -8$ και η κοινή εστία είναι η $E(-4, 0)$.
- ☐ Γ: $\beta = 3$, $p = -8$ και η κοινή εστία είναι η $E(4, 0)$ ή $E'(-4, 0)$.
- ☐ Δ: $\beta = -3$, $p = 8$ και η κοινή εστία είναι η $E(4, 0)$ ή $E'(-4, 0)$.
- ☐ Ε: σωστή είναι η απάντηση Α ή η Β.

3.27

Τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $|AM - BM| = 2000$ με $A(-2004, 0)$ και $B(2004, 0)$ είναι σημεία:

- ☐ Α: κύκλου
- ☐ Β: παραβολής
- ☐ Γ: έλλειψης
- ☐ Δ: υπερβολής

3.28

Σε καθεμία από τις εξισώσεις της στήλης Α αντιστοιχεί μία απάντηση για τις τιμές του $\lambda \in 3$ από τη στήλη Β, για τις οποίες οι εξισώσεις αυτές παριστάνουν κύκλο. Αν στη στήλη Γ βρίσκονται οι τιμές του λ για τις οποίες η ακτίνα του κύκλου είναι ρ = 1, να κάνετε τη σωστή αντιστοίχιση.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β	ΣΤΗΛΗ Γ
	α) $\lambda \in 3^*$	1. $\lambda = 0$ ή $\lambda = \frac{1}{5}$
i) $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 4\lambda y + \lambda - 1 = 0$	β) $\lvert\lambda\rvert < 1$	2. $\lambda = 1$
ii) $2x^2 + 2y^2 - 2\lambda x + 6\lambda y + 10\lambda - 5 = 0$	γ) $\lambda \in 3$	3. $\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{10}}{5}$
iii) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1 - \lambda^2$	δ) $\lambda \neq 1$	4. $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$
iv) $(x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2$	ε) $\lambda < -1$ ή $\lambda > 4$	5. $\lambda = \pm 1$
v) $x^2 + y^2 + 2\lambda x + 2y + 3\lambda + 5 = 0$	στ) $\lambda = -1$	6. $\lambda = 0$
vi) $\lambda x^2 + \lambda y^2 = -1$	ζ) $\lambda > 0$	7. $\lambda = -1$
	η) $\lambda < 0$	8. $\lambda \in 3$

3.29

Σε κάθε εξίσωση κύκλου από αυτές που αναφέρονται στη στήλη Α αντιστοιχεί ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης του κύκλου στο δοθέν σημείο Α από τη στήλη Β. Να κάνετε τη σωστή αντιστοίχιση.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
	α) $\lambda = \frac{4}{3}$
i) $x^2 + y^2 = 25$ στο $A(3, 4)$	β) $\lambda = -\frac{3}{4}$
ii) $(x - ημθ)^2 + (y - συνθ)^2 = \frac{1}{4}$ στο $A\left(\frac{ημθ}{2}, \frac{συνθ}{2}\right)$	γ) $\lambda = -εφθ$
iii) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$ στο $A(-1,1)$	δ) $\lambda = \frac{ημθ}{συνθ}$
iv) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ στο $A(4,2)$	ε) $\lambda = 1$
v) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ στο $A(2,0)$	στ) δεν ορίζεται
	ζ) $\lambda = 0$
	η) $\lambda = -1$

3.30

Τα σημεία που αναγράφονται στη στήλη Α αποτελούν εστίες παραβολών που οι εξισώσεις τους αναγράφονται στη στήλη Β. Να κάνετε τις αντιστοιχίσεις και στη συνέχεια να γράψετε στη στήλη Γ για κάθε παραβολή την εξίσωση της διευθετούσας της.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β	ΣΤΗΛΗ Γ
	α) $y^2 = 4x$	1. ....
i) $E(1,0)$	β) $y^2 = -4x$	2. ....
ii) $E(0,2)$	γ) $y^2 = 8x$	3. ....
iii) $E(-1,0)$	δ) $y^2 = -8x$	4. ....
iv) $E(-2,0)$	ε) $x^2 = 4y$	5. ....
v) $E(0,1)$	στ) $x^2 = -4y$	6. ....
vi) $E(0,-2)$	ζ) $x^2 = 8y$	7. ....
	η) $x^2 = -8y$	8. ....

3.31

Σε κάθε πρόταση που γράφεται στη στήλη Α για την παραβολή $C: y^2 = 2px$ αντιστοιχεί μία τιμή του p που γράφεται στη στήλη Β. Να κάνετε τη σωστή αντιστοίχιση.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
	α) $p = \frac{1}{2}$
i) Το σημείο $A(4,4)$ είναι κοινό σημείο με την παραβολή $x^2 = 2py$.	β) $p = -9$
ii) Η παραβολή διέρχεται από το σημείο Μ(2,-2).	γ) $p = 9$
iii) Η ευθεία με εξίσωση $x = -1$ είναι διευθετούσα της παραβολής.	δ) $p = 2$
iv) Η παραβολή έχει εστία το σημείο $E(1,0)$.	ε) $p = -2$
v) Η ευθεία με εξίσωση $3x - 2y + 6 = 0$ είναι εφαπτομένη της παραβολής.	στ) $p = 1$
	ζ) $p = -\frac{1}{2}$

3.32 Στην στήλη Α αναγράφονται κάποια στοιχεία της έλλειψης και στη στήλη Β υπάρχει η εξίσωση της έλλειψης σύμφωνα με αυτά τα στοιχεία. Να κάνετε τη σωστή αντιστοίχιση.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
	α) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$
i) $(EE') = 8$ και ε=$\frac{4}{5}$.	β) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$
ii) Μεγάλος άξονας $(AA') = 10$ και η έλλειψη διέρχεται από το σημείο $M\left(4, \frac{9}{5}\right)$.	γ) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
iii) Εστίες $E(0,3)$, $E'(0,\text{-}3)$ και μικρός άξονας $(B'B) = 8$	δ) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
iv) Διέρχεται από τα σημεία $A(5,0)$ και $B(0,3)$.	ε) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$
v) Έλλειψη όμοια με την έλλειψη της περίπτωσης (iv) και εστίες $E(-4,0)$ και $E'(4,0)$.	στ) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

3.33 Σε καθεμία από τις εξισώσεις των κωνικών τομών της στήλης Α αντιστοιχεί η γραφική της παράσταση από τη στήλη Β. Να κάνετε τη σωστή αντιστοίχιση.

ΣΤΗΛΗ Α

i) $x^2+y^2-4x-6y+4=0$

ii) $\left(x\ -2\right)^2+\left(y-3\right)^2=1$

iii) $3y^2=4x$

iv) $y=x^2$

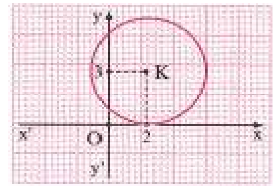
v) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

vi) $y^2-x^2=4$

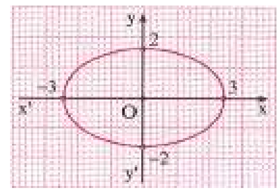
vii) $\left(x-y\right)\left(x+y\right)=4$

ΣΤΗΛΗ Β

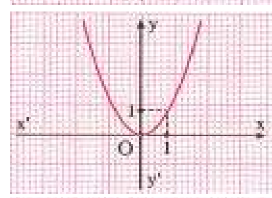
α)



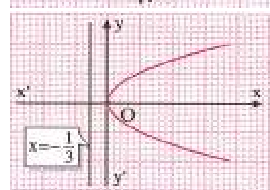
β)



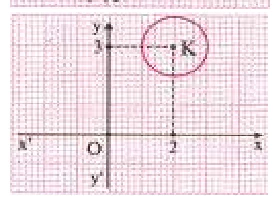
γ)



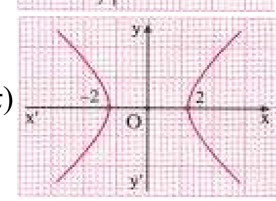
δ)



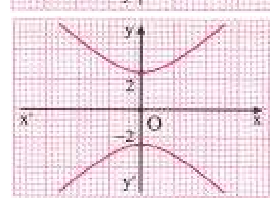
ε)



στ)



ζ)



3.34

Κάθε κωνική τομή από τη στήλη Α έχει κοινή εστία με μία κωνική τομή από τη στήλη Β και με μία από τη στήλη Γ. Να βρείτε ποια είναι η σωστή αντιστοίχιση σχηματίζοντας τριάδες κωνικών τομών με κοινή εστία χωρίς σε μία τριάδα να υπάρχουν κωνικές τομές του ίδιου είδους.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β	ΣΤΗΛΗ Γ
i) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$	α) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$	1. $x^2-y^2=2$
ii) $x^2-y^2=8$	β) $x^2=-4y$	2. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$
iii) $y^2=8x$	γ) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$	3. $y^2=-16x$
iv) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{10}=1$	δ) $y^2=12x$	4. $4y^2-12x^2=3$
v) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$	ε) $y^2=-20x$	5. $\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{9}=1$

3.35

i) Ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ έχει κέντρο το σημείο ………………………….. και ακτίνα ……………………………………

ii) Το σημείο $A(-1,-1)$ του κύκλου με εξίσωση $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ έχει αντιδιαμετρικό το σημείο …………………………………………..

iii) Ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(2,1)$ που διέρχεται από το σημείο $A(5,5)$ έχει εξίσωση ……………………………………………

iv) Ο κύκλος που εφάπτεται στους ημιάξονες Ox και Oy και έχει ακτίνα $\rho=2$ έχει εξίσωση ……………………………………………

v) Η εφαπτομένη του κύκλου με εξίσωση $x^2+y^2=25$ στο σημείο $A(3,4)$ έχει εξίσωση ……………………………………………

3.36

i) Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = x$ έχει εστία το σημείο ……………………… και διευθετούσα την ευθεία με εξίσωση ………………………………………………………………….………

ii) Οι παραβολές με εξισώσεις $y^2 = 2x$ και $x^2 = 2y$ έχουν κοινά τα σημεία ………………………

iii) Η παραβολή που είναι γραφική παράσταση συνάρτησης και περνάει από το σημείο $A(1,4)$ έχει εξίσωση ……………………………………………………………………………….……

iv) Η παραβολή με εστία το σημείο $E(-2,0)$ έχει εξίσωση ………………………………………

v) Η εφαπτομένη της παραβολής $C: y^2 = 8x$ στο σημείο $A(2,4)$ έχει εξίσωση ………………………………………

Στις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση:

3.37

Ο κύκλος $(x-\alpha)^2 + y^2 = \alpha^2$

- Α) εφάπτεται στον $x'x$
- Β) διέρχεται από το σημείο $A(0,\alpha)$
- Γ) εφάπτεται στον $y'y$

3.38

Η ευθεία $y = x + 1$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$

- Α) τέμνονται
- Β) εφάπτονται
- Γ) δεν έχουν κοινά σημεία

3.39

Έστω οι κύκλοι $x^2 + (y-2)^2 = 4$ και $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Το σημείο $M(1,1)$ είναι

- Α) εσωτερικό του ενός κύκλου και εξωτερικό του άλλου
- Β) σημείο και των δύο κύκλων
- Γ) εσωτερικό και των δύο κύκλων
- Δ) εξωτερικό και των δύο κύκλων

3.40

Έστω ο κύκλος με παραμετρικές εξισώσεις:

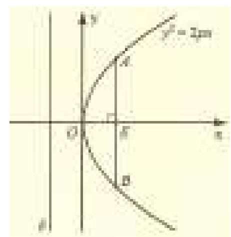
$$x = 2\sigma\upsilon\nu\varphi, \qquad y = 2\eta\mu\varphi, \qquad \text{όπου } \varphi \in [0, 2\pi).$$

Το σημείο $A\left(1, \sqrt{3}\right)$ είναι

A) εσωτερικό του κύκλου
B) εξωτερικό του κύκλου
Γ) σημείο του κύκλου

3.41

Στο διπλανό σχήμα η δ είναι η διευθετούσα και το Ε είναι η εστία της παραβολής $y^2 = 2px$. Το μήκος της χορδής ΑΒ είναι ίσο με:



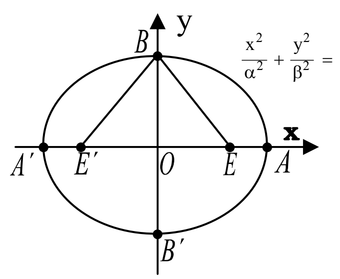
A) $AB = \frac{p}{2}$, B) $AB = p$,
Γ) $AB = 2p$, Δ) $AB = 4p$

3.42

Στο διπλανό σχήμα τα σημεία Ε΄,Ε είναι οι εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

Το μήκος του ΒΕ είναι

A) μεγαλύτερο του α, B) μικρότερο του α,
Γ) ίσο με α.



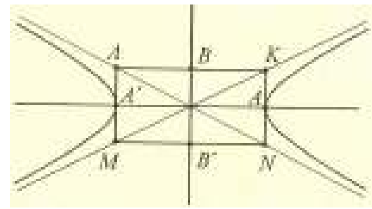
3.43

Αν οι ελλείψεις $\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ και $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$, $\alpha > 2$ είναι όμοιες, τότε

A) $\alpha = 6$, B) $\alpha = 12$, Γ) $\alpha = 3$, Δ) $\alpha = 4$.

