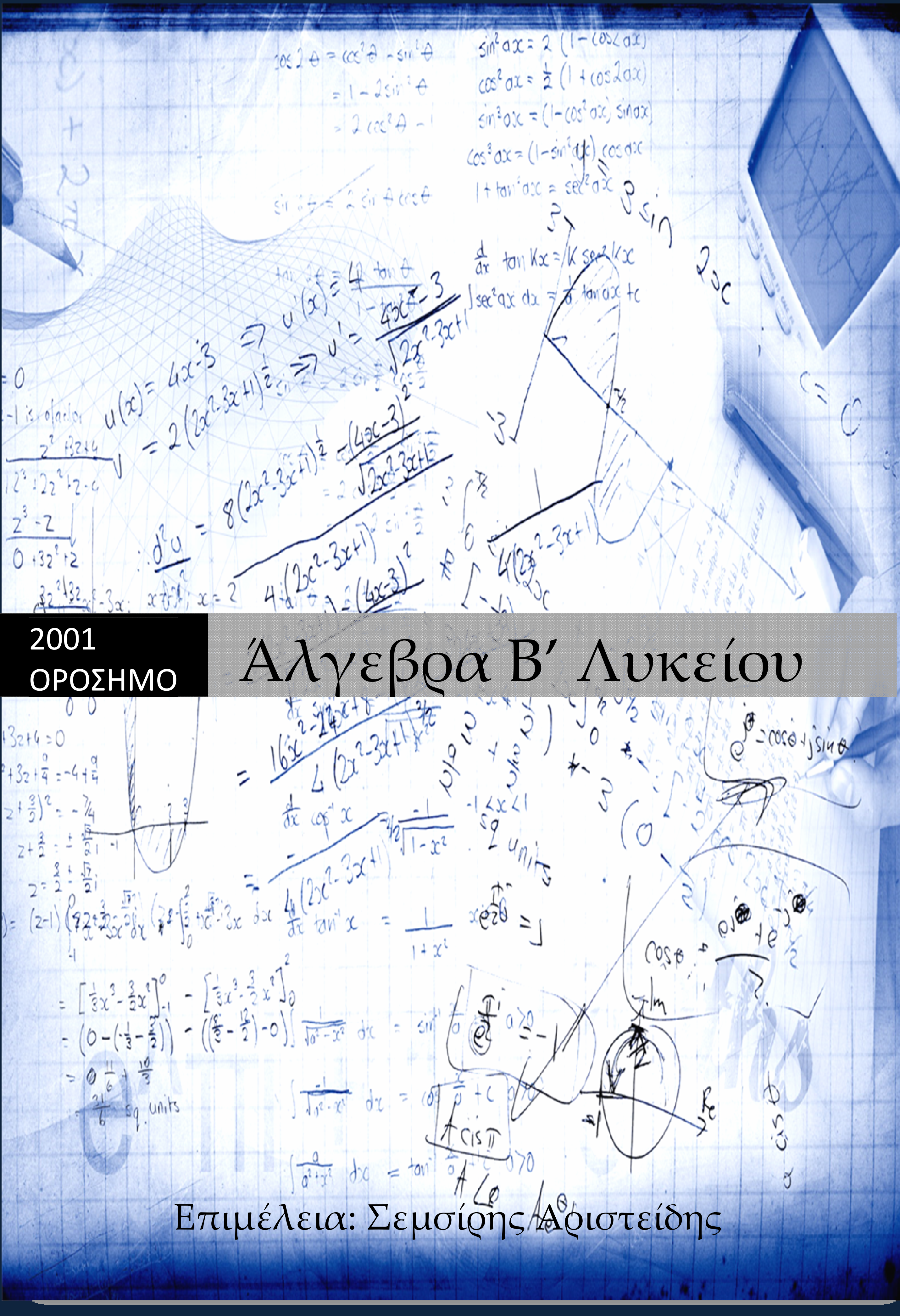


2001
ΟΡΟΣΗΜΟ

Άλγεβρα Β΄ Λυκείου

Επιμέλεια: Σεμσίρης Αριστείδης

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ 20ΡΟΣΗΜ01
www.2001.gr
ΝΕΑ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ : Ν.Γρηγορά & Φιλίππου γωνία • 69100 Κομοτηνή
• Τηλ. 2531024049 • Fax 2531021416
30 χρόνια Εμπειρία, Γνώση & Επιτυχίες

Άλγεβρα Β΄ Λυκείου

Περιέχει

- Συνοπτική Θεωρία
- Μεθοδολογία Ασκήσεων
- Λυμένες Ασκήσεις
- Λυμένα Θέματα Εξετάσεων

Επιμέλεια: Σεμσίρης Αριστείδης

Κεφάλαιο – 1ο: Τριγωνομετρία

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί

- Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο
  - **Γωνίες** $\kappa\cdot\pi\pm\theta,\kappa\in\mathbb{Z}$: Βρίσκουμε το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκει η γωνία και με βάση τον πίνακα προσήμων κάνουμε την αναγωγή.

Ο τριγωνομετρικός αριθμός δεν αλλάζει!

  - **Γωνίες** $(2\kappa+1)\cdot\dfrac{\pi}{2}\pm\theta,\kappa\in\mathbb{Z}$: Βρίσκουμε το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκει η γωνία και με βάση τον πίνακα προσήμων κάνουμε την αναγωγή. Στην περίπτωση αυτή προσέχουμε ότι ο τριγωνομετρικός αριθμός αλλάζει!

ημθ↔συνθ
εφθ↔σφθ

Παράδειγμα 1: Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων.

- $$A=\frac{\eta\mu\left(\frac{41\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{35\pi}{2}+\theta\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(21\pi-\theta\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{25\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(33\pi+\theta\right)}$$

Είναι: $\eta\mu\left(\frac{41\pi}{2}-\theta\right)=\eta\mu\left(\frac{40\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\eta\mu\left(10\cdot2\pi+\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\theta$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{35\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{34\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(17\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\eta\mu\theta$

$\varepsilon\varphi\left(21\pi-\theta\right)=\varepsilon\varphi\left(-\theta\right)=-\varepsilon\varphi\theta$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{25\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{24\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(6\cdot2\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\eta\mu\theta$

$\sigma\varphi\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\varphi\left(\frac{4\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\varepsilon\varphi\theta$

$\sigma\upsilon\nu\left(33\pi+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(16\cdot2\pi+\pi+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\theta\right)=-\sigma\upsilon\nu\theta$

Οπότε $A=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\eta\mu\theta\cdot\left(-\varepsilon\varphi\theta\right)}{\left(-\eta\mu\theta\right)\cdot\varepsilon\varphi\theta\cdot\left(-\sigma\upsilon\nu\theta\right)}=-1$

Στο ημίτονο και το συνημίτονο τα πολλαπλάσια του 2π «φεύγουν»!!
Στην εφαπτομένη και την συνεφαπτομένη τα πολλαπλάσια του π «φεύγουν»!!