3.44

Στο διπλανό σχήμα το ΚΛΜΝ είναι το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Το μήκος ΟΚ είναι



Α) μεγαλύτερο του γ

Β) ίσο με γ

Γ) μικρότερο του γ

3.45

Έστω ο κύκλος $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$, $\alpha,\beta,\rho>0$. Να συνδέσετε με μια γραμμή τα δεδομένα της πρώτης στήλης με τα αντίστοιχά τους στη δεύτερη στήλη.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
	• $\alpha=\beta=\rho$
i) Ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων •	• $\alpha=0$
ii) Ο κύκλος έχει το κέντρο του στον άξονα x΄x •	• $\alpha^2+\beta^2=\rho^2$
iii) Ο κύκλος έχει το κέντρο του στον άξονα y΄y •	• $\beta=0$
iv) Ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα x΄x •	• $\alpha=\beta\neq\rho$
v) Ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα y΄y •	• $\rho=\alpha$
vi) Ο κύκλος εφάπτεται και στους δύο άξονες •	• $\rho=\beta$
	• $\alpha=\beta=0$

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Έννοια Διαιρετότητας

Στην Ευκλείδεια διαίρεση ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση κατά την οποία το υπόλοιπο είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή η περίπτωση της τέλειας διαίρεσης. Την περίπτωση αυτή θα εξετάσουμε στη συνέχεια.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω α, β δύο ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Θα λέμε ότι ο β **διαιρεί τον** α και θα γράφουμε $\beta | \alpha$, όταν η διαίρεση του α με τον β είναι τέλεια, δηλαδή όταν υπάρχει ακέραιος κ, τέτοιος, ώστε $\alpha = \kappa\beta$.

Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι ο β είναι **διαιρέτης** ή **παράγοντας** του α ή ότι ο α **διαιρείται με τον** β ή ακόμα ότι ο α **είναι πολλαπλάσιο του** β, και γράφουμε $\alpha = \pi o\lambda\beta$.
Για να δηλώσουμε ότι ο ακέραιος β δε διαιρεί τον ακέραιο α, γράφουμε $\beta \nmid \alpha$ ή ισοδύναμα $\alpha \neq \pi o\lambda\beta$. Για παράδειγμα, $5 | 20$, αφού $20 = 4 \cdot 5$, ενώ $5 \nmid 18$, αφού η διαίρεση του 18 με τον 5 δεν είναι τέλεια.
Αν $\beta | \alpha$, τότε $\alpha = \kappa\beta$ ή ισοδύναμα $\alpha = (-\kappa)(-\beta)$, που σημαίνει ότι αν ο β είναι διαιρέτης του α, τότε και ο $-\beta$ είναι διαιρέτης του α. Επομένως, οι διαιρέτες ενός ακέραιου εμφανίζονται κατά ζεύγη αντίθετων ακέραιων.

Ως άμεσες συνέπειες του παραπάνω ορισμού έχουμε τις εξής:

- $\pm 1 | \alpha$ και $\pm \alpha | \alpha$ για κάθε $\alpha \in Z^*$
- $\beta | 0$, για κάθε $\beta \in Z^*$
- Αν $\beta | \alpha$, τότε $\kappa\beta | \kappa\alpha$, για κάθε $\kappa \in Z^*$

Τονίζουμε ότι στο συμβολισμό $\beta | \alpha$, οι αριθμοί α και β είναι πάντα ακέραιοι και $\beta \neq 0$.
Θα γνωρίσουμε τώρα μερικές χρήσιμες ιδιότητες της διαιρετότητας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Έστω α, β, γ ακέραιοι. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες

i) Αν $\alpha | \beta$ και $\beta | \alpha$, τότε $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$.

ii) Αν $\alpha | \beta$ και $\beta | \gamma$, τότε $\alpha | \gamma$.

iii) Αν $\alpha | \beta$, τότε $\alpha | \lambda\beta$ για κάθε ακέραιο λ.

iv) Αν $\alpha | \beta$ και $\alpha | \gamma$, τότε $\alpha | (\beta + \gamma)$.

v) Αν $\alpha | \beta$ και $\beta \neq 0$, τότε $|\alpha| \leq |\beta|$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Επειδή $\alpha | \beta$ και $\beta | \alpha$, υπάρχουν ακέραιοι κ, λ, τέτοιοι, ώστε $\beta = \kappa\alpha$ και $\alpha = \lambda\beta$, οπότε $\alpha = \kappa\lambda\alpha$ και επομένως, $\kappa\lambda = 1$, που σημαίνει ότι $\kappa = \lambda = 1$ ή $\kappa = \lambda = -1$, δηλαδή ότι $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$.

ii) Επειδή $\alpha | \beta$ και $\beta | \gamma$, υπάρχουν ακέραιοι κ, λ, τέτοιοι, ώστε $\beta = \kappa\alpha$ και $\gamma = \lambda\beta$, οπότε $\gamma = \lambda\kappa \cdot \alpha$ και άρα $\alpha | \gamma$.

iii) Επειδή $\alpha | \beta$ υπάρχει ακέραιος κ, τέτοιος, ώστε $\beta = \kappa\alpha$, οπότε $\lambda\beta = \lambda\kappa \cdot \alpha$ και άρα $\alpha | \lambda\beta$.

iv) Επειδή $\alpha | \beta$ και $\alpha | \gamma$, υπάρχουν ακέραιοι κ, λ, τέτοιοι, ώστε $\beta = \kappa\alpha$ και $\gamma = \lambda\alpha$, οπότε $\beta + \gamma = (\kappa + \lambda)\alpha$ και άρα $\alpha | (\beta + \gamma)$.

v) Επειδή $\alpha | \beta$ και $\beta \neq 0$, υπάρχει ακέραιος $\kappa \neq 0$ με $\beta = \kappa\alpha$. Επομένως, $|\beta| = |\kappa| \cdot |\alpha| \geq |\alpha|$, αφού $|\kappa| \geq 1$.

Από τις ιδιότητες (iii) και (iv) του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει ότι:

"Αν $\alpha | \beta$ και $\alpha | \gamma$, τότε $\alpha | (\kappa\beta + \lambda\gamma)$ για όλους τους ακέραιους κ και λ."

Ο ακέραιος $\kappa\beta + \lambda\gamma$, όπου $\kappa, \lambda \in Z$ λέγεται **γραμμικός συνδυασμός** των β και γ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Α. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

1.1

Αν για δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ ισχύει $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{AE}$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΔΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

1.2

Δίνονται τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ και έστω Ο, το μέσο του τμήματος ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

1.3

Για ένα τυχαίο εξάγωνο $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{P_1P_3}+\overrightarrow{P_2P_4}+\overrightarrow{P_3P_5}+\overrightarrow{P_4P_6}+\overrightarrow{P_5P_1}+\overrightarrow{P_6P_2}=\vec{0}$$

1.4

Αν $\vec{\alpha}$ είναι ένα διάνυσμα, τι μπορείτε να πείτε για το μέτρο και την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{\alpha}_0=\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\cdot\vec{\alpha}$;

1.5

Αν $\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{BK}-2\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B\Lambda}+3\overrightarrow{AM}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά.

1.6

Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι διάμεσοι τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{\Gamma Z}=\vec{0}$.

1.7

Αν K, Λ, M είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma, \Gamma A, AB,$ αντιστοίχως, τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο O ισχύει:
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{O\Lambda}+\overrightarrow{OM}.$

1.8

Αν M και N είναι τα μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$, αντιστοίχως, ενός τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=4\overrightarrow{MN}.$

1.9

Δίνεται το μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και σημείο Γ τέτοιο ώστε να ισχύει $\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\mu\overrightarrow{AB}.$ Να αποδείξετε ότι $\lambda-\mu=1.$

1.10

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν $\overrightarrow{A\Delta}=\kappa\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\kappa\overrightarrow{A\Gamma}$ να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\Delta E}\,//\,\overrightarrow{B\Gamma}.$

1.11

Να αποδείξετε ότι αν ισχύουν δύο από τις σχέσεις $x\overrightarrow{KA}+y\overrightarrow{KB}+z\overrightarrow{K\Gamma}=\vec{0},$ $x\overrightarrow{\Lambda A}+y\overrightarrow{\Lambda B}+z\overrightarrow{\Lambda\Gamma}=\vec{0},$ $x+y+z=0,$ τότε θα ισχύει και η τρίτη (το σημείο Κ είναι διαφορετικό από το Λ).

1.12

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Να βρείτε σημείο Μ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}=\overrightarrow{M\Delta}$$

1.13

Δίνεται τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ και έστω $Μ$ και $Ν$ τα μέσα των διαγωνίων του $ΑΓ$ και $ΒΔ$ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι αν $4\overrightarrow{ΜΝ}=\overrightarrow{ΑΔ}-\overrightarrow{ΒΓ}$, τότε το τετράπλευρο αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

1.14

Δίνονται τα σημεία $Α, Β$ και $Γ$. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο $Μ$ το διάνυσμα $3\overrightarrow{ΜΑ}-5\overrightarrow{ΜΒ}+2\overrightarrow{ΜΓ}$ είναι σταθερό.

1.15

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{α}=\left(λ^2-4,\ λ^2-3λ+2\right)$, $λ\in\Re$. Για ποια τιμή του $λ$ είναι:

i) $\vec{α}=\vec{0}$;   ii) $\vec{α}\neq\vec{0}$ και $\vec{α}\,//\,x'x$;

1.16

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{α}=\left(λ^2-3λ+2,\ \ 2λ^2-3λ-2\right)$ και $\vec{β}=\left(λ^2-5λ+6,\ \ -3λ^2+7λ-2\right)$. Να βρείτε το $λ\in\Re$, ώστε να είναι $\vec{α}=\vec{β}$.

1.17

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε τα διανύσματα $\vec{α}=\left(x,1\right)$ και $\vec{β}=\left(4,x\right)$ να είναι ομόρροπα.

1.18

Αν $\vec{u}=\left(3,4\right)$, ποιο διάνυσμα είναι συγγραμμικό με το $\vec{u}$ και έχει διπλάσιο μέτρο από το $\vec{u}$;

1.19

Δίνονται τα σημεία $A(-1,6)$ και $B(-9,-2)$. Να βρείτε

i) Το σημείο του άξονα x΄x που ισαπέχει από τα Α και Β

ii)Το σημείο του άξονα y΄y που ισαπέχει από τα Α και Β.

1.20

Αν τα σημεία $K\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$, $\Lambda\left(3,\frac{7}{2}\right)$, $M\left(4,\frac{5}{2},\right)$, $N(3,1)$ και $\Xi\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ είναι τα μέσα των πλευρών AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE και EA, αντιστοίχως, του πενταγώνου $AB\Gamma\Delta E$, να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του πενταγώνου.

1.21

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων οι τετμημένες δύο σημείων A και B είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)x-17=0$. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\Re$, ώστε το μέσον του τμήματος AB να έχει τετμημένη ίση με 4.

1.22

Αν $\vec{\alpha}=(1,0)$ και $\vec{\beta}=(1,1)$, να βρείτε το $\lambda\in\Re$, ώστε:

i) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

ii) Τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

1.23

Να βρείτε τα διανύσματα που είναι κάθετα στο $\vec{u}=(3,-2)$ και έχουν μέτρο ίσο με 1.

1.24

Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$, να υπολογίσετε τον $\kappa \in \Re$, ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

1.25

Αν $\vec{\alpha}$=(κ, 1) και $\vec{\beta}$=(4, 3), να βρείτε τον $\kappa \in \Re$ ώστε να ισχύει:

(i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ (ii) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{4}$ (iii) $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta}$.

1.26

Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{2\pi}{3}$, να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

1.27

Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μηδενικά, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} \perp \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) \Leftrightarrow \text{συν}\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right) = \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}.$$

1.28

Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = |\vec{\alpha}|\vec{\beta} + |\vec{\beta}|\,\vec{\alpha}$ και $\vec{v} = |\vec{\alpha}|\vec{\beta} - |\vec{\beta}|\vec{\alpha}$ είναι κάθετα.

1.29

Να αποδείξετε ότι για δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, το διάνυσμα $\vec{v} = \vec{\beta}^2\vec{\alpha} - \left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right)\vec{\beta}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$.

1.30

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(2,-4) και $\vec{\beta}$=(-8,5). Να αναλύσετε το $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{\alpha}$.

1.31

Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου που κατασκευάζεται με τα διανύσματα $5\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$, αν $|\vec{\alpha}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=3$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=45^0$.

1.32

Να αποδείξετε ότι:

(i) $|\vec{u}+\vec{v}|^2+|\vec{u}-\vec{v}|^2=2|\vec{u}|^2+2|\vec{v}|^2$.

(ii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}|\vec{u}+\vec{v}|^2-\frac{1}{4}|\vec{u}-\vec{v}|^2$.

1.33

Δίνονται τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι:

i) Ο φορέας του διανύσματος $\vec{u}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$ διχοτομεί τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

ii) Ο φορέας του διανύσματος $\vec{v}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}-|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$ διχοτομεί την παραπληρωματική γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

1.34

Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$, $\left(\vec{\gamma}\right)=3$ και $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, να υπολογίσετε τα:

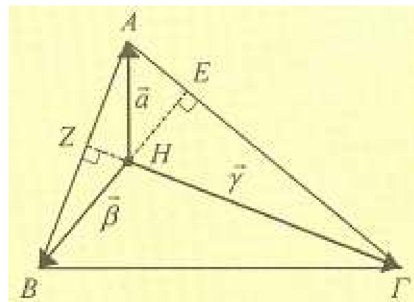
i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$, $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$

ii) $\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$, $\text{συν}\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)$, $\text{συν}\left(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\alpha}}\right)$, και να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}=-2\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}=3\vec{\beta}$.

1.35

Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\kappa,\lambda)$ και $\vec{\beta}(\mu,\nu)$ είναι κάθετα και έχουν μέτρα ίσα με τη μονάδα, να δείξετε ότι $(\kappa\nu-\lambda\mu)^2=1$.

1.36



Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα δύο ύψη του ΒΕ και ΓΖ τέμνονται στο Η. Έστω $\vec{HA}=\vec{\alpha}$, $\vec{HB}=\vec{\beta}$ και $\vec{H\Gamma}=\vec{\gamma}$.

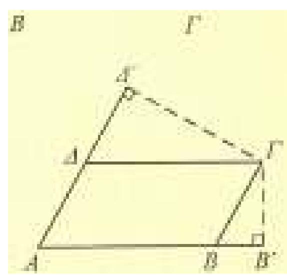
i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{A\Gamma}$ και $\vec{B\Gamma}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

iii) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$.

Με τη βοήθεια της ισότητας αυτής να δείξετε ότι $AH\perp B\Gamma$. Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχτεί;

1.37



Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και τα Β΄, Δ΄ οι προβολές του Γ στις ΑΒ και ΑΔ αντιστοίχως.

Να αποδείξετε ότι $\vec{AB}\cdot\vec{AB'}+\vec{A\Delta}\cdot\vec{A\Delta'}=\vec{A\Gamma}^2$

1.38

Αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ, μ με $|\kappa|+|\lambda|+|\mu|\neq 0$, τέτοιοι, ώστε

$$\kappa+\lambda+\mu=0 \text{ και, } \kappa\vec{OA}+\lambda\vec{OB}+\mu\vec{O\Gamma}=\vec{0}$$

να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά και αντιστρόφως.

1.39

Αν για το σημείο Μ του επιπέδου ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{BM} = \lambda\overrightarrow{A\Gamma} + \mu\overrightarrow{BA}$, να αποδείξετε ότι το Μ είναι το μέσον της πλευράς ΒΓ.

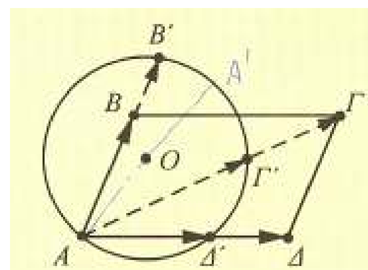
1.40

Έστω Ο και Α δύο σταθερά σημεία του επιπέδου με $\left|\overrightarrow{OA}\right| = 3$. Ποια γραμμή γράφουν τα σημεία Μ του επιπέδου για τα οποία είναι $\overrightarrow{OM} \cdot \left(\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OA}\right) = 7$;

1.41

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και κύκλος κέντρου Ο που διέρχεται από την κορυφή Α και τέμνει τις ευθείες ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ στα Β΄, Γ΄ και Δ΄ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{A\Delta'} = \overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{A\Gamma'}.$$



1.42

Αν $\vec{\alpha} = (x,1)$ και $\vec{\beta} = (1,x)$, να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ (λανθασμένη) στις παρακάτω προτάσεις.

i) Αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$, τότε $x = 1$. Σ☐ Λ☐

ii) Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, τότε $x = 0$. Σ☐ Λ☐

iii) Αν $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 60^\circ$, τότε $x = 2$. Σ☐ Λ☐

1.43

Αν $\vec{\alpha}=(1,-3)$, $\vec{\beta}=(-1,3)$ και $\vec{\gamma}=(2,-6)$, να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ (λανθασμένη) στις παρακάτω σχέσεις.

		Σ	Λ
i)	$\vec{\alpha}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}$	☐	☐
ii)	$\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=0$	☐	☐
iii)	$\vec{\gamma}\perp\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$	☐	☐
iv)	$\vec{\gamma}=3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$	☐	☐
v)	$\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$	☐	☐

1.44

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(\lambda^2-\lambda-2,\ \lambda^2-3\lambda-4\right)$ και $\vec{\beta}=\left(\lambda^2-2\lambda,\ \lambda^2-1\right)$. Να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ (λανθασμένη) στις προτάσεις που ακολουθούν.

		Σ	Λ
i)	Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$, τότε $\lambda=-1$.	☐	☐
ii)	Το $\vec{\alpha}$ είναι αντίθετο του $\vec{\beta}$ για κάποιο $\lambda\in 3$.	☐	☐
iii)	Αν $\lambda=\frac{1}{4}$, τότε $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$.	☐	☐
iv)	Αν $\vec{\beta}\parallel y'y$, τότε $\lambda=1$ ή $\lambda=-1$.	☐	☐
v)	Αν $\vec{\alpha}\parallel x'x$, τότε $\lambda=-1$ ή $\lambda=4$.	☐	☐
vi)	Αν $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$, τότε $\lambda=\frac{1}{4}$ ή $\lambda=-1$.	☐	☐

1.45

Ο Πέτρος και ο Γιάννης ξεκινούν από ένα σταυροδρόμι της πόλης τους ακολουθώντας δύο διαφορετικές και κάθετες μεταξύ τους κατευθύνσεις. Αφού έχουν διανύσει κάποια απόσταση, ο Πέτρος στρίβει προς τα δεξιά κατά 60° και ο Γιάννης προς τα αριστερά κατά 30°. Ο φίλος τους ο Μανώλης ισχυρίζεται ότι οι δρόμοι που βαδίζουν τώρα είναι παράλληλοι. Είναι σωστός ή λανθασμένος ο ισχυρισμός του;

Σε καθεμία από τις παρακάτω ασκήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

1.46

Για κάθε τετράδα σημείων Α, Β, Γ και Δ ισχύει:

☐ Α: $\overrightarrow{\text{ΑΔ}}+\overrightarrow{\text{ΑΓ}}=\overrightarrow{\text{ΒΓ}}+\overrightarrow{\text{ΒΔ}}$ ☐ Β: $\overrightarrow{\text{ΑΔ}}+\overrightarrow{\text{ΒΓ}}=\overrightarrow{\text{ΑΓ}}+\overrightarrow{\text{ΒΔ}}$

☐ Γ: $\overrightarrow{\text{ΑΔ}}+\overrightarrow{\text{ΒΔ}}=\overrightarrow{\text{ΑΓ}}+\overrightarrow{\text{ΒΓ}}$ ☐ Δ: $\overrightarrow{\text{ΑΔ}}-\overrightarrow{\text{ΑΓ}}=\overrightarrow{\text{ΒΓ}}+\overrightarrow{\text{ΒΔ}}$

1.47

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΒΕ το άθροισμα $\overrightarrow{\text{ΒΑ}}+\overrightarrow{\text{ΒΓ}}$ ισούται με:

☐ Α: $\overrightarrow{\text{ΒΕ}}$ ☐ Β: $\overrightarrow{\text{ΓΑ}}$ ☐ Γ: $2\overrightarrow{\text{ΕΒ}}$

☐ Δ: $2\overrightarrow{\text{ΒΕ}}$ ☐ Ε: $2\,\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$

1.48

Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\overrightarrow{\text{ΑΔ}}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}=\vec{\beta}$. Αν Μ είναι το μέσο του ΑΒ, τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{\text{ΔΜ}}$ ισούται με:

☐ Α: $\dfrac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}$ ☐ Β: $\dfrac{\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{2}$ ☐ Γ: $\vec{\alpha}+\dfrac{1}{2}\vec{\beta}$

☐ Δ: $\dfrac{1}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ ☐ Ε: $\dfrac{1}{2}\vec{\beta}-\vec{\alpha}$

1.49

Αν ισχύει $\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}=0$ με $\kappa,\lambda\in 3^*$, τότε πάντα σωστή η σχέση:

☐ Α: $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ ☐ Β: $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ ☐ Γ: $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$

☐ Δ: $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ ☐ Ε: $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ συγγραμμικά

1.50

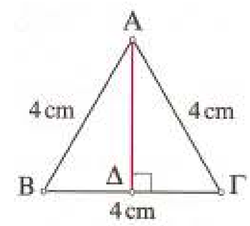
Αν $\vec{\alpha}=(-1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,-1)$, τότε η σχέση $(1-\lambda)\vec{\alpha}+(\mu+1)\vec{\beta}=\vec{0}$ ισχύει για:

☐ Α: $\lambda=\mu=0$ ☐ Β: $\lambda=\mu=1$ ☐ Γ: $\lambda=1$ και $\mu=-1$

☐ Δ: $\lambda=-1$ και $\mu=1$ ☐ Ε: καμία τιμή των $\lambda,\mu\in 3$

1.51

Από τις σχέσεις που ακολουθούν και οι οποίες αναφέρονται στο διπλανό σχήμα είναι λανθασμένη η:



Α: $\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Delta}=0$ Β: $\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=8$

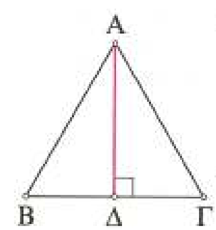
Γ: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=-8$ Δ: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}=12$

Ε: $\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Delta A}=12$ Ζ: καμία.

1.52

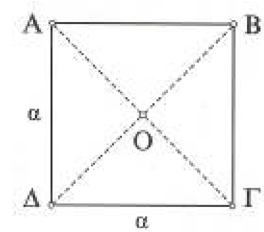
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ. Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία που βρίσκεται στη στήλη Α με το μέτρο της σε μοίρες που βρίσκεται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
i) $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}}\right)$	α) 60^o
ii) $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{A\Delta}}\right)$	β) 90^o
iii) $\left(\widehat{\overrightarrow{A\Gamma},\overrightarrow{B\Gamma}}\right)$	γ) 120^o
iv) $\left(\widehat{\overrightarrow{A\Delta},\overrightarrow{A\Gamma}}\right)$	δ) 150^o
v) $\left(\widehat{\overrightarrow{B\Delta},\overrightarrow{A\Delta}}\right)$	ε) 30^o
vi) $\left(\widehat{\overrightarrow{B\Gamma},\overrightarrow{\Gamma A}}\right)$	



1.53

Δίνεται τετράγωνο πλευράς α. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα στοιχεία της στήλης Β.



ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
	α) α^2
i) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}$	β) $-\alpha^2$
ii) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$	γ) 2α
iii) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$	δ) -2α
iv) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$	ε) 0
v) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$	στ) $\alpha\sqrt{2}$
vi) $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta O}$	ζ) $\dfrac{\alpha^2}{2}$
	η) $-\dfrac{\alpha^2}{2}$

1.54

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=|\vec{\delta}|=2$, $\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}=60^o$, $\widehat{(\vec{\gamma},\vec{\delta})}=90^o$ και $\widehat{(\vec{\beta},\vec{\delta})}=135^o$. Να αντιστοιχίσετε κάθε εσωτερικό γινόμενο που βρίσκεται στη στήλη Α με το αποτέλεσμά του που βρίσκεται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$	α) $2\sqrt{2}$
ii) $\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}$	β) $-2\sqrt{2}$
iii) $\vec{\beta}\cdot\vec{\delta}$	γ) 2
iv) $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$	δ) 0
	ε) -2

1.55

Κάθε διάνυσμα της στήλης Α αντιστοιχεί σε έναν αριθμό από τη στήλη Β, σε έναν από τη στήλη Γ και σε έναν από τη στήλη Δ. Να αντιστοιχίσετε κατάλληλα κάθε διάνυσμα με τις τιμές του από τις άλλες στήλες.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β	ΣΤΗΛΗ Γ	ΣΤΗΛΗ Δ
Διάνυσμα	*Μέτρο του διανύσματος*	*Γωνία που σχηματίζεται με τον άξονα x΄x*	*Συντεταγμένες του διανύσματος*
i) $\vec{i}+\sqrt{3}\,\vec{j}$	α) $\sqrt{2}$	1. 60^{o}	I. $(1, -1)$
ii) $\vec{i}-\vec{j}$	β) 2	2. 135^{o}	II. $(\sqrt{3}, -1)$
iii) $\sqrt{3}\,\vec{i}-\vec{j}$	γ) 1	3. 150^{o}	III. $(1, \sqrt{3})$
iv) $\sqrt{8}\,\vec{i}+\sqrt{8}\,\vec{j}$	δ) 4	4. 45^{o}	IV. $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

1.56

Κάθε διάνυσμα της στήλης Α είναι κάθετο σε ένα διάνυσμα της στήλης Β και παράλληλο προς ένα διάνυσμα της στήλης Γ. Να κάνετε τη σωστή αντιστοίχιση.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β	ΣΤΗΛΗ Γ
Διάνυσμα	*Το κάθετο διάνυσμα*	*Το παράλληλο διάνυσμα*
i) $\vec{\alpha}=(1, -2)$	α) $(1, -2\lambda)$	1. $(4\lambda^2+2\lambda, 2\lambda+1)$
ii) $\vec{\beta}=(2\lambda, 1)$	β) $(2, 1)$	2. $(2\lambda^2-2\lambda, \lambda+1)$
iii) $\vec{\gamma}=2\,\vec{i}+\vec{j}$	γ) $(1, 2\lambda)$	3. $(-3, 6)$
iv) $\vec{\delta}=2\lambda\,\vec{i}+\vec{j}$	δ) $(1, -2)$	3. $(-6, -3)$

1.57

Να συμπληρώσεις τα κενά στις προτάσεις που ακολουθούν.

i) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$ = 5ημθ $\vec{i}$ – 5συνθ $\vec{j}$ είναι ……………….

ii) Αν το διάνυσμα $\vec{u}$ = (x, 4) είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{v}$ = (2, –1), τότε τη τιμή του x είναι ………………, και αν το $\vec{u}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{v}$, τότε η τιμή του x είναι ……………….

iii) Η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ με τον άξονα x΄x είναι ……………….

iv) Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -3$, τότε η γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ ισούται με ……………….

1.58

i) Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$ το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Delta}$, συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, ισούται με ……………….

ii) Αν θ είναι οξεία γωνία και τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(ημθ, συνθ) και $\vec{\beta}$=(συνθ, ημθ) είναι παράλληλα μεταξύ τους, τότε η γωνία θ ισούται με ……………….

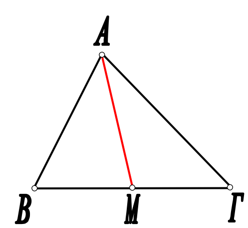
iii) Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ………………, ενώ αν $\left||\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|\right| = |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$, τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ……………….

iv) Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ και τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα, τότε είναι ……………….

1.59

Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ.

Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}$.



1.60

Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Μ και Ν των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=4\overrightarrow{MN}$.