- $$B=\frac{\varepsilon\varphi\left(17\pi+\varphi\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\varphi-11\pi\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{21\pi}{2}+\varphi\right)}{\sigma\varphi\left(\varphi-\frac{9\pi}{2}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(-\varphi-6\pi\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{11\pi}{2}+\varphi\right)}$$

Είναι: $\varepsilon\varphi\left(17\pi+\varphi\right)=\varepsilon\varphi\varphi$

$\sigma\upsilon\nu\left(\varphi-11\pi\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\varphi-\pi-5\cdot2\pi\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\varphi-\pi\right)=\sigma\upsilon\nu(\pi-\varphi)=-\sigma\upsilon\nu\varphi$

Αντίθετες γωνίες έχουν ίσα συνημίτονα και αντίθετα ημίτονα!

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{21\pi}{2}+\varphi\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{20\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\sigma\upsilon\nu\left(5\cdot 2\pi+\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\eta\mu\varphi$$

$$\sigma\varphi\left(\varphi-\frac{9\pi}{2}\right)=\sigma\varphi\left(\varphi-\frac{\pi}{2}-\frac{8\pi}{2}\right)=\sigma\varphi\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=-\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=-\varepsilon\varphi\varphi$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(-\varphi-6\pi\right)=\sigma\upsilon\nu\left(-\varphi\right)=\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Αντίθετες γωνίες έχουν αντίθετες εφαπτομένες και αντίθετες συνεφαπτομένες!

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{11\pi}{2}+\varphi\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{10\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\sigma\upsilon\nu\left(5\pi+\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\sigma\upsilon\nu\left(2\cdot 2\pi+\pi+\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=$$

$$=\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\eta\mu\varphi$$

Οπότε $\mathrm{B}=\dfrac{\varepsilon\varphi\varphi\cdot\left(-\sigma\upsilon\nu\varphi\right)\cdot\left(-\eta\mu\varphi\right)}{-\varepsilon\varphi\varphi\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\eta\mu\varphi}=-1$

- <u>Τριγωνομετρικές Ταυτότητες</u>

  Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες:

  - $\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1$
  - $\varepsilon\varphi\theta\cdot\sigma\varphi\theta=1$

Στις ασκήσεις όπου ζητείται να αποδειχθεί κάποια τριγωνομετρική σχέση είτε ξεκινάμε από το μέλος με τις περισσότερες πράξεις για να καταλήξουμε στο δεύτερο είτε δουλεύουμε με ισοδυναμίες για να καταλήξουμε σε κάτι που ισχύει.

<u>Παράδειγμα 2</u>: Να αποδειχθούν οι ταυτότητες.

- $\dfrac{\eta\mu\theta}{1-\sigma\varphi\theta}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\varepsilon\varphi\theta}=\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta$

Είναι:

$$\frac{\eta\mu\theta}{1-\sigma\varphi\theta}+\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\varepsilon\varphi\theta}=\frac{\eta\mu\theta}{1-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}}+\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\dfrac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}}=\frac{\eta\mu^2\theta}{\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta}=\frac{\eta\mu^2\theta}{\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta}-\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta}=$$

$$=\frac{\eta\mu^2\theta-\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{(\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)}{\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta}=\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta$$

- $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$
- $\sigma\varphi\theta=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$

- $\dfrac{1-2\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}-\dfrac{1-3\eta\mu\theta}{1-\eta\mu\theta}=3\varepsilon\varphi^2\theta$

Είναι:

$$\frac{1-2\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}-\frac{1-3\eta\mu\theta}{1-\eta\mu\theta}=\frac{1-2\eta\mu\theta}{1-\eta\mu^2\theta}-\frac{1-3\eta\mu\theta}{1-\eta\mu\theta}=\frac{1-2\eta\mu\theta}{(1-\eta\mu\theta)\cdot(1+\eta\mu\theta)}-\frac{1-3\eta\mu\theta}{1-\eta\mu\theta}=$$

$$=\frac{1-2\eta\mu\theta}{(1-\eta\mu\theta)\cdot(1+\eta\mu\theta)}-\frac{(1+\eta\mu\theta)\cdot(1-3\eta\mu\theta)}{(1+\eta\mu\theta)\cdot(1-\eta\mu\theta)}=\frac{(1-2\eta\mu\theta)-(1+\eta\mu\theta)\cdot(1-3\eta\mu\theta)}{(1+\eta\mu\theta)\cdot(1-\eta\mu\theta)}=$$

$$=\frac{1-2\eta\mu\theta-1+3\eta\mu\theta-\eta\mu\theta+3\eta\mu^2\theta}{1-\eta\mu^2\theta}=\frac{3\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}=3\varepsilon\varphi^2\theta$$

- $1-\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{1+\eta\mu\omega}=\eta\mu\omega$

Είναι:

$$1-\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{1+\eta\mu\omega}=\eta\mu\omega \Leftrightarrow \left(1+\eta\mu\omega\right)\cdot\left(1-\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{1+\eta\mu\omega}\right)=\left(1+\eta\mu\omega\right)\cdot\eta\mu\omega \Leftrightarrow 1+\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega=\eta\mu\omega+\eta\mu^2\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1=\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega$$

Άρα ισχύει!

- $\dfrac{1+\varepsilon\varphi^3 x}{1+\sigma\varphi^3 x}=\left(\dfrac{1+\varepsilon\varphi x}{1+\sigma\varphi x}\right)^3$

Είναι:

$$\frac{1+\varepsilon\varphi^3 x}{1+\sigma\varphi^3 x}=\left(\frac{1+\varepsilon\varphi x}{1+\sigma\varphi x}\right)^3 \Leftrightarrow \sigma\varphi^3 x\cdot\frac{1+\varepsilon\varphi^3 x}{1+\sigma\varphi^3 x}=\sigma\varphi^3 x\cdot\left(\frac{1+\varepsilon\varphi x}{1+\sigma\varphi x}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{\sigma\varphi^3 x+\sigma\varphi^3 x\cdot\varepsilon\varphi^3 x}{1+\sigma\varphi^3 x}=\left(\sigma\varphi x\cdot\frac{1+\varepsilon\varphi x}{1+\sigma\varphi x}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma\varphi^3 x+\sigma\varphi^3 x\cdot\varepsilon\varphi^3 x}{1+\sigma\varphi^3 x}=\left(\sigma\varphi x\cdot\frac{1+\varepsilon\varphi x}{1+\sigma\varphi x}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{\sigma\varphi^3 x+1}{1+\sigma\varphi^3 x}=\left(\frac{\sigma\varphi x+\sigma\varphi x\cdot\varepsilon\varphi x}{1+\sigma\varphi x}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma\varphi^3 x+1}{1+\sigma\varphi^3 x}=\left(\frac{\sigma\varphi x+\sigma\varphi x\cdot\varepsilon\varphi x}{1+\sigma\varphi x}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{1+\sigma\varphi^3 x}{1+\sigma\varphi^3 x}=\left(\frac{\sigma\varphi x+1}{1+\sigma\varphi x}\right)^3 \Leftrightarrow 1=1^3 \Leftrightarrow 1=1$$

Άρα ισχύει!

<u>Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις</u>

- <u>Περιοδικές Συναρτήσεις</u>

Περιοδική καλείται μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A και περίοδο $T>0$ όταν:

- Για κάθε $x\in A \Rightarrow$
  $\Rightarrow x+T\in A \,\&\, x-T\in A$
- $f(x)=f(x+T)=f(x-T)$

❖ $\varphi(x)=f(x)+a$ ⟶ Η f μετατοπίζεται α μονάδες «πάνω»

❖ $\varphi(x)=b\cdot f(x)$ ⟶ Η f «συστέλλεται»-«διαστέλλεται»

❖ $\varphi(x)=f(x+c)$ ⟶ Η f μετατοπίζεται c μονάδες «αριστερά»

❖ $\varphi(x)=f(\omega\cdot x)$ ⟶ $T_\varphi=\dfrac{T_f}{|\omega|}$

Να σημειώσουμε ότι αν $b<0$ η f αντιστρέφεται ως προς τον άξονα $x'x$ ενώ αν $\omega<0$ η f αντιστρέφεται ως προς τον άξονα $y'y$.

- <u>Η συνάρτηση</u>: $f(x)=\eta\mu x$

  Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ είναι μια περιοδική συνάρτηση με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

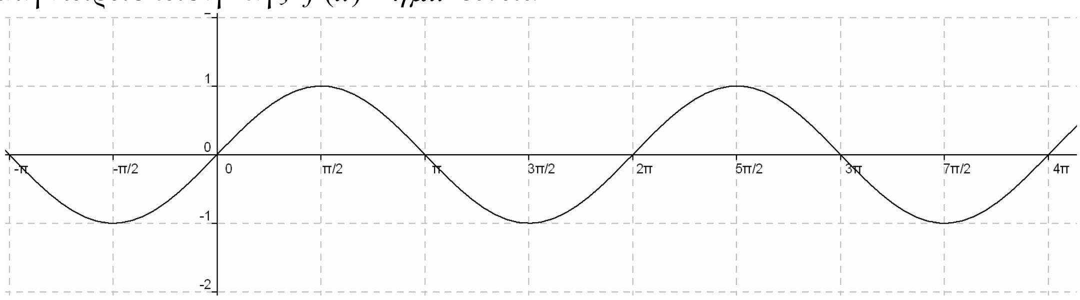
$$T_f=2\pi\ ,\ f_{\max}=1,\ f_{\min}=-1$$

Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R}$, f περιττή

Όσον αφορά την μονοτονία της $f(x)=\eta\mu x$ στο $[0,2\pi]$ ισχύει:

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu\theta$	0	1	0	-1	0
		↗	↘	↗	

Η γραφική παράσταση της $f(x)=\eta\mu x$ είναι:



- <u>Η συνάρτηση</u>: $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$

  Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι μια περιοδική συνάρτηση με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

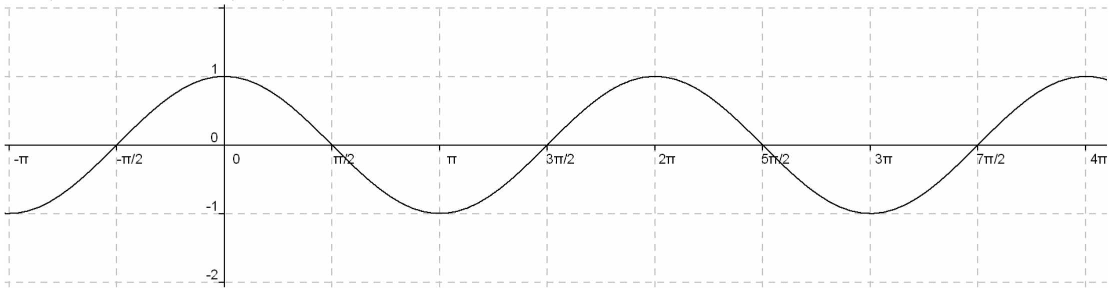
$$T_f=2\pi\ ,\ f_{\max}=1,\ f_{\min}=-1$$

Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R}$, f άρτια

Όσον αφορά την μονοτονία της $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ στο $[0,2\pi]$ ισχύει:

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sigma\upsilon\nu\theta$	1	0	-1	0	1
		↘		↗	

Η γραφική παράσταση της $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι:



- <u>Η συνάρτηση</u>: $f(x) = \varepsilon\varphi x$

Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι μια περιοδική συνάρτηση με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

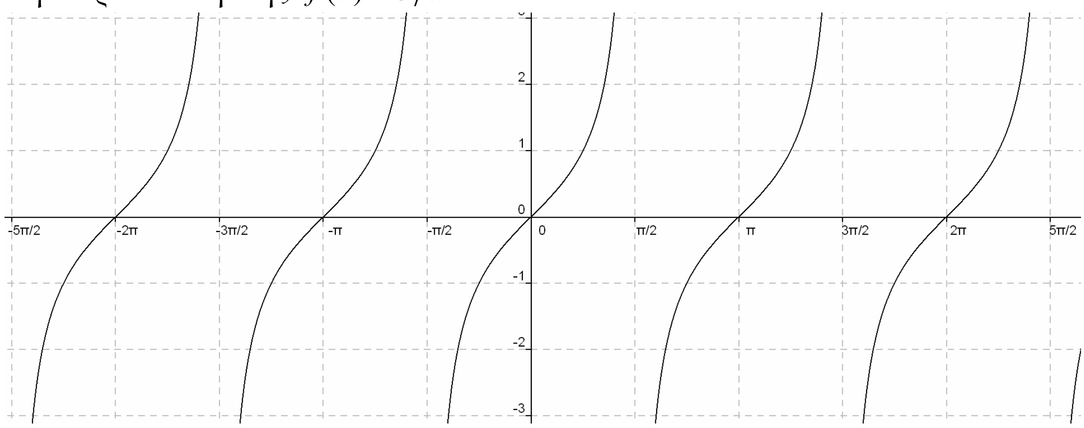
$T_f = \pi$, Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R} - \{\kappa \cdot \pi + \frac{\pi}{2} / \kappa \in \mathbb{Z}\}$