1.61

Αν Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ και Μ ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου του, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}=\overrightarrow{M\Delta}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MZ}$

1.62

Σε έναν κύκλο κέντρου Κ παίρνουμε δύο άνισες χορδές του $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ που τέμνονται κάθετα στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{K\Gamma}+\overrightarrow{K\Delta}=2\overrightarrow{K\Lambda}$$

1.63

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ, ώστε $\overrightarrow{B\Delta}=\lambda\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma E}=\lambda\overrightarrow{\Gamma A}$ και $\overrightarrow{AZ}=\lambda\overrightarrow{AB}$ με $\lambda\in 3$. Αν Μ είναι ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου, να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{M\Delta}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MZ}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}$$

1.64

Έστω Α και Β δύο σταθερά σημεία του επιπέδου. Να βρείτε σημεία Γ και Δ, ώστε να ισχύουν

$$\overrightarrow{\Gamma A}+2\overrightarrow{\Gamma B}=\vec{0} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{\Delta A}-2\overrightarrow{\Delta B}=\vec{0}$$

και κατόπιν να αποδείξετε ότι:

i) $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{M\Gamma}$

ii) $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{\Delta M}$

όπου Μ τυχαίο σημείο του επιπέδου.

1.65

Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ένα σημείο Μ της πλευράς ΒΓ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{\text{ΜΓ}} = 3\overrightarrow{\text{ΒΜ}}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $2\overrightarrow{\text{ΜΑ}} + \overrightarrow{\text{ΜΔ}} = 3\overrightarrow{\text{ΓΔ}} - \overrightarrow{\text{ΜΒ}}$,

ii) αν Κ είναι ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, τότε ισχύει:

α) $\overrightarrow{\text{ΑΚ}} + \overrightarrow{\text{ΒΚ}} + \overrightarrow{\text{ΓΚ}} + \overrightarrow{\text{ΔΚ}} = 4\overrightarrow{\text{ΟΚ}}$ β) $\overrightarrow{\text{ΑΚ}} + \overrightarrow{\text{ΓΚ}} = \overrightarrow{\text{ΒΚ}} + \overrightarrow{\text{ΔΚ}}$

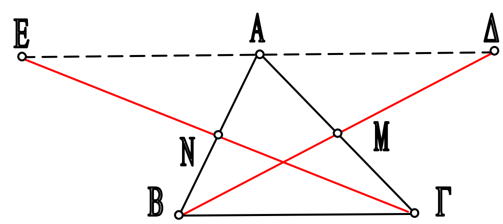
1.66

Αν Μ είναι το μέσο της διαγωνίου ΑΓ ενός κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{\text{ΜΒ}} + \overrightarrow{\text{ΜΔ}} = \overrightarrow{\text{ΓΔ}} - \overrightarrow{\text{ΒΑ}}$$

1.67

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διάμεσοί του ΒΜ και ΓΝ. Αν $\overrightarrow{\text{ΜΔ}} = \overrightarrow{\text{ΒΜ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΝΕ}} = \overrightarrow{\text{ΓΝ}}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Δ και Ε είναι συνευθειακά.



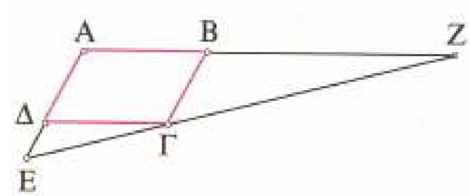
1.68

Αν για τα σημεία Μ, Α, Β και Γ ισχύει ότι $3\overrightarrow{\text{ΜΑ}} + \overrightarrow{\text{ΜΒ}} - 4\overrightarrow{\text{ΜΓ}} = \vec{0}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

1.69

Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε και Ζ τέτοια, ώστε $\overrightarrow{\text{ΑΕ}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\text{ΑΔ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΑΖ}} = 3\overrightarrow{\text{ΑΒ}}$.

Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ε, Γ και Ζ είναι συνευθειακά.



1.70

Αν για τα σημεία Α, Β, Ρ, Σ και Τ του επιπέδου ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{AP}}-3\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\overrightarrow{\mathrm{B\Sigma}}+2\overrightarrow{\mathrm{BA}}-3\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία Ρ, Σ και Τ είναι συνευθειακά.

1.71

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}\neq\vec{0}$. Αν $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3\vec{\alpha}+4\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=7\vec{\alpha}+8\vec{\beta}+5\vec{\gamma}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

1.72

Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Δ και Ε δύο σημεία τέτοια, ώστε $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\kappa\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\lambda\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\kappa\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ με $\kappa,\lambda\in 3$, να αποδείξετε ότι $\Delta\mathrm{E}\parallel\mathrm{B\Gamma}$.

1.73

Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε για τα οποία ισχύει

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=4\overrightarrow{\mathrm{AB}}-9\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} \text{ και } \overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-6\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$$

Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\Delta\mathrm{E}}\parallel\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$.

1.74

Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία του Δ και Ε στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\Gamma\mathrm{E}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}}$. Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΔΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}}\parallel\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$.

1.75

Αν τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ δεν είναι συγγραμμικά, να αποδείξετε ότι:

i) τα διανύσματα $\vec{\delta}=3\vec{u}-\vec{v}$ και $\vec{\varepsilon}=\vec{u}-2\vec{v}$ δεν είναι συγγραμμικά,

ii) τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\sqrt{2\vec{u}}-4\vec{v}$ και $\vec{\beta}=\vec{u}-\sqrt{8}\vec{v}$ είναι συγγραμμικά.

1.76

Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσο Ο της πλευράς του ΒΓ.

i) Να βρείτε τα σημεία Μ και Ν για τα οποία ισχύουν
$2\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{\Gamma M}=\vec{0}$ και $\overrightarrow{AN}-2\overrightarrow{BN}+2\overrightarrow{N\Gamma}=\vec{0}$

ii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Μ και Ν είναι συνευθειακά.

iii) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{AN}$ είναι συγγραμμικά.

1.77

Να βρείτε ένα σημείο Μ του επιπέδου ενός τριγώνου ΑΒΓ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις
$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{A\Gamma}-y\overrightarrow{AB}$, όπου $x, y \in 3$

Το σημείο Μ είναι ένα σταθερό σημείο ή η θέση του εξαρτάται από τις τιμές των x και y;

1.78

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε το σύνολο (δηλαδή τον γεωμετρικό τόπο) των σημείων Μ του επιπέδου του τριγώνου για τα οποία το διάνυσμα $\vec{x}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$.

1.79

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,8)$ και $\vec{\beta}=(2,-1)$.

i) Να προσδιορίσετε το διάνυσμα $\vec{u}=(x,y)$ από τη σχέση $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-3\vec{u}=\vec{0}$

ii) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{w}=(-7,26)$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

1.80

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου Α(1,2) και Β(4,1). Να βρείτε σημείο Μ του άξονα x΄x τέτοιο, ώστε:

i) Το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι:
α) ισοσκελές με κορυφή το σημείο Μ,
β) ορθογώνιο στο σημείο Μ,
γ) ορθογώνιο στο σημείο Μ και ισοσκελές

ii) Το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του σημείου Μ από τα Α και Β να γίνεται ελάχιστο.

1.81

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x,2)$ και $\vec{\beta}=(3,x-5)$. Να βρείτε το x, ώστε τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να είναι αντίρροπα.

1.82

Να βρείτε την πραγματική τιμή του x για την οποία το μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\nu}=\left(x^2-x-2,\ \ x^2-3x-4\right)$ είναι παράλληλό στον άξονα y΄y.

1.83

Δίνονται τα σημεία Α(x+1, 1), Β(1, -1) και Γ(-2, x). Να βρείτε την τιμή του $x \in 3$ για την οποία τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

1.84

Έστω Α, Β, Γ και Δ τέσσερα σημεία μιας ευθείας τέτοια, ώστε $\overrightarrow{\Gamma A}=\kappa\overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{\Delta A}=\kappa\overrightarrow{B\Delta}$ με $\kappa \in 3^*\backslash\{1,-1\}$. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό κ, ώστε το σημείο Γ να είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΔ.

1.85

Δίνονται τα σημεία Α(1,2), Β(3,-1), $\Lambda(\alpha_1,\beta_1)$, $M(\alpha_2,\beta_2)$ και $N(\alpha_3,\beta_3)$ για τα οποία ισχύουν

$$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{BM},\quad \overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{BN}\ \text{ και }\ \overrightarrow{A\Lambda}=5\overrightarrow{B\Lambda}$$

Αν τα σημεία Λ, Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΔΕ, ΕΖ και ΖΔ αντίστοιχα ενός τριγώνου ΔΕΖ, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου.

1.86

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$ και το διάνυσμα $\vec{\delta}=3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$.

Να υπολογίσετε τις γωνίες:

i) $\left(\widehat{\vec{\delta},\vec{\alpha}}\right)$ ii) $\left(\widehat{\vec{\delta},\vec{\beta}}\right)$

1.87

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2x-1, x+1)$ και $\vec{\beta} = (x+1, 2x+3)$.

i) Να βρείτε τις τιμές του $x \in 3$ για τις οποίες ισχύει:
α) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ β) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$

ii) Για τη μεγαλύτερη από τις τιμές του x που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$, και να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{\alpha}$ στο $\vec{\beta}$.

1.88

Να αποδείξετε ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2} \cdot \vec{\alpha}$$

1.89

Να αποδείξετε ότι:

i) αν $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\gamma})$ και $\vec{\gamma} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$, τότε $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$,

ii) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$, τότε και τα διανύσματα $\vec{u} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \lambda\vec{\alpha} - \kappa\vec{\beta}$, κ, $\lambda \in 3^*$, είναι κάθετα.

1.90

Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$, και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{2\pi}{3}$, να βρείτε το $x \in 3$, ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = x\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

1.91

i) Να αποδείξετε ότι κάθε γωνία εγγεγραμμένη με ημικύκλιο είναι ορθή.

ii) Με τη βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος να αποδείξετε το Πυθαγόρειο θεώρημα.

1.92

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\widehat{\mathrm{A}}=90^{\mathrm{o}}\right)$ να αποδείξετε ότι $(\mathrm{A\Delta})^2 = (\mathrm{\Delta B})(\mathrm{\Delta\Gamma})$, όπου ΑΔ είναι το ύψος που φέρνουμε από την κορυφή Α.

1.93

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις πλευρές του ΑΒ και ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Μ και Ν έτσι, ώστε ΑΜ = ΒΝ. Να αποδείξετε ότι η ΔΜ είναι κάθετη στην ΑΝ.

1.94

Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ$\left(\widehat{\mathrm{A}}=90^{\mathrm{o}}\right)$που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

1.95

(Γεωμετρικοί τόποι). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ όταν:

i) το διάνυσμα $\vec{u}=2\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}$ είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ τριγώνου ΑΒΓ,

ii) τα Ο και Α είναι δύο σταθερά σημεία του επιπέδου, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$=3 και $\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=7$,

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1982

iii) τα Α και Β είναι σταθερά σημεία του επιπέδου με (ΑΒ) = 2α και $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\kappa$, όπου το κ είναι σταθερά $\kappa + \alpha^2 > 0$,

iv) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=0$, όπου Α, Β και Γ κορυφές τριγώνου ΑΒΓ.

Α. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}

2.1

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α(1, -1) και

i) Είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}=(3, -2)$
ii) Είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}=(0, 1)$
iii) Σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία ω = π/4.

2.2

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(-1, 0), Β(3, 2) και Γ(-3, 4). Να βρείτε:

i) Τις εξισώσεις των υψών του
ii) Τις εξισώσεις των μεσοκαθέτων των πλευρών του.

2.3

Να δείξετε ότι τα σημεία Α(1, -1), Β(2, 0) και Γ(-1, -3) είναι συνευθειακά.

2.4

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών, που διέρχονται από το σημείο Α(-1, 2) και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

2.5

Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών και τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ, του οποίου τα δύο ύψη έχουν εξισώσεις $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ και y = -x +2 αντιστοίχως και η κορυφή Α έχει συντεταγμένες (1, 4).

2.6

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Μ(2, 1) και τέμνει τις ευθείες $y = x + 1$ και $y = -x + 1$ στα σημεία Α και Β αντιστοίχως, έτσι ώστε το Μ να είναι μέσο του ΑΒ.

2.7

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{3}$ και τέμνει τους άξονες x΄x και yy΄ στα σημεία Α και Β, ώστε το άθροισμα της τετμημένης του Α και της τεταγμένης του Β να είναι ίσο με 15.

2.8

Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματική τιμή του μ η εξίσωση $(\mu - 1)x + \mu y + \mu^2 = 0$ παριστάνει ευθεία γραμμή. Πότε η ευθεία αυτή είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x, πότε προς τον y΄y και πότε διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

2.9

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Α(-2, 3) και είναι κάθετη στην ευθεία $2x - 3y + 6 = 0$. Ποιο είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών;

2.10

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $2x - 5y + 3 = = 0$ και $x - 3y - 7 = 0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $4x + y = 1$.

2.11

Τα σημεία Α(-4, 6) και Γ(-1, 1) είναι οι απέναντι κορυφές ενός παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ. Οι πλευρές ΒΓ και ΓΔ του παραλληλόγραμμου ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις $x + 3y = 2$ και $x - y + 2 = 0$ αντιστοίχως. Να υπολογίσετε:

i) Τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.
ii) Το συνημίτονο της οξείας γωνίας των διαγωνίων του παραλληλόγραμμου.

2.12

Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \Re$, ώστε οι ευθείες $(\lambda - 1)x + \lambda y + 8 = 0$ και $\lambda x + 3y + 1 - 2\lambda = 0$ να είναι κάθετες.

2.13

Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \Re$, ώστε η ευθεία $3x + 3y + \kappa = 0$ να διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $3x + 4y + 6 = 0$ και $6x + 5y - 9 = 0$.

2.14

Να σχεδιάσετε τις γραμμές τις οποίες παριστάνουν οι εξισώσεις:

(i) $x^2 - y^2 + 4y - 4 = 0$ (ii) $x^2 - y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$

2.15

Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της μορφής $(2\alpha^2 + \alpha + 3)x + (\alpha^2 - \alpha + 1)y + (3\alpha + 1) = 0$, $\alpha \in \Re$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

2.16

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $x + 4y = 5$, $3x - 2y = 1$ και $7x - 8y + 1 = 0$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

2.17

Να βρείτε την οξεία γωνία την οποία σχηματίζουν οι ευθείες $y = \mu x$ και $(1 + \mu)x = (1 - \mu)y$.