Δεν έχει μέγιστα-ελάχιστα!, f περιττή

Όσον αφορά την μονοτονία της $f(x) = \varepsilon\varphi x$ στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ισχύει:

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\varepsilon\varphi\theta$	Δεν ορίζεται	-1	0	1	Δεν ορίζεται
		$\nearrow$			

Η γραφική παράσταση της $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι:



<u>Σημείωση</u>: Στο συγκεκριμένο τμήμα περιλαμβάνονται ασκήσεις που περιέχουν ερωτήματα όπως:

- Να βρεθεί η περίοδος της συνάρτησης.
- Να δειχθεί ότι η συνάρτηση είναι άρτια-περιττή.
- Να βρεθεί η μονοτονία της συνάρτησης στο διάστημα $[0,2\pi]$.
- Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.
- Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης.
- Να βρεθούν οι παράμετροι αν γνωρίζετε την μέγιστη-ελάχιστη τιμή ή την περίοδο.

<u>Παράδειγμα 3</u>: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4+2\eta\mu(3x)$.

- Να βρείτε την περίοδο της f.
- Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.
- Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας της f στο $[0,T]$ όπου T η περίοδός της.

Είναι: $T_f=\dfrac{2\pi}{3}$, $f_{\max}=6$, $f_{\min}=2$

Θυμόμαστε:

- Η περίοδος αλλάζει όταν πολ/με «μέσα».
- Τα μέγιστα- ελάχιστα αλλάζουν όταν προσθέτουμε-πολ/με «έξω».

Επειδή το να υπολογίσουμε την μονοτονία μιας συνάρτησης όπως η παραπάνω ενέχει κινδύνους είναι προτιμότερο να κατασκευάσουμε ένα πίνακα όπως ο παρακάτω από τον οποίο θα προκύψουν επίσης η περίοδος, τα μέγιστα και τα ελάχιστα.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	1^{η}
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0	
		↗	↘	↘	↗	2^{η}
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	3^{η}
$4+2\eta\mu(3x)$	4	6	4	2	4	4^{η}
		↗	↘	↘	↗	5^{η}

Θυμόμαστε:

- Διαιρούμε την 1^{η} γραμμή με «3» και προκύπτει η 3^{η}
- Υπολογίζουμε τις τιμές στην 4^{η}
- Βάζουμε τα ίδια «βέλη» στην 2^{η} και 5^{η} εκτός και αν πολ/με με αρνητικό αριθμό είτε «μέσα» είτε «έξω»

Συνοπτικά από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι προέκυψε και η μέγιστη αλλά και η ελάχιστη τιμή καθώς και η περίοδος.
Επίσης όμως βλέπουμε ότι:

- Η f στο $[0,\frac{\pi}{6}]$ είναι γνησίως αύξουσα.
- Η f στο $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ είναι γνησίως φθίνουσα.
- Η f στο $[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}]$ είναι γνησίως αύξουσα.

<u>Παράδειγμα 4</u>: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}$.

- Να βρείτε την περίοδο της f.
- Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.
- Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας της f στο $[0,T]$ όπου T η περίοδός της.

Είναι:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	1^{η}
$\sigma\upsilon\nu x$	1	0	-1	0	1	
		↘		↗		2^{η}
x	0	$\frac{3\pi}{2}$	3π	$\frac{9\pi}{2}$	6π	3^{η}
$-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	4^{η}
		↗		↘		5^{η}

Θυμόμαστε:

- Διαιρούμε την 1^{η} γραμμή με «$\frac{1}{3}$» και προκύπτει η 3^{η}
- Υπολογίζουμε τις τιμές στην 4^{η}
- Βάζουμε αντίθετα τα «βέλη» στην 5^{η} απ' ότι στην 2^{η} γραμμή γιατί πολλαπλασιάζουμε με αρνητικό αριθμό εκτός

Συνοπτικά από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι: $T_f = 6\pi$, $f_{\max} = \frac{1}{2}$, $f_{\min} = -\frac{1}{2}$

Επίσης όμως βλέπουμε ότι:

- Η f στο $[0,3\pi]$ είναι γνησίως αύξουσα.
- Η f στο $[3\pi,6\pi]$ είναι γνησίως φθίνουσα.

<u>Παράδειγμα 5</u>: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\eta\mu(x-\pi)+1}{3+\eta\mu(x+\pi)+\sigma\upsilon\nu(x-\pi)}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
- Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.
- Να αποδείξετε ότι η περίοδος της f είναι $T = 2\pi$.

Αρχικά για το πεδίο ορισμού παρατηρούμε ότι έχουμε ημίτονα και συνημίτονα για τα οποία δεν έχουμε περιορισμούς. Ωστόσο επειδή έχουμε ένα κλάσμα πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός κάτι που ισχύει. Επομένως το πεδίο ορισμού είναι όλο το $\mathbb{R}$.

Είναι:

- $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu x$
- $\eta\mu(x-\pi) = -\eta\mu(\pi-x) = -\eta\mu x$
- $\eta\mu(x+\pi) = -\eta\mu x$
- $\sigma\upsilon\nu(x-\pi) = \sigma\upsilon\nu(\pi-x) = -\sigma\upsilon\nu x$

Οπότε: $f(x) = \dfrac{\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\eta\mu(x-\pi)+1}{3+\eta\mu(x+\pi)+\sigma\upsilon\nu(x-\pi)} \Rightarrow \boxed{f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + 1}{3-\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}, x\in\mathbb{R}}$

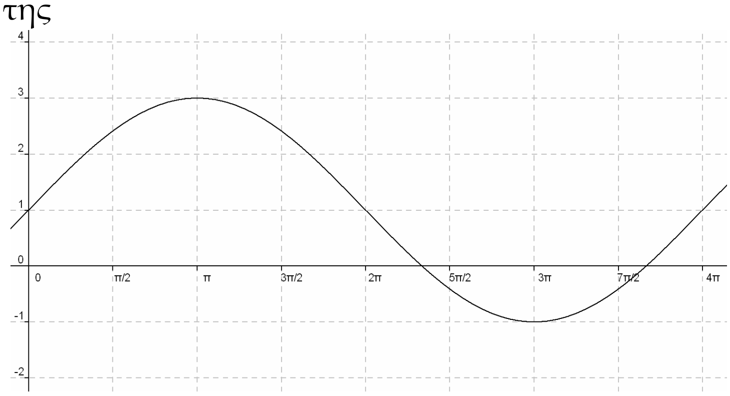
Τέλος παρατηρούμε ότι:

- Για κάθε $x\in\mathbb{R} \Rightarrow x+2\pi\in\mathbb{R}\ \&\ x-2\pi\mathbb{R}$
- $\begin{cases} f(x+2\pi) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu(x+2\pi)-\eta\mu(x+2\pi)+1}{3-\eta\mu(x+2\pi)-\sigma\upsilon\nu(x+2\pi)} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+1}{3-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x} = f(x) \\ f(x-2\pi) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu(x-2\pi)-\eta\mu(x-2\pi)+1}{3-\eta\mu(x-2\pi)-\sigma\upsilon\nu(x-2\pi)} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+1}{3-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x} = f(x) \end{cases}$

Επομένως η f είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$.

<u>Παράδειγμα 6</u>: Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \beta + \rho\cdot\eta\mu(\alpha x), x\in[0,4\pi]$, να βρεθούν:

- τιμές των α, β και ρ ($\rho,\alpha > 0$).
- για ποιες τιμές του $x\in[0,4\pi]$ η f παρουσιάζει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή.



Για να βρούμε τις τιμές των παραμέτρων παρατηρούμε από το σχήμα τα εξής:

- $f_{\max} = 3$
- $f_{\min} = -1$
- $T_f = 4\pi$

Πρέπει οπότε $\begin{cases} \beta + \rho = 3 \\ \beta - \rho = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\beta = 2 \\ \beta - \rho = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \rho = 2 \end{cases}$

Επίσης πρέπει $\dfrac{2\pi}{\alpha} = 4\pi \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$

Θυμόμαστε:

- $\beta \to$ μετατόπιση πάνω-κάτω
- $\rho \to$ συστολή-διαστολή
- $\alpha \to$ αλλάζει η περίοδος

Όπως βλέπουμε από το σχήμα η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της για $x = \pi$ και την ελάχιστη για $x = 3\pi$.

<u>Παράδειγμα 7</u>:

- Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = -0,5\sigma\upsilon\nu x$ είναι άρτια.
- Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2\varepsilon\varphi x$ είναι περιττή.

Είναι:

- Το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το $\mathbb{R}$.

  Επίσης $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \\ f(-x) = -0,5\sigma\upsilon\nu(-x) = -0,5\sigma\upsilon\nu x = f(x) \end{cases}$, άρα f άρτια!
- Το πεδίο ορισμού της g είναι όλο το $\mathbb{R} - \{\kappa \cdot \pi + \dfrac{\pi}{2} / \kappa \in \mathbb{Z}\}$.

  Επίσης $\begin{cases} x \in \mathbb{R} - \{\kappa \cdot \pi + \dfrac{\pi}{2} / \kappa \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} - \{\kappa \cdot \pi + \dfrac{\pi}{2} / \kappa \in \mathbb{Z}\} \\ g(-x) = 2\varepsilon\varphi(-x) = -2\varepsilon\varphi x = -g(x) \end{cases}$, άρα g περιττή!

<u>Τριγωνομετρικές Εξισώσεις</u>

- $\eta\mu x = a$

  Βρίσκουμε μία λύση της παραπάνω εξίσωσης οπότε «όλες» οι λύσεις δίνονται από τη σχέση

  $$x = \begin{cases} 2\kappa\pi + \theta \\ 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

- $\sigma\upsilon\nu x = a$

  Βρίσκουμε μία λύση της παραπάνω εξίσωσης οπότε «όλες» οι λύσεις δίνονται από τη σχέση

  $$x = \begin{cases} 2\kappa\pi + \theta \\ 2\kappa\pi - \theta \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

- $\varepsilon\varphi x = a$

  Βρίσκουμε μία λύση της παραπάνω εξίσωσης οπότε «όλες» οι λύσεις δίνονται από τη σχέση

  $$x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$$

- $\sigma\varphi x = a$

  Βρίσκουμε μία λύση της παραπάνω εξίσωσης οπότε «όλες» οι λύσεις δίνονται από τη σχέση

$$x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$$

<u>Παράδειγμα 8</u>: Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

α) $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ β) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ γ) $\varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$ δ) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ε) $2\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x - 3 = 0$

στ) $\sigma\varphi x = 1$ ζ) $\frac{2\eta\mu x + 7}{5} = 1$ η) $\sqrt{3}\cdot\sigma\varphi x - 3 = 0$ θ) $\eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{7}$ ι) $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$

Είναι:

α) $$\eta\mu x = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{x = \begin{cases} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}}$$

β) $$\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{x = \begin{cases} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}}$$

γ) $$\varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \Rightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}}$$

δ) $$\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{x = \begin{cases} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}}$$

ε) $$2\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x - 3 = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{x = \begin{cases} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}}$$

στ) $$\sigma\varphi x = 1 \Rightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}}$$

ζ) $$\frac{2\eta\mu x + 7}{5} = 1 \Rightarrow \eta\mu x = -1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x\begin{cases} 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \\ 2\kappa\pi + \pi - \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}}$$

η) $$\sqrt{3}\cdot\sigma\varphi x - 3 = 0 \Rightarrow \sigma\varphi x = \sqrt{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi\frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}}$$

θ) $$\eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{7} \Rightarrow \boxed{x = \begin{cases} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{7} \\ 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{7} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}}$$

ι) $$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x = \begin{cases} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}}$$

<u>Παράδειγμα 9</u>: Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

α) $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$ β) $\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{3}$ γ) $\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

δ) $\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0$ ε) $\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$ στ) $\dfrac{\eta\mu\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)}{\eta\mu x}=1$

ζ) $\dfrac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{\sigma\upsilon\nu x}=1$ η) $|2\eta\mu x|=1$ θ) $|\eta\mu x|=|\sigma\upsilon\nu 2x|$