2.18

Δίνεται η ευθεία $3x + y = 3$ και το σημείο Α(1, 2). Να βρείτε τις συντεταγμένες της προβολής του Α στην ευθεία αυτή.

2.19

Δίνονται οι ευθείες ε_1: $5x - 8y - 51 = 0$ και ε_2: $5x - 8y + 68 = 0$.

(i) Να δείξετε ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$

(ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις της αρχής των αξόνων από τις ε_1 και ε_2.

(iii) Να υπολογίσετε την απόσταση των ε_1 και ε_2.

2.20

Δίνονται ευθείες ε_1: $4x - 3y - 9 = 0$ και ε_2: $4x - 3y - 24 = 0$.

(i) Να δείξετε ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$

(ii) Να βρείτε ένα σημείο της ε_1 και στη συνέχεια να υπολογίσετε την απόσταση των ε_1 και ε_2.

2.21

Ποιο σημείο της ευθείας $2x - 3y = 30$ ισαπέχει από τα σημεία Α(1, 3) και Β(7, 9);

2.22

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -3$ και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 5 μονάδες.

2.23

Η ευθεία ε_1: $3x - 2y + 1 = 0$ είναι μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2, που απέχουν 8 μονάδες. Να βρείτε τις εξισώσεις αυτών.

2.24

Δίνονται τα σημεία Α(5, 1) και Β(1, 3). Να βρείτε το σημείο Μ του άξονα x΄x, για το οποίο το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ είναι ίσο με 7.

2.25

Δίνονται τα σημεία Α(3, 4) και Β(5, -2). Να βρείτε το σημείο Μ, τέτοιο, ώστε ΜΑ = ΜΒ και (ΜΑΒ) = 10.

2.26

Ενός παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ οι τρεις κορυφές του έχουν συντεταγμένες (-3, 1), (-2, 3) και (4, -5). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου.

2.27

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ισαπέχει από τα σημεία Α(-2, 0) και Β(0, 2).

2.28

Να βρείτε το σημείο του άξονα x΄x, το οποίο ισαπέχει από την αρχή των αξόνων Ο και από την ευθεία $5x + 12y - 60 = 0$.

2.29

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από το σημείο Μ(1, 2) και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν Ε = 4.

2.30

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων Ο και απέχουν από το σημείο Α(-1, 3) απόσταση ίση με 1.

2.31

Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $x - y + 2 = 0$, τα οποία απέχουν από την ευθεία $12x - 5y + 60 = 0$ απόσταση ίση με 1.

2.32

Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες $3x - 4y + 1 = 0$ και $5x + 12y + 4 = 0$.

2.33

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $x - y + 1 = 0$ και $2x - 3y + 5 = 0$ και απέχει από το σημείο Α(3, 2) απόσταση ίση με $\frac{7}{5}$.

2.34

Δίνονται τα σημεία Α(-1, -2) και Β(3, 1). Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει (ΜΑΒ) = 8.

2.35

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο Μ(1,0) και τέμνει τις ευθείες $y = x + 2$ και $y = x$ στα σημεία Α και Β αντιστοίχως, έτσι, ώστε (ΑΒ) = 2.

2.36

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\lambda x + (\lambda - 1)y = 2\lambda$ και $(\lambda + 1)x + \lambda y = 2\lambda + 1$ τέμνονται για όλες τις τιμές του $\lambda \in \Re$. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής τους;

2.37

Να δείξετε ότι:

i) Η εξίσωση $x^2 - 4xy + y^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες.

ii) Καθεμία σχηματίζει με την $x - y = 0$ γωνία 30°.

Σε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ (λανθασμένη).

2.38

i) Η ευθεία που ενώνει τα σημεία $A(-\sqrt{2}, \sqrt{18})$ και $B(\sqrt{8}, 3\sqrt{8})$ σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45^o. Σ☐ Λ☐

ii) Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε: $3x - \sqrt{3}y + 1 = 0$ με τον άξονα x΄x έχει μέτρο 120^o. Σ☐ Λ☐

iii) Η ευθεία με εξίσωση $3x + 2y - 5 = 0$ είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$. Σ☐ Λ☐

iv) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α(0, 2000) και είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{v} = 2001\vec{i} - \vec{j}$ περνάει από το σημείο Β(0, 2001). Σ☐ Λ☐

v) Η εξίσωση $(\alpha^2 - \alpha - 2)x + (\alpha^2 - 2\alpha - 3)y + 1 = 0$ παριστάνει στο επίπεδο, για κάθε $\alpha \in 3$, ευθεία. Σ☐ Λ☐

vi) Η απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία ε: $3x+4y+5=0$ είναι $d = 1$. Σ☐ Λ☐

vii) Η ευθεία με εξίσωση $y = 3x - 2$ σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $E = \frac{3}{2}$ τ.μ. Σ☐ Λ☐

2.39

i) Όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση $(1+3\alpha)x + (2\alpha - 2)y + (5 + 7\alpha) = 0$, καθώς το α διατρέχει το 3, διέρχονται από το σημείο $A(-3, 1)$. Σ☐ Λ☐

ii) Αν $\vec{\delta} = (A, B)$ και $\vec{v} = (x, y)$ δύο διανύσματα, τότε η εξίσωση $\vec{\delta} \cdot \vec{v} + \Gamma = 0$ είναι εξίσωση ευθείας. Σ☐ Λ☐

iii) Η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda^2 x + \beta$ σχηματίζει για κάθε $\lambda \in 3^*$ οξεία γωνία με τον άξονα x΄x. Σ☐ Λ☐

iv) Αν η ευθεία με εξίσωση $(\mu^2-1)x+(\mu^2-\mu)y+\mu = 0$ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, τότε $\mu = 1$ ή $\mu = -1$. Σ☐ Λ☐

v) Αν οι ευθείες ε_1: $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και ε_2: $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$, όπου $B_1B_2 \neq 0$, είναι μεταξύ τους κάθετες, ισχύει $A_1A_2+B_1B_2 = 0$. Σ☐ Λ☐

vi) Αν οι ευθείες ε_1: $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και ε_2: $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ είναι μεταξύ τους παράλληλες, τότε $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = 0$. Σ☐ Λ☐

vii) Αν δύο διανύσματα $\vec{\delta}_1$ και $\vec{\delta}_2$ είναι αντίστοιχα κάθετα προς δύο παράλληλες ευθείες, τότε $\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2 = 0$. Σ☐ Λ☐

2.40

i) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(1, 3)$ και σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα x΄x περνάει και από το σημείο $B(3, 1)$. Σ☐ Λ☐

ii) Αν $A \neq B$, τότε η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει πάντοτε ευθεία. Σ☐ Λ☐

iii) Οι ευθείες με εξίσωση $y = |\lambda| x$ και $y = -\frac{1}{\lambda}x$ για $\lambda \neq 0$ είναι μεταξύ τους κάθετες. Σ☐ Λ☐

iv) Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες προς τα διανύσματα $\vec{\delta}_1=(-A, -B)$ και $\vec{\delta}_2 = (B, -A)$, είναι μεταξύ τους κάθετες. Σ☐ Λ☐

v) Το σημείο $M(3, 0)$ ανήκει στην ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(2, 1)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$. Σ☐ Λ☐

vi) Αν $\vec{\delta}_1 = (x_1, y_2)$ και $\vec{\delta}_2 = (x_2, y_2)$ δύο διανύσματα και ε_1 και ε_2 δύο ευθείες με $\vec{\delta}_1 \parallel \varepsilon_1$, $\vec{\delta}_2 \parallel \varepsilon_2$ και $\det(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = 0$, τότε είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. Σ☐ Λ☐

Σε καθεμία από τις ασκήσεις που ακολουθούν να σημειώσετε τη σωστή απάντηση:

2.41

Η ευθεία ε: $\sqrt{3}y - 3x + 1 = 0$ σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία:

☐ Α: 30^o ☐ Β: 60^o ☐ Γ: 120^o ☐ Δ: 150^o

2.42

Αν η ευθεία που ενώνει τα σημεία Α(1, 1) και Β(2, x) είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $y = 2x + 1$, τότε:

☐ Α: $x = 0$ ☐ Β: $x = 1$ ☐ Γ: $x = 2$
☐ Δ : $x = 3$ ☐ Ε: $x = 4$

2.43

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α(3, 1) και είναι κάθετη προς την ευθεία με εξίσωση $x - 2y + 1 = 0$ είναι:

☐ Α: $2x + y - 7 = 0$ ☐ Β: $2x - y + 7 = 0$ ☐ Γ: $2x - y - 7 = 0$
☐ Δ : $2x - y - 5 = 0$ ☐ Ε: $2x + y + 5 = 0$

2.44

Η αρχή των αξόνων Ο(0, 0) απέχει περισσότερο από την ευθεία με εξίσωση:

☐ Α: $3x + 4y + 5 = 0$ ☐ Β: $3x + 4y - 5 = 0$ ☐ Γ: $3x - 4y - 5 = 0$
☐ Δ : $3x - 4y + 5 = 0$ ☐ Ε: $3x + 4y - 5\sqrt{2} = 0$ ☐ Ζ: $x + y + 5\sqrt{2} = 0$

2.45

Οι ευθείες με εξίσωση $3x - 2y + 5 = 0$ και $2x - 3y + 1 = 0$:

☐ Α: είναι παράλληλες ☐ Β: είναι κάθετες
☐ Β: τέμνονται σε ένα σημείο ☐ Δ: συμπίπτουν

2.46

Η ευθεία που ενώνει τα σημεία Α(1, 3) και Β(1, 5):

☐ Α: είναι παράλληλη προς τον άξονα y΄y.
☐ Β: είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x.
☐ Γ: τέμνει τους άξονες σε δύο σημεία
☐ Δ: διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

2.47

Η εξίσωση Αx+Βy+Γ=0 είναι εξίσωση ευθείας όταν:

- ☐ Α: $|A|\cdot|B| \neq 0$
- ☐ Β: $|A|+|B| > 0$
- ☐ Γ: $A^2 + B^2 \geq 0$
- ☐ Γ: $|A|+|B| \neq 0$
- ☐ Ε: ισχύουν όλες οι προηγούμενες σχέσεις
- ☐ Ζ: ισχύει η σχέση Α ή η Β ή η Δ.

2.48

Η ευθεία με εξίσωση y = λx + 3:

- ☐ Α: είναι κάθετη στον άξονα x΄x για κάθε τιμή του $\lambda \in 3$
- ☐ Β: είναι κάθετη για λ = 2 στην ευθεία με εξίσωση x – 2y + 1 = 0
- ☐ Γ: περνά από το σημείο $\left(\frac{2}{\lambda}, 5\right)$ για κάθε $\lambda \in 3$*.

2.49

Η ευθεία που ενώνει τα σημεία Α(2001, 0) και Β(0, 2001) έχει εξίσωση:

- ☐ Α: $2001x - 2001y = 0$
- ☐ Β: $2001y + 2001x = 1$
- ☐ Γ: $y = 2001x + 2001$
- ☐ Δ: $\frac{x}{2001} + \frac{y}{2001} = 1$

2.50

Αν η ευθεία ε: κx + λy + 1 = 0, όπου $\kappa, \lambda \in 3$*, σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 60^o, τότε η ευθεία που ενώνει τα σημεία Α(λ, 0) και Β(0, κ) σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία:

- ☐ Α: 30^o
- ☐ Β: 45^o
- ☐ Γ: 60^o
- ☐ Δ : 120^o
- ☐ Ε: 150^o

2.51

Αν η ευθεία με εξίσωση y = 2x – 1 διέρχεται από το σημείο $A(\lambda^2, 4\lambda - 3)$, τότε η τιμή του λ είναι:

- ☐ Α: λ = 2
- ☐ Β: λ = -2
- ☐ Γ: λ = 1
- ☐ Δ : λ = -1
- ☐ Ε: λ =

2.52

Οι ευθείες με εξισώσεις $x + 2y + 10 = 0$ και $2x + \lambda y + 10 = 0$:

☐ Α: είναι παράλληλες για $\lambda = 1$

☐ Β: τέμνονται για $\lambda = 2$ στο σημείο Α(20, 15)

☐ Γ: είναι κάθετες για $\lambda = -1$

☐ Δ: τέμνονται για κάθε $\lambda \in 3$

☐ Ε: σχηματίζουν με τον άξονα x΄x γωνία 60^o για κάθε $\lambda = 4$.

2.53

Η ευθεία που σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα x΄x έχει εξίσωση:

☐ Α: $y = |\lambda|x + 1$ με $\lambda < 0$

☐ Β: $y = 2 - |\lambda|x$, $\lambda \in 3^*$

☐ Γ: $2x + 3y + 1 = 0$

☐ Δ: $y = (1 - |\lambda|)x + 3$ με $\lambda < -1$

☐ Ε: καμία από τις προηγούμενες.

2.54

Αν η ευθεία ε_1 είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}_1 = (1, \sqrt{3})$ και η ευθεία ε_2 είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}_2 = (\sqrt{3}, 1)$, τότε η γωνία που σχηματίζουν οι δύο ευθείες είναι:

☐ Α: 30^o

☐ Β: 60^o

☐ Γ: 120^o

☐ Δ : 150^o

☐ Ε: 90^o

2.55

i) Αν τα σημεία Α(κ, κ +1), Β(κ + 1, κ + 2) και Γ(κ + 2, κ + 3) είναι συνευθειακά, τότε:

☐ Α: $\kappa = 1$

☐ Β: $\kappa = 2$

☐ Γ: $\kappa \in 3$

☐ Δ: $\kappa \in 3^*$

ii) Η ευθεία στην οποία ανήκουν τα σημεία Α, Β και Γ έχει εξίσωση:

☐ Α: $y = x - 1$

☐ Β: $y = x + 2$

☐ Γ: $y - x - 1 = 0$

☐ Δ: $y + x - 1 = 0$

Να συμπληρώσετε τα κενά στις προτάσεις που ακολουθούν.