Είναι:

α)
$$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1\Rightarrow \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{2}\Rightarrow x+\frac{\pi}{6}=\begin{cases}2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\\ 2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow x+\frac{\pi}{6}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3},\kappa\in\mathbb{Z}}$$

β)
$$\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{3}\Rightarrow \varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}\Rightarrow x-\frac{\pi}{5}=\kappa\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{5}\Rightarrow \boxed{x=\kappa\pi+\frac{8\pi}{15},\kappa\in\mathbb{Z}}$$

γ)
$$\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow \eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\Rightarrow$$

Όταν λύνουμε μια τριγωνομετρική εξίσωση χρειάζεται να έχουμε τον ίδιο τριγωνομετρικό αριθμό!

$$x-\frac{\pi}{4}=\begin{cases}2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}-x\\ 2\kappa\pi+\pi-\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}-x\\ x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\pi-\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{12}\\ \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta\end{cases}\Rightarrow \boxed{x=\kappa\pi+\frac{5\pi}{24},\kappa\in\mathbb{Z}}$$

Αλλάζουμε τριγωνομετρικό αριθμό με τις σχέσεις:

- $\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
- $\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

δ)
$$\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow \eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\eta\mu x=0\Rightarrow \eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=\begin{cases}2\kappa\pi+x\\ 2\kappa\pi+\pi-x\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}2x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+x\\ 2x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\pi-x\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\\ 3x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow \boxed{\begin{cases}x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\\ x=\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{5\pi}{12}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}}$$

ε) $\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Rightarrow \varepsilon\varphi\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\varepsilon\varphi x\Rightarrow \varepsilon\varphi\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\varepsilon\varphi(-x)\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=\kappa\pi+(-x)\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow \boxed{x=\frac{\kappa\pi}{2}-\frac{\pi}{8},\kappa\in\mathbb{Z}}$

Θυμόμαστε:
- $-\eta\mu x=\eta\mu(-x)$
- $-\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu(\pi-x)$
- $-\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi(-x)$
- $-\sigma\varphi x=\sigma\varphi(-x)$

στ) $\frac{\eta\mu\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)}{\eta\mu x}=1\Rightarrow \eta\mu\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=\eta\mu x\Rightarrow x+\frac{3\pi}{4}=\begin{cases}2\kappa\pi+x\\2\kappa\pi+\pi-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{3\pi}{4}=2\kappa\pi+x\\x+\frac{3\pi}{4}=2\kappa\pi+\pi-x\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta\\2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow\boxed{x=\kappa\pi+\frac{\pi}{8},\kappa\in\mathbb{Z}}$

Όταν βλέπουμε κλάσματα δεν ξεχνάμε τους περιορισμούς!

Πρέπει $\eta\mu x\neq 0\Leftrightarrow \eta\mu x\neq\eta\mu 0\Leftrightarrow x\neq\begin{cases}2\kappa\pi+0\\2\kappa\pi+\pi-0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq\kappa\pi,\kappa\in\mathbb{Z}$ που ισχύει για τις λύσεις που βγάλαμε!

ζ) $\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{\sigma\upsilon\nu x}=1\Rightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Rightarrow \frac{\pi}{6}-x=\begin{cases}2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-x\\2\kappa\pi+\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{6}-x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-x\\\frac{\pi}{6}-x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}+x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta\\-2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow\boxed{x=\kappa\pi-\frac{\pi}{6},\kappa\in\mathbb{Z}}$

Πρέπει $\sigma\upsilon\nu x\neq 0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\neq\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x\neq 2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}$ που ισχύει για τις λύσεις που βγάλαμε!

η) $|2\eta\mu x|=1\Rightarrow\begin{cases}2\eta\mu x=1\\2\eta\mu x=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\eta\mu x=1/2\\\eta\mu x=-1/2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6} & (1)\\\eta\mu x=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) & (2)\end{cases}$

Θυμόμαστε ότι για $\theta>0$:
$|x|=\theta\Leftrightarrow x=\theta$ ή $x=-\theta$

Λύνουμε την (1): $\eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Rightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$

Λύνουμε την (2): $\eta\mu x=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}\\ x=2\kappa\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$

Οι λύσεις που προέκυψαν μπορούν να γραφούν όλες μαζί ως εξής: $\boxed{x=\kappa\pi\pm\frac{\pi}{6},\kappa\in\mathbb{Z}}$

θ) $|\eta\mu x|=|\sigma\upsilon\nu 2x|\Rightarrow\begin{cases}\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu 2x\\ \eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu 2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu 2x\\ \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu(\pi-2x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\eta\mu x=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) & (1)\\ \eta\mu x=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\pi+2x\right) & (2)\end{cases}$

Θυμόμαστε:
$|x|=|y|\Leftrightarrow x=\pm y$

Λύνουμε την (1):

$$\eta\mu x=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\Rightarrow x=\begin{cases}2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-2x\\ 2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{2}+2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-2x\\ x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}+2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\\ -x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\\ x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$$

Λύνουμε την (2):

$$\eta\mu x=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\pi+2x\right)\Rightarrow\eta\mu x=\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow x=\begin{cases}2\kappa\pi+2x-\frac{\pi}{2}\\ 2\kappa\pi+\pi-2x+\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi+2x-\frac{\pi}{2}\\ x=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2}-2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\\ 3x=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$$

Οι λύσεις που προέκυψαν μπορούν να γραφούν όλες μαζί ως εξής: $\boxed{x=\begin{cases}\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\\ \frac{\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}}$

<u>Παράδειγμα 10</u>: Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

α) $2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x=0$ β) $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{\eta\mu x}$ γ) $\sigma\varphi x\cdot\sigma\upsilon\nu x+1=\sigma\upsilon\nu x+\sigma\varphi x$

δ) $2\sigma\upsilon\nu^2 x+3\sigma\upsilon\nu x+1=0$ ε) $\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}=4$ στ) $2\eta\mu^2 x-\left(\sqrt{2}-2\right)\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{2}-2=0$

Είναι:

α) $2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x=0\Rightarrow\sigma\upsilon\nu x\cdot(2\eta\mu x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}\sigma\upsilon\nu x=0\\ 2\eta\mu x+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sigma\upsilon\nu x=0 & (1)\\ \eta\mu x=-\frac{1}{2} & (2)\end{cases}$

Λύνουμε την (1): $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}}$

Λύνουμε την (2): $\eta\mu x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = \begin{cases} 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2\kappa\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \begin{cases} 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}}$

β)

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{\eta\mu x} \Rightarrow \eta\mu^2 x + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 1 \Rightarrow \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 1 - \eta\mu^2 x \Rightarrow \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^2 x = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x \cdot (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x = 0 \quad (1) \\ \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \quad (2) \end{cases}$$

Λύνουμε την (1): $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}}$

Λύνουμε την (2): $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow 1 = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \Rightarrow \sigma\varphi x = 1 \Rightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}}$

Πρέπει $\eta\mu x \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x \neq \eta\mu 0 \Leftrightarrow x \neq \begin{cases} 2\kappa\pi + 0 \\ 2\kappa\pi + \pi - 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$ που ισχύει για τις τιμές που βγάλαμε!

γ)

$$\sigma\varphi x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 1 = \sigma\upsilon\nu x + \sigma\varphi x \Rightarrow \sigma\varphi x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 1 - \sigma\upsilon\nu x - \sigma\varphi x = 0 \Rightarrow \sigma\varphi x \cdot (\sigma\upsilon\nu x - 1) - (\sigma\upsilon\nu x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot (\sigma\varphi x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x = 1 \quad (1) \\ \sigma\varphi x = 1 \quad (2) \end{cases}$$

Λύνουμε την (1): $\sigma\upsilon\nu x = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 0 \Rightarrow x = 2\kappa\pi \pm 0 \Rightarrow \boxed{x = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}}$

Λύνουμε την (2): $\sigma\varphi x = 1 \Rightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}}$

Επειδή έχουμε $\sigma\varphi x$ πρέπει $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$ κάτι που ισχύει για τις λύσεις που βγάλαμε!

Όταν λύνουμε μία σύνθετη τριγωνομετρική εξίσωση τότε όπως και στις πολυωνυμικές εξισώσεις έχουμε στο μυαλό μας την λέξη «παραγοντοποίηση»!

δ) $2\sigma\upsilon\nu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$

Είναι: $2\omega^2 + 3\omega + 1 = 0$

Οπότε: $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$

$$\omega_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm 1}{2 \cdot 2} = \begin{cases} -1/2 \\ -1 \end{cases}$$

Αν θέσουμε $\sigma\upsilon\nu x = \omega$ παρατηρούμε ότι η διπλανή εξίσωση είναι ένα τριώνυμο και λύνεται με διακρίνουσα!

Αν $\omega = -\frac{1}{2}$ τότε: $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}}$

Αν $\omega = -1$ τότε: $\sigma\upsilon\nu x = -1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\pi \Rightarrow x = 2\kappa\pi \pm \pi \Rightarrow \boxed{x = 2\kappa\pi + \pi, \kappa \in \mathbb{Z}}$

$$\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} = 4 \Rightarrow \frac{(1+\eta\mu x)\cdot(1+\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x\cdot(1+\eta\mu x)} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x\cdot(1+\eta\mu x)} = 4 \Rightarrow \frac{(1+\eta\mu x)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x\cdot(1+\eta\mu x)} = 4 \Rightarrow$$

ε) $\Rightarrow (1+\eta\mu x)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x = 4\sigma\upsilon\nu x\cdot(1+\eta\mu x) \Rightarrow 1 + 2\eta\mu x + \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 4\sigma\upsilon\nu x\cdot(1+\eta\mu x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 + 2\eta\mu x = 4\sigma\upsilon\nu x\cdot(1+\eta\mu x) \Rightarrow 2(1+\eta\mu x) - 4\sigma\upsilon\nu x\cdot(1+\eta\mu x) = 0 \Rightarrow (1+\eta\mu x)\cdot(1-2\sigma\upsilon\nu x) = 0 \quad (1)$$

Πρέπει $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ και $1+\eta\mu x \neq 0$ οπότε από την (1) προκύπτει:

$1 - 2\sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}}$

στ)

$$2\eta\mu^2 x - \left(\sqrt{2}-2\right)\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{2} - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(1-\sigma\upsilon\nu^2 x\right) - \left(\sqrt{2}-2\right)\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{2} - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\sigma\upsilon\nu^2 x - \left(\sqrt{2}-2\right)\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \left(\sqrt{2}-2\right)\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{2} = 0$$

Με την αντικατάσταση $\eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$ καταλήγουμε σε τριώνυμο οπότε θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x = \omega$.

Είναι: $2\omega^2 + \left(\sqrt{2}-2\right)\omega - \sqrt{2} = 0$

Οπότε: $\Delta = b^2 - 4ac = \left(\sqrt{2}-2\right)^2 - 4\cdot 2\cdot\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}+2\right)^2$

$$\omega_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\left(\sqrt{2}-2\right) \pm \sqrt{\left(\sqrt{2}+2\right)^2}}{2\cdot 2} = \frac{2-\sqrt{2} \pm \left(\sqrt{2}+2\right)}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Αν $\omega = 1$ τότε: $\sigma\upsilon\nu x = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}}$

Αν $\omega = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ τότε: $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x = 2\kappa\pi \pm \frac{3\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}}$

Κεφάλαιο – 2ο: Πολυώνυμα

Πολυώνυμα

- Βασικές έννοιες πολυωνύμων
  - *Πολυώνυμο* του x ονομάζουμε κάθε παράσταση της μορφή:
  $$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$$
  όπου $\nu\in\mathbb{N}$ και $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_\nu$ είναι πραγματικοί αριθμοί.
  - Οι αριθμοί $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_\nu$ ονομάζονται *συντελεστές του πολυωνύμου* και ειδικότερα ο α_0 καλείται σταθερός όρος του πολυωνύμου.
  - Το πολυώνυμο της μορφής α_0, δηλαδή το πολυώνυμο που είναι ίσο με ένα σταθερό πραγματικό αριθμό, ονομάζεται *σταθερό πολυώνυμο*.
  - Το σταθερό πολυώνυμο 0 ονομάζεται *μηδενικό πολυώνυμο*.
  - *Βαθμό* ενός πολυωνύμου ονομάζουμε τον εκθέτη της μεγαλύτερης δύναμης του x που εμφανίζεται. Ειδικότερα είναι:
  $$\begin{cases}\text{Αν } P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0 \text{ με } \alpha_\nu\neq 0\Rightarrow \deg P(x)=\nu\\ \text{Αν } P(x)=\alpha_0 \text{ με } \alpha_0\neq 0\Rightarrow \deg P(x)=0\\ \text{Αν } P(x)=0\Rightarrow \deg P(x)=\text{δεν ορίζεται}\end{cases}$$
  - Δύο πολυώνυμα θα είναι *ίσα* όταν έχουν όλους τους συντελεστές τους ίσους ένα προς ένα.
  - *Αριθμητική τιμή* ενός πολυωνύμου για $x=\rho$ ονομάζουμε το $P(\rho)$. Αν το $P(\rho)$ προκύψει «μηδέν» τότε το ρ καλείται *ρίζα του πολυωνύμου*.
  - Όσον αφορά τις *πράξεις* μεταξύ πολυωνύμων η πρόσθεση, η αφαίρεση και ο πολλαπλασιασμός γίνονται σύμφωνα με τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

Παραστάσεις με όρους όπως $\sqrt{x},\frac{1}{x},x^{\frac{2}{3}}$ δεν είναι πολυώνυμα!