2.56

i) Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε: $y = 1 - \sqrt{3}x$ με τον άξονα x΄x έχει μέτρο …………..

ii) Η ευθεία με εξίσωση $y = 2x + 3$ τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο ………………………. και τον άξονα y΄y στο σημείο ……………………….

iii) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας με εξίσωση $6x – 3y + 5 = 0$ είναι ……………….

iv) Το σημείο τομής των ευθειών $ε_1$: $2x – 3y + 1 = 0$ και $ε_2$: $3x + 2y – 5 = 0$ έχει συντεταγμένες ……………………….

v) Η απόσταση του σημείου Α(1, 5) από την ευθεία με εξίσωση $3x - 4y + 27 = 0$ είναι ……………………….

2.57

i) Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία Α(0, 0), Β(3, 0) και Γ(3, -8) είναι ……………………….

ii) Αν το σημείο Α(3, κ) ανήκει στην ευθεία ε: $3x + 2y – 13 = 0$, τότε η τιμή του κ είναι ……………………….

iii) Η ευθεία που ενώνει τα σημεία Α(1, κ) και Β(2, κ – 2) και είναι κάθετη προς την ευθεία που ενώνει τα σημεία Γ(κ + 1, 1) και Δ(κ + 2, κ) έχει εξίσωση …………………………..

iv) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α(-2, 7) και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ έχει εξίσωση …………………………..

2.58

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Εξίσωση ευθείας	$2x+3y+1=0$	$y=2x+1$	$y=2$	$x=1$	$y-2x+5=0$
Σημείο που τέμνει τον άξονα x΄x					
Συντελεστής διεύθυνσης					
Είδος γωνίας $\hat{\varphi}$ που σχηματίζει με τον άξονα x΄x					
Ένα κάθετο διάνυσμα $\vec{\delta}$ προς την ευθεία					
Απόσταση d του Ο(0,0) από την ευθεία					
Εμβαδόν Ε του τριγώνου που σχηματίζει με τους άξονες					

2.59

Να αντιστοιχίσετε σε καθεμία από τις εξισώσεις ευθειών της στήλης Α τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x που βρίσκεται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
vii) $x+y=0$	α) 0°
viii) $x-1=0$	β) 30°
ix) $y+2=0$	γ) 45°
x) $x+\sqrt{3}y+1=0$	δ) 60°
xi) $\frac{x}{3}-\frac{y}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$	ε) 90°
xii) $x-y-1=0$	στ) 120°
xiii) $\frac{2x-1}{2}+\frac{3y-2}{3}=1$	ζ) 135°
	η) 150°

2.60

Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις ευθειών της στήλης Α με τα κάθετα προς τις ευθείες αυτές διανύσματα που βρίσκονται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
i) $y=3x-2$	α) $3\vec{i}$
ii) $x-3y+1=0$	β) $\vec{i}-3\vec{j}$
iii) $x-3=0$	γ) $(3,-1)$
iv) $y+2=0$	δ) $3\vec{j}$
v) $3x-y+8=0$	ε) $(1,3)$
vi) $y+3x-1=0$	στ) $3\vec{i}+\vec{j}$

2.61

Αν στη στήλη Α αναγράφεται η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x μια ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο Μ(1,2) και στη στήλη Β η εξίσωση της, να κάνετε τη σωστή αντιστοίχιση.

ΣΤΗΛΗ Α			ΣΤΗΛΗ Β
i) 30°	•	•	α) $y = x + 1$
ii) 45°	•	•	β) $x = 1$
iii) 60°	•	•	γ) $\sqrt{3}x - y + 2 = \sqrt{3}$
iv) 90°	•	•	δ) $\sqrt{3}x - 3y + 6 = \sqrt{3}$
v) 120°	•	•	ε) $\sqrt{3}x + y - 2 = \sqrt{3}$
vi) 135°	•	•	στ) $y = 3 - x$
vii) 150°	•	•	ζ) $\sqrt{3}x + 3y - 6 = \sqrt{3}$

2.62

Να αντιστοιχίσετε σε κάθε εξίσωση ευθείας της στήλης Α την απόσταση d του σημείου Α(1,-1) από την ευθεία αυτά που αναγράφεται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α			ΣΤΗΛΗ Β
i) $4x - 3y - 2 = 0$	•	•	α) $\frac{8}{5}$
ii) $x = 1$	•	•	β) 0
iii) $y = -1$	•	•	γ) -1
iv) $\frac{x+1}{2} + \frac{2y-3}{3} = 1$	•	•	δ) 2
v) $5x - 7y - 12 = 0$	•	•	ε) $\frac{2}{5}$
vi) $x + 1 = 0$	•		

2.63

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\lambda^2 - 1)x - (\lambda^2 - \lambda)y + \lambda + 2 = 0$ και

$\varepsilon_2 : 2y - 3x + 5 = 0$

Σε κάθε τιμή του λ από αυτές που αναγράφονται στη στήλη Α αντιστοιχεί μία θέση της ε_1 στο επίπεδο από τη στήλη Β. Να κάνετε τη σωστή αντιστοίχιση.

ΣΤΗΛΗ Α			ΣΤΗΛΗ Β
i) $\lambda = 2$	•	•	α) $\varepsilon_1 \parallel x'x$
ii) $\lambda = 0$	•	•	β) $\varepsilon_1 \parallel y'y$
iii) $\lambda = -1$	•	•	γ) $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$
iv) $\lambda = -2$	•	•	δ) $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$
v) $\lambda = -\frac{1}{2}$	•	•	ε) η ε_1 είναι κάθετη στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων
		•	στ) η ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων

2.64

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας εκείνης που σχηματίζει με τον άξονα x΄x την ίδια γωνία που σχηματίζει και η ευθεία ε: 2x-y+1=0 και που περνάει από το σημείο στο οποίο η γραμμή με εξίσωση $y=x^2-x-2$ τέμνει τον θετικό ημιάξονα.

2.65

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1 : 2x - 3y - 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : 5x + 2y + 7 = 0$ και είναι κάθετη προς το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$.

2.66

Δίνεται τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α(1,2) , Β(2,4) και Γ(4,0). Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ και του ύψους ΑΔ καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΔ.

2.67

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών $\varepsilon_1 : 2x - 3y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : 4x - 6y - 24 = 0$ και κατόπιν την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2.

2.68

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3y - \sqrt{3}x - 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : y - \sqrt{3}x + 2 = 0$. Να βρείτε τις εξισώσεις της εσωτερικής και της εξωτερικής διχοτόμου της οξείας γωνίας που σχηματίζουν μεταξύ τους οι ευθείες ε_1 και ε_2 καθώς και τη γωνία αυτή.

2.69

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1 : 2x + 3y - 7 = 0$ και $\varepsilon_2 : 3x - 2y - 4 = 0$ και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση d=2.

2.70

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(0,0) και Β(-2,1) και το ύψος του $(\text{ΑΔ}) = 2\text{cm}$. Να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας που ενώνει τα σημεία Β και Γ,
ii) την εξίσωση του ύψους ΑΔ,
iii) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ, αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 2 cm^2.

2.71

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι κάθετες στην ευθεία με εξίσωση $2x - y + 3 = 0$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 9 τετραγωνικών μονάδων.

2.72

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το πέρας $B(x_2, y_2)$ του διανύσματος $\overrightarrow{AB} = (3,4)$ με αρχή το σημείο $A(-4,0)$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 1 τετραγωνικής μονάδας.

2.73

Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου, για τα οποία η διαφορά των τετραγώνων των αποστάσεών τους από τα σημεία $A(3,2)$ και $B(-1,1)$ αντίστοιχα είναι ίση με το $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, είναι ευθεία κάθετη στην ευθεία που ενώνει τα σημεία A και B.

2.74

Αν ένα σημείο $M'(x', y')$ είναι σημείο της ευθείας με εξίσωση $y = 3x$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x,y)$ που είναι συμμετρικά του M' ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία $\varepsilon: 2x + y - 3 = 0$. Κατόπιν να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $A(1,3)$ ως προς την ευθεία ε.

2.75

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου που ισαπέχουν από τις ευθείες $\varepsilon_1: 5x - 12y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2: 3x + 4y - 2 = 0$. (Ή να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών των ευθειών ε_1 και ε_2).

2.76

Δίνονται τα σημεία $A(2,3)$ και $B(4,5)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου, ώστε να σχηματίζεται τρίγωνο ABM εμβαδού 9 τετραγωνικών μονάδων.

2.77

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ, σημείο Μ της πλευράς ΔΓ και σημείο Ν της πλευράς ΓΒ έτσι, ώστε ΔΜ=ΓΝ. Να αποδείξετε ότι η ΑΜ είναι κάθετη στη ΔΝ.

2.78

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα μέσα Μ και Ν των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Αν η ευθεία ΔΜ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε ενώ η ΒΝ την τέμνει στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

i) $\Delta\text{M} \parallel \text{BN}$

ii) το Ζ είναι μέσο του ΕΓ

iii) $(\text{AE}) = \frac{1}{3}(\text{A}\Gamma)$

iv) $(\text{AE}) = (\text{EZ}) = (\text{Z}\Gamma)$

(Να μην χρησιμοποιήσετε τον ορισμό και τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου της Ευκλείδειας Γεωμετρίας).

Α. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

3.1

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- (i) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(1, \sqrt{3})$.
- (ii) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(\alpha - \beta, \alpha + \beta)$.
- (iii) Όταν εφάπτεται της ευθείας $x - y = 2$.
- (iv) Όταν εφάπτεται της ευθείας $\alpha x + \beta y = \alpha^2 + \beta^2$

3.2

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- (i) Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 3$.
- (ii) Όταν είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$.
- (iii) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(5, 0)$.

3.3

Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που έχει μέσο το σημείο $M(1, -1)$.

3.4

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- (i) Όταν έχει κέντρο $K(0, 1)$ και διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{3}, 0)$.
- (ii) Όταν έχει διάμετρο το τμήμα με άκρα $A(-1, 2)$ και $B(7, 8)$.
- (iii) Όταν έχει ακτίνα $\rho = 5$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(1, 0)$ και $B(7, 0)$.
- (iv) Όταν διέρχεται από τα σημεία $A(4, 0)$ και $B(8, 0)$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία $y=x$.
- (v) Όταν τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(4, 0)$ και $B(8, 0)$ και τον άξονα $y'y$ στα σημεία $\Gamma(0, -2)$ και $\Delta(0, \mu)$.
- (vi) Όταν εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο $A(3, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $B(1, 2)$.
- (vii) Όταν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας $3x + 4y = 12$ στο σημείο $A(0, 3)$.

3.5

Να βρείτε το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου που έχει εξίσωση

(i) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ (ii) $x^2 + y^2 - 10x + 12y - 20 = 0$

(iii) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 9y + 1 = 0$ (iv) $x^2 + y^2 - 4\alpha x + 10\beta y + 4\alpha^2 + 16\beta^2 = 0$.

3.6

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου

(i) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ στο σημείο Α(1, -1).

(ii) $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 - 3\beta^2 = 0$ στο σημείο Α(α, -β).

3.7

Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων:

$C_1 :\ x^2 + y^2 = 1$ και $C_2 :\ (x - 1)^2 + y^2 = 4$.

3.8

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα σημεία Α(-3, 0) και Β(3, 0) είναι σταθερός και ίσος με 2.

3.9

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, των οποίων το τετράγωνο της απόστασης από την αρχή των αξόνων είναι ίσο με το τετραπλάσιο της απόστασης από την ευθεία x = 1.

3.10

Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ευθειών

$x\sigma\upsilon\nu\theta + y\eta\mu\theta = \alpha$ και $x\eta\mu\theta - y\sigma\upsilon\nu\theta = \beta$ ανήκει στον κύκλο

$x^2 + y^2 = \alpha^2 + \beta^2$ για όλες τις τιμές του $\theta \in [0, 2\pi)$.

3.11

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$, που διέρχονται από το σημείο Α(2, 4).

3.12

Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα x΄x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Όταν έχει εστία το σημείο Ε(-1, 0)

(ii) Όταν έχει διευθετούσα την ευθεία $x = \frac{1}{2}$

(iii) Όταν διέρχεται από το σημείο Α(1, 2).

3.13

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$. Να αποδειχτεί ότι η κορυφή της παραβολής είναι το πλησιέστερο στην εστία σημείο της.

3.14

Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β της παραβολής $y = \frac{1}{4}x^2$, που έχουν την ίδια τεταγμένη και ισχύει $\hat{AOB} = 90^o$.

3.15

Έστω Μ ένα σημείο της παραβολής $y^2 = 2px$. Να αποδειχτεί ότι ο κύκλος με διάμετρο ΕΜ, όπου Ε η εστία της παραβολής, εφάπτεται στον άξονα y΄y.

3.16

Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Όταν έχει εστίες τα σημεία Ε΄(-4, 0) και Ε(4, 0) και μεγάλο άξονα 10

(ii) Όταν έχει εστίες τα σημεία Ε΄(0, -5) και Ε(0, 5) και μεγάλο άξονα 26

(iii) Όταν έχει εστίες τα σημεία Ε΄(-12, 0) και Ε(12, 0) και εκκεντρότητα $\frac{12}{13}$

(iv) Όταν έχει εστίες τα σημεία Ε΄(-4, 0) και Ε(4, 0) και διέρχεται από το σημείο $M\left(4, \frac{9}{5}\right)$

(v) Όταν έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, εστίες στον άξονα x΄x και διέρχεται από τα σημεία $M_1(1, 1)$ και $M_2\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

3.17

Αν Ε΄, Ε είναι οι εστίες και Β΄Β ο μικρός άξονας της έλλειψης $x^2+2y^2=4$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΒ΄Ε΄ είναι τετράγωνο.