Παράδειγμα 1: Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-\lambda x^2+4x+2\lambda$. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, ώστε το $x=-2$ να είναι ρίζα του $P(x)$.

Είναι: $P(-2)=0\Rightarrow(-2)^3-\lambda(-2)^2+4(-2)+2\lambda=0\Rightarrow$
$\Rightarrow -8-4\lambda-8+2\lambda=0\Rightarrow -2\lambda=16\Rightarrow \boxed{\lambda=-8}$

Θυμόμαστε:
ρ ρίζα του $P(x)\Rightarrow P(\rho)=0$

Παράδειγμα 2: Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2-(\beta-2\alpha)x+3\alpha+4\beta$. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε το $P(x)$ να έχει ρίζα το -1 και η τιμή του για $x=-2$ να είναι -5.

Είναι:

$P(-1)=0\Rightarrow(-1)^3+\alpha(-1)^2-(\beta-2\alpha)(-1)+3\alpha+4\beta=0\Rightarrow -1+\alpha+\beta-2\alpha+3\alpha+4\beta=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{2\alpha+5\beta=1}$ (1)

$P(-2)=-5\Rightarrow(-2)^3+\alpha(-2)^2-(\beta-2\alpha)(-2)+3\alpha+4\beta=-5\Rightarrow -8+4\alpha+2\beta-4\alpha+3\alpha+4\beta=-5\Rightarrow$

$\Rightarrow 3\alpha+6\beta=3\Rightarrow \boxed{\alpha+2\beta=1}$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει:

$$\begin{cases}2\alpha+5\beta=1\\ \alpha+2\beta=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\alpha+5\beta=1\\ \alpha=1-2\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\left(1-2\beta\right)+5\beta=1\\ \alpha=1-2\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2-4\beta+5\beta=1\\ \alpha=1-2\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{\beta=-1}\\ \boxed{\alpha=3}\end{cases}$$

<u>Παράδειγμα 3</u>: Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\left(x-1\right)^{10}-x^9+\alpha x+\beta$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε ο σταθερός όρος του $P(x)$ να είναι 6 και το άθροισμα των συντελεστών του $P(x)$ να είναι 7.

Είναι:

$P(0)=6\Rightarrow\left(0-1\right)^{10}-0^9+\alpha\cdot0+\beta=6\Rightarrow$

$\Rightarrow1+\beta=6\Rightarrow\boxed{\beta=5}$

Θυμόμαστε:
Ο σταθερός όρος ενός πολυωνύμου προκύπτει αν βάλουμε όπου x το «μηδέν»!

$P(1)=7\Rightarrow\left(1-1\right)^{10}-1^9+\alpha\cdot1+\beta=7\Rightarrow$

$\Rightarrow\alpha+\beta=8\overset{\beta=5}{\Rightarrow}\boxed{\alpha=3}$

Θυμόμαστε:
Το άθροισμα των συντελεστών ενός πολυωνύμου προκύπτει αν βάλουμε όπου x το «ένα»!

<u>Παράδειγμα 4</u>: Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^3+\lambda^2-6\lambda)x^2+(\lambda^2+\lambda-6)x-\lambda+2$. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε: α) το $P(x)$ να είναι μηδενικού βαθμού

β) να μην ορίζεται ο βαθμός του $P(x)$

Είναι:

α) Για να είναι το πολυώνυμο $P(x)$ μηδενικού βαθμού θα πρέπει να είναι σταθερό και μη μηδενικό οπότε πρέπει:

$$\begin{cases}\lambda^3+\lambda^2-6\lambda=0\Rightarrow\lambda\left(\lambda+3\right)\left(\lambda-2\right)=0\\ \lambda^2+\lambda-6=0\Rightarrow\left(\lambda+3\right)\left(\lambda-2\right)=0\\ -\lambda+2\neq0\Rightarrow\lambda\neq2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=0 \text{ ή } \lambda=-3 \text{ ή } \lambda=2\\ \lambda=-3 \text{ ή } \lambda=2\\ \lambda\neq2\end{cases}\Rightarrow\boxed{\lambda=-3}$$

Θυμόμαστε:
Το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1x+\alpha_0$ είναι μηδενικού βαθμού όταν $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}=...=\alpha_1=0$ και $\alpha_0\neq0$!
Για να βρούμε τις άγνωστες παραμέτρους συναληθεύουμε τις σχέσεις που προκύπτουν.

β) Για να μην ορίζεται ο βαθμός του $P(x)$ πρέπει να είναι το μηδενικό πολυώνυμο επομένως πρέπει:

$$\begin{cases}\lambda^3+\lambda^2-6\lambda=0\Rightarrow\lambda\left(\lambda+3\right)\left(\lambda-2\right)=0\\ \lambda^2+\lambda-6=0\Rightarrow\left(\lambda+3\right)\left(\lambda-2\right)=0\\ -\lambda+2=0\Rightarrow\lambda02\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=0 \text{ ή } \lambda=-3 \text{ ή } \lambda=2\\ \lambda=-3 \text{ ή } \lambda=2\\ \lambda=2\end{cases}\Rightarrow\boxed{\lambda=2}$$

Θυμόμαστε:
Ο βαθμός ενός πολυωνύμου δεν ορίζεται όταν είναι το μηδενικό πολυώνυμο, δηλαδή όταν όλοι οι συντελεστές είναι μηδενικοί.
Συναληθεύοντας τις σχέσεις που προκύπτουν βρίσκουμε τις άγνωστες παραμέτρους.

<u>Παράδειγμα 5</u>: Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=\lambda^2x^3+2x^2-\lambda^2x-\lambda$ και $Q(x)=2\lambda x^3+\lambda x^2-4x-2$. Αφού βρείτε το πολυώνυμο $K(x)=P(x)-Q