3.18

Να αποδείξετε ότι το σημείο $M\left(\frac{\alpha\left(1-t^2\right)}{1+t^2}, \frac{2\beta t}{1+t^2}\right)$ ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ για όλες τις τιμές του $t\in\Re$.

3.19

Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ευθειών

$$\alpha y=\lambda\beta(\alpha+x) \text{ και } \lambda\alpha y=\beta(\alpha-x), \quad 0<\beta<\alpha$$

ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ για όλες τις τιμές του $\lambda\in\Re^*$.

3.20

Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και ένα σημείο της Μ. Έστω επιπλέον, ο κύκλος $x^2+y^2=\alpha^2$ και το σημείο του Ν, που έχει την ίδια τετμημένη με το Μ. Από το Μ φέρνουμε παράλληλη προς την ΟΝ, που τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Γ και Δ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι ΜΓ=β και ΜΔ=α.

3.21

Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Όταν έχει εστίες τα σημεία Ε΄(-13, 0), Ε(13, 0) και κορυφές τα σημεία Α(5, 0) και Α΄(-5, 0)

(ii) Όταν έχει εστίες τα σημεία Ε΄(0, -10), Ε(0, 10) και εκκεντρότητα $\frac{5}{3}$

(iii) Όταν έχει εστίες τα σημεία Ε΄($-\sqrt{5}$,0), Ε($\sqrt{5}$, 0) και διέρχεται από το σημείο Μ($2\sqrt{2}$,1)

(iv) Όταν έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=\frac{4}{3}x$ και $y=-\frac{4}{3}x$ και διέρχεται από το σημείο Μ($3\sqrt{2}$,4).

3.22

Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία που είναι παράλληλη προς μια από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ τέμνει την υπερβολή σε ένα μόνο σημείο. Ποιο είναι το σημείο τομής της ευθείας $2x-y=1$ και της υπερβολής $4x^2-y^2=1$;

3.23

Αν E_1 είναι η προβολή της εστίας Ε της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ πάνω στην ασύμπτωτη $y=\frac{\beta}{\alpha}x$, να αποδείξετε ότι

(i) $(OE_1)=\alpha$, (ii) $(EE_1)=\beta$.

3.24

Έστω $M_1(x_1, y_1)$ και $M_2(x_2, y_2)$ δύο σημεία του δεξιού κλάδου της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Αν η ευθεία M_1M_2 τέμνει τις ασύμπτωτες στα σημεία $M_3(x_3, y_3)$ και $M_4(x_4, y_4)$, να αποδείξετε ότι $(M_1M_3)= (M_2M_4)$.

3.25

Να αποδείξετε ότι το συνημίτονο μιας από τις γωνίες των ασυμπτώτων της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ δίνεται από τον τύπο $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{2-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}$.

3.26

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+y^2-2\lambda x-1=0 \qquad (1), \text{ όπου } \lambda\in\Re.$$

(i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου ζητείται να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

(ii) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι C_λ που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. Ποιά είναι η εξίσωση της κοινής χορδής όλων αυτών των κύκλων;

3.27

Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2+y^2=1$ και $C_2: (x-2)^2+y^2=2^2$ και η ευθεία y=λx+β, όπου λ, $\beta\in\Re$.

(i) Ποιες είναι οι αποστάσεις των κέντρων των κύκλων C_1 και C_2 από την ευθεία;

(ii) Για ποιες τιμές των λ και β η ευθεία εφάπτεται και στους δύο κύκλους;

(iii) Να αποδείξετε ότι οι κοινές εφαπτομένες των κύκλων C_1 και C_2 τέμνονται πάνω στον άξονα x΄x και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 60°.

3.28

Μια ευθεία $y = \lambda x + \beta$, με $\lambda \neq 0$, τέμνει την παραβολή $y^2 = 4x$ σε δύο σημεία Α και Β.

(i) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ είναι $\left(\frac{2-\lambda\beta}{\lambda^2},\ \frac{2}{\lambda}\right)$.

(ii) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία βρίσκεται το Μ, όταν
α) λ=1 και το β μεταβάλλεται
β) β=0 και το λ μεταβάλλεται.

3.29

Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, με α>β>0 και το σημείο Σ(0, 2β). Μια ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το σημείο Σ και τέμνει τις εφαπτομένες , στα άκρα του μεγάλου άξονα της έλλειψης, στα σημεία Μ και Μ΄.

(i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο ΜΜ΄ συναρτήσει του λ.

(ii) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \Re$ ο κύκλος αυτός διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης;

3.30

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

(i) Ο κύκλος C έχει διάμετρο με άκρα τα σημεία Α(3,2) και Β(5,-4).

(ii) Ο κύκλος C εφάπτεται στους θετικούς ημιάξονες Οx, Oy και την ευθεία με εξίσωση 12x-5y+102=0.

(iii) Ο κύκλος C είναι περιγεγραμμένος στο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α(0, 6), Β(6, 6) και Γ(-1, -1).

(iv) Ο κύκλος C εφάπτεται της ευθείας ε:3x+4y-35=0 στο σημείο Λ(5, 5) και διέρχεται από το σημείο Α(-2, 4).

3.31

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C:$x^2+y^2=25$ όταν:

(i) σημείο επαφής είναι το σημείο Α(-3, 4),

(ii) η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία ε:2x-y+1=0,

(iii) η εφαπτομένη είναι κάθετη προς την ευθεία δ: 3x+4y-2=0,

(iv) η εφαπτομένη περνάει από το σημείο Α(5, 10).

(Σχόλιο: Ενδεχομένως να υπάρχουν περισσότερες από μία εφαπτομένες).

3.32

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου

$$C: x^2 + y^2 - 10x + 2y + 16 = 0$$

στο σημείο του A(4, 2).

3.33

(i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in 3^*$ η εξίσωση $x^2 + (y-2)^2 = 2\lambda(x+y-2)$ παριστάνει κύκλο.

(ii) Να αποδείξετε ότι όλοι αυτοί οι κύκλοι περνούν από ένα σταθερό σημείο.

(iii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε:x+y-2 είναι κοινή εφαπτομένη των κύκλων. Ποιο είναι το σημείο επαφής σε καθέναν από αυτούς τους κύκλους;

(iv) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων βρίσκονται σε μια ευθεία που είναι κάθετη στην κοινή εφαπτομένη των κύκλων.

(v) Μετά από τη λύση των προηγούμενων ερωτημάτων, πώς αντιλαμβάνεστε τη θέση των κύκλων αυτών στο επίπεδο;

3.34

Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με άξονα συμμετρίας τον x΄x και κορυφή την αρχή των αξόνων όταν η παραβολή:

(i) έχει εστία το σημείο Ε(-6, 0),

(ii) έχει διευθετούσα την ευθεία δ: x=2,

(iii) διέρχεται από το σημείο Α(1, 2),

(iv) ο κύκλος με εξίσωση $(x-2)^2 + y^2 = 4$ διέρχεται από την εστία της.

3.35

Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει την κορυφή της στην αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον y΄y όταν η παραβολή:

(i) έχει διευθετούσα την ευθεία με εξίσωση y= -1,

(ii) έχει εστία το σημείο Ε(0, 2),

(iii) διέρχεται από το σημείο Α(2, 4),

(iv) ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + (y-2)^2 = 4$ διέρχεται από την εστία της.

3.36

Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ και ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=25$. Αν Μ είναι σημείο της έλλειψης και Ν σημείο του κύκλου έτσι, ώστε να έχουν την ίδια τετμημένη και ε είναι η εφαπτομένη του κύκλου στο Ν, να αποδείξετε ότι οι εστίες της έλλειψης ισαπέχουν από το σημείο Μ και την ευθεία ε.

3.37

Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή με εξίσωση $x^2 - y^2 = 16$ και ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$. Σε τυχαίο σημείο $A(x_1, y_1)$ του κύκλου με $x_1y_1 \neq 0$ φέρνουμε την εφαπτομένη του που τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Μ. Από το σημείο Μ θεωρούμε την παράλληλη ευθεία προς τον άξονα y΄y που τέμνει τον έναν κλάδο της υπερβολής στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο τη ΒΓ περνάει από το σημείο Α.

3.38

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(x, y) του επιπέδου για τα οποία ο λόγος των αποστάσεών τους από τα σημεία Α(-1, 0) και Β(3, 0) είναι $\frac{3}{2}$.

3.39

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(x, y) του επιπέδου των οποίων η απόσταση από το σημείο Α(1, 1) είναι διπλάσια της απόστασής τους από το σημείο Β(0, 2).

3.40

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(x, y) του επιπέδου που σχηματίζουν με τα σημεία Α(-2, 2) και Β(2, 4) ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{M} = 90^o$.

3.41

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(x, y) του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεών τους από τα σημεία Α(1, 2) και Β(-3, 0) είναι ίσο με 12.

3.42

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(x, y) του επιπέδου που ισαπέχουν από την ευθεία ε: $x = -2$ και το σημείο Α(2, 0).

3.43

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων με εξίσωση $x^2+y^2+2\lambda^2x-8\lambda y+\lambda^2=0$, όπου $\lambda \in 3^*$.

3.44

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(x, y) του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεών τους από τα σημεία Α(-2, 0) και Β(2, 0) είναι ίσο με 6.

3.45

Αν το σημείο $P(x_1, y_1)$ κινείται στον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$, να βρείτε σε ποια κωνική τομή κινείται το σημείο Μ(x, y) με συντεταγμένες $x = \frac{3}{2}x_1$ και $y = \frac{1}{2}y_1$.

Α. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

4.1

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει

(i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + \nu^2 = \dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$

(ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + \nu^3 = \left(\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2$

(iii) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + \nu(\nu + 1) = \dfrac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}$

(iv) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dots + \dfrac{1}{\nu(\nu+1)} = \dfrac{\nu}{\nu+1}$.

4.2

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει

$1 + x + x^2 + \dots + x^{\nu-1} = \dfrac{x^\nu - 1}{x-1}$, εφόσον $x \neq 1$.

4.3

Να αποδείξετε ότι:

(i) $\nu^2 > 2\nu + 1$ για κάθε ακέραιο $\nu \geq 3$

(ii) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^\nu > \nu$ για κάθε ακέραιο $\nu \geq 7$

(iii) $5^\nu > 5\nu - 1$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

4.4

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει

$\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dots + \dfrac{1}{\nu^2} \leq 2 - \dfrac{1}{\nu}$.

4.5

Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον β σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) $\alpha = 83$ και $\beta = 11$ (ii) $\alpha = -83$ και $\beta = 11$

(iii) $\alpha = 83$ και $\beta = -11$ (iv) $\alpha = -83$ και $\beta = -11$

4.6

Να αποδείξετε ότι:

(i) Το τετράγωνο ενός ακεραίου α παίρνει τη μορφή:

$$\alpha^2 = 3\kappa, \quad \kappa \in \mathbf{Z} \quad \text{ή} \quad \alpha^2 = 3\kappa + 1, \quad \kappa \in \mathbf{Z}.$$

(ii) Κάθε ακέραιος α της μορφής $\alpha = 6\kappa + 5$, $\kappa \in \mathbf{Z}$ μπορεί να πάρει τη μορφή $\alpha = 3\lambda + 2$, $\lambda \in \mathbf{Z}$. Ισχύει το αντίστροφο;

4.7

Αν α είναι ένας περιττός ακέραιος, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2 + (\alpha+2)^2 + (\alpha+4)^2 + 1}{12} \in \mathbf{Z}.$$

4.8

Για ποιες τιμές του θετικού ακεραίου β το πηλίκο της διαίρεσης του 660 με τον β είναι ίσο με 17; Ποιο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης αυτής σε καθεμιά περίπτωση;

4.9

Αν α, β, γ είναι περιττοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.

Έχει ακέραιες λύσεις η εξίσωση $x^2 + 3^{1997}x + 2001 = 0$;

4.10

Αν α, β είναι δύο περιττοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι

(i) $\dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{8} \in \mathbf{Z}$ και (ii) $\dfrac{\alpha^4 + \beta^4 - 2}{16} \in \mathbf{Z}$.

4.11

Για ποιες τιμές του ακέραιου κ ο αριθμός $\frac{3\kappa+4}{5}$ είναι ακέραιος;

4.12

Να αποδείξετε ότι:

(i) Το τετράγωνο ενός άρτιου είναι της μορφής $\alpha^2 = 4\lambda$, $\lambda \in \mathbf{Z}$, ενώ το τετράγωνο ενός περιττού είναι της μορφής $\alpha^2 = 4\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbf{Z}$.

(ii) Αν α, β είναι περιττοί ακέραιοι, τότε η εξίσωση $x^2 = \alpha^2 + \beta^2$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

(iii) Κανένας από τους όρους της αριθμητικής προόδου: 6, 10, 14, 18, 22, … δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού.

4.13

Αν $\alpha \mid \beta$ και $\gamma \mid \delta$, να αποδείξετε ότι $\alpha\gamma \mid \beta\delta$.

4.14

Αν $11 \mid (\alpha + 2)$ και $11 \mid (35 - \beta)$, να αποδείξετε ότι $11 \mid (\alpha + \beta)$.

4.15

Αν η διαφορά δύο ακεραίων είναι άρτιος αριθμός, να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων τους είναι πολλαπλάσιο του 4.

4.16

Αν $m \mid \alpha$ και $m>1$, να αποδείξετε ότι $m \nmid \alpha + 1$.

4.17

Να αποδείξετε ότι $2 \mid (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$ για όλους τους ακέραιους α, β, γ.

4.18

Έστω α ένας περιττός ακέραιος. Να αποδείξετε ότι

(i) Το τετράγωνο του α είναι της μορφής $\alpha^2 = 4\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbf{Z}$

(ii) $32 \mid (\alpha^2 + 3)(\alpha^2 + 7)$

4.19

Να αποδείξετε ότι $4 \nmid (\alpha^2 + 2)$, για κάθε $\alpha \in \mathbf{Z}$.

4.20

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι που να είναι και οι δύο τετράγωνα ακεραίων.

4.21

Αν $\beta \mid \alpha$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι $(2^\beta - 1) \mid (2^\alpha - 1)$.

4.22

Να αποδείξετε ότι

(i) Το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 6.

(ii) $6 \mid \alpha(\alpha + 1)(2\alpha + 1)$ για κάθε $\alpha \in \mathbf{Z}$

(iii) $6 \mid (\alpha^3 + 3\alpha^2 - 4\alpha)$ για κάθε $\alpha \in \mathbf{Z}$.

4.23

Να αποδείξετε ότι

(i) $3 \mid (\nu^3 + 2\nu)$ για κάθε $\nu \in \mathbf{N}$

(ii) $5 \mid (3 \cdot 27^\nu + 2 \cdot 2^\nu)$ για κάθε $\nu \in \mathbf{N}$

(iii) $14 | (3^{4\nu+2} + 5^{2\nu+1})$ για κάθε $\nu \in \mathbf{N}$

4.24

Έστω $\alpha, \beta, \kappa, \lambda \in \mathbf{Z}$ με $\kappa \neq \lambda$. Αν $(\kappa-\lambda) | (\kappa\alpha+\lambda\beta)$, να αποδείξετε ότι $(\kappa-\lambda) | (\lambda\alpha+\kappa\beta)$.

4.25

Οι στύλοι της ΔΕΗ που φωτίζουν το επαρχιακό και εθνικό δίκτυο της χώρας αποτελούν ένα ενιαίο δίκτυο με αριθμημένο τον κάθε στύλο. Ο υπ' αριθμόν 1 στύλος βρίσκεται έξω από τον κεντρικό υποσταθμό της ΔΕΗ η οποία κατασκεύασε τον εξής μηχανισμό: «Όταν ανάβει κάποιος στύλος, να ανάβει και ο επόμενός του». Όταν κάποια χρονική στιγμή ανάψει ο 1^{ος} στύλος, τότε θα φωτιστεί όλο το εθνικό και επαρχιακό δίκτυο της χώρας. Να βρείτε αν είναι σωστός (Σ) ή λανθασμένος (Λ) ο ισχυρισμός αυτός. Όποια και αν είναι η απάντησή σας, σε ποια μαθηματική γνώση στηρίχτηκε; (Υποτίθεται ότι η ΔΕΗ φροντίζει για την ομαλή λειτουργία των λαμπτήρων).

Σ ☐ Λ ☐

4.26

Σε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ (λανθασμένη) και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(i)	Ο αριθμός $11^{ν}-1$ λήγει σε 0 για κάθε $ν\in IN^*$.	Σ☐	Λ☐
(ii)	Ο αριθμός $17^{ν}+13^{ν}-2$ διαιρείται με το 4 για κάθε $ν\in IN^*$.	Σ☐	Λ☐
(iii)	Είναι $3^{ν}>2$ για κάθε $ν\in IN^*$.	Σ☐	Λ☐
(iv)	Το άθροισμα περιττού πλήθους περιττών αριθμών είναι περιττός αριθμός.	Σ☐	Λ☐
(v)	Το υπόλοιπο της διαίρεσης του -39 με τον -6 είναι -3.	Σ☐	Λ☐

4.27

	Ο αριθμός $\frac{α^2-1}{8}$ είναι ακέραιος για κάθε περιττό ακέραιο α.	Σ☐	Λ☐
(i)	Αν η διαφορά δύο ακεραίων είναι άρτιος, τότε και η διαφορά των τετραγώνων τους είναι άρτιος.	Σ☐	Λ☐
(ii)	Αν $3\|α$ και $6\|α$, τότε ισχύει πάντοτε $18\|α$.	Σ☐	Λ☐
(iii)	Αν $δ\|αβ$, τότε ισχύει πάντοτε $δ\|α$ ή $δ\|β$.	Σ☐	Λ☐
(iv)	Αν $δ\|(2α+3)$ και $δ\|(3α+2)$, τότε $δ=5$.	Σ☐	Λ☐
(v)	Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν τους ίδιους διαιρέτες.	Σ☐	Λ☐

4.28

i) Ο δάσκαλος μιας τάξης βάζει τους μαθητές του τμήματος σε μια σειρά και τους λέει: «Αν κάποιος μαθητής σηκωθεί στον πίνακα, τότε θα σηκώνεται και ο επόμενός του». Κάποια στιγμή ο δάσκαλος σηκώνει τον τρίτο στη σειρά μαθητή. Ποιο από όσα γράφονται στη συνέχεια θα συμβεί;

- ☐ Α: Θα σηκωθεί μόνο ο επόμενος από τον τρίτο στη σειρά μαθητή.
- ☐ Β: Θα σηκωθούν στον πίνακα όλοι οι μαθητές.
- ☐ Γ: Θα σηκωθούν μόνο όσοι είναι μετά τον τρίτο στη σειρά μαθητή.
- ☐ Δ: Θα σηκωθούν μόνο οι πρώτος, δεύτερος και τρίτος στη σειρά μαθητές.

ii) Σε ποια γνώση στηρίχτηκε ο συλλογισμός με τον οποίο επιλέξατε τη σωστή απάντηση;

4.29

Όταν ο γυμναστής ενός σχολείου παρατάσσει τους μαθητές σε πεντάδες για την παρέλαση, τότε πόσοι μαθητές είναι πιθανόν να μην κάνουν παρέλαση;

☐ Α: 4 ☐ Β: 3 ☐ Γ: 2

☐ Δ: 1 ☐ Ε: Κανένας ☐ Ζ: Από 0 έως 4.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε.

Σε καθεμία από τις ασκήσεις που ακολουθούν να σημειώσετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

4.30

Ο αριθμός $\alpha(\alpha^2 + 3)$ με $\alpha \in \mathbb{Z}$ είναι:

☐ Α: άρτιος ☐ Β: περιττός

☐ Γ: πολλαπλάσιος του 3 ☐ Δ: πολλαπλάσιος του 5

4.31

Ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του 38 με το -5;

☐ Α: $38 = (-5) \cdot (-8) - 2$ ☐ Β: $38 = (-5) \cdot (-7) + 3$

☐ Γ: $38 = (-5) \cdot (-6) + 8$ ☐ Δ: $38 = (-5) \cdot (-9) - 7$

4.32

Αν $3 \mid \alpha$ και $\alpha \mid (2000 + x)$, τότε είναι:

☐ Α: $x = 3\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}$ ☐ Β: $x = 3\kappa - 1, \kappa \in \mathbb{Z}$

☐ Γ: $x = 3\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{Z}$ ☐ Δ: $x = 3\kappa + 2, \kappa \in \mathbb{Z}$

4.33

Αν ο αριθμός $\alpha - \beta$ είναι άρτιος με $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, τότε ο αριθμός $\alpha + \beta$ είναι:

☐ Α: άρτιος ☐ Β: περιττός

☐ Γ: πολλαπλάσιο του 3 ☐ Δ: πρώτος

4.34

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με τον $\beta \neq 0$ είναι 9 και το πηλίκο 15. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με το 5 είναι:

☐ Α: 0 ☐ Β: 1 ☐ Γ: 2 ☐ Δ: 3 ☐ Ε: 4

4.35

Αν ο αριθμός α διαιρούμενος με το 12 δίνει το πηλίκο π και υπόλοιπο 7, ενώ διαιρούμενος με το 11 δίνει το ίδιο πηλίκο και υπόλοιπο 10, τότε ο α είναι ίσος με:

☐ Α: 43 ☐ Β: 3 ☐ Γ: 36 ☐ Δ: 33 ☐ Ε:46

4.36

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός θετικού ακεραίου α με το 21 είναι 15. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με το 7 είναι:

☐ Α: 0 ☐ Β: 1 ☐ Γ: 2 ☐ Δ: 3

☐ Ε: 4 ☐ Ζ: 5 ☐ Η: 6

4.37

Έστω ο θετικός ακέραιος α με $\alpha > 1$. Αν $\alpha \mid (7\beta + 25)$ και $\alpha \mid (3\beta + 2)$, τότε είναι:

☐ Α: $\alpha = \beta$ ☐ Β: $\alpha = 61$ ☐ Γ: $\alpha = 23$ ☐ Δ: $\alpha = 89$

4.38

Αν για τον θετικό ακέραιο α ισχύει $(\alpha + 1) \mid 20$ και $(\alpha + 7) \mid 30$, τότε:

☐ Α: $\alpha = 1$ ☐ Β: $\alpha = 2$ ☐ Γ: $\alpha = 3$

☐ Δ: $\alpha = 60$ ☐ Ε: $\alpha = 600$

4.39

Να συμπληρώσετε τα κενά στους πίνακες που ακολουθούν.

i)

Διαιρετέος	**Διαιρέτης**	**Πηλίκο**	**Υπόλοιπο**
37	-5		
-98	18		
-53	-17		
121	12		
$3\alpha^2 + 2,\ \alpha > 1,\ \alpha \in \mathbb{Z}$	α		

ii)

Διαιρετέος	**Διαιρέτης**	**Πηλίκο**	**Υπόλοιπο**
20		2	
20		2	
20		2	
20		2	
20		2	

4.40

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις.

i) Για κάθε τιμή του $\alpha \in \mathbb{Z}$ ο αριθμός $\alpha^2 + \alpha$ έχει οπωσδήποτε διαιρέτη τον αριθμό ……………………….

ii) Ο θετικός ακέραιος που διαιρούμενος με 11 και 13 δίνει το ίδιο πηλίκο και υπόλοιπο 10 και 2 αντίστοιχα είναι ο αριθμός ……………………….

iii) Κάθε ακέραιος α μπορεί να γραφεί στις μορφές $\alpha = 5\kappa + 4,\ \kappa \in \mathbb{Z}$, ή ...……………………….

iv) Ο αριθμός $2^{5\nu} - 1$ είναι πολλαπλάσιος του αριθμού …………………..……. για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

v) Αν α, β θετικοί ακέραιοι, όπου $\alpha \mid (28\beta + 9)$ και $\alpha \mid (7\beta + 1)$, τότε ο α ισούται με …………………..…….

vi) Ο αριθμός $11^\nu + 6^\nu - 2$ διαιρείται με τον αριθμό …………………..……. για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

vii) Ο θετικός ακέραιος α για τον οποίο ισχύει $(\alpha + 3) \mid 16$ και $(\alpha + 7) = 24$ είναι ο ...……………………….

4.41

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $α^3 – α$, όταν διαιρεθεί με τον 3, δίνει πάντα υπόλοιπο μηδέν.

4.42

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 25 δεν μπορεί να γραφεί ως άθροισμα άρτιου πλήθους προσθετέων καθένας από τους οποίους να είναι ίσος με 1 ή 3 ή 5.

4.43

i) Να αποδείξετε ότι αν ένα τριώνυμο έχει συντελεστές περιττούς αριθμούς, αποκλείεται να έχει ακέραιες ρίζες.

ii) Δεν υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο με μήκη κάθετων πλευρών περιττούς αριθμούς του οποίου το μήκος της υποτείνουσας να είναι ακέραιος αριθμός.

4.44

i) Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο οποιουδήποτε περιττού αριθμού διαιρούμενο με 4 ή 8 δίνει ο ίδιο υπόλοιπο.

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε περιττό αριθμό α οι αριθμοί $\frac{(α^2+3)(α^2+7)}{32}$ και $\frac{(α^2+7)(α^2-1)}{128}$ είναι ακέραιοι.

4.45

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2004 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1999$ όταν διαιρεθεί με το 2001 δίνει υπόλοιπο 3.

4.46

i) Να προσδιορίσετε τον ακέραιο $δ > 1$ ο οποίος διαιρεί τους ακεραίους $2α + 3$ και $3α – 2$, $α \in \mathbb{Z}$.

ii) Αν ο 13 διαιρεί τον ακέραιο $α + 2$ και τον ακέραιο $42 – β$, τότε να αποδείξετε ότι διαιρεί και το άθροισμα των ακεραίων α και β.

4.47

Αν $5 \mid (2004\alpha+1999\beta)$, τότε να αποδείξετε ότι $5 \mid (2004\beta+1999\alpha)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

4.48

i) Να αποδείξετε ότι το γινόμενο πέντε διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με τον 5.

ii) Να αποδείξετε ότι $5 \mid \nu(\nu^2 - 1)(\nu^2 - 4)$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

4.49

Να αποδείξετε ότι:

i) αν $(\alpha, \beta) = 3$ και $(\alpha, \beta\gamma) = 667$, τότε $(\alpha^2, \alpha\beta\gamma, \beta^2\gamma, \alpha\beta) = 2001$,

ii) αν $(\alpha, \beta) = 1$, $\gamma \mid \alpha$ και $\delta \mid \beta$, τότε $(\gamma, \delta) = 1$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$,

iii) αν $(\alpha, \beta\gamma) = 1$, τότε $(\alpha, \beta) = 1$ και $(\alpha, \gamma) = 1$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$.

4.50

i) Αν $[\alpha, \beta] = 667$, να αποδείξετε ότι $[\alpha, \beta, 3\alpha, 3\beta] = 2001$.

ii) Αν $[\alpha, \beta, \gamma] = \alpha\beta\gamma$, τότε $(\alpha, \beta) = 1$ και $(\alpha\beta, \gamma) = 1$.

iii) Αν $\alpha \in \mathbb{Z}^*$, τότε $[\alpha^2 + 2\alpha, \alpha + 1] = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)$.

4.51

Στο σύνολο των θετικών ακεραίων να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} (x, y) = 8 \\ [x, y] = 48 \end{cases}$ ii) $[x, y] + 1999 = 2004(x, y)$.

4.52

Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα στο σύνολο των θετικών ακεραίων.

i) $\begin{cases} [x, y] = 36 \\ (x, y) = 6 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} [x, y] = (x, y)^2 \\ [x, y] + (x, y) = 6 \end{cases}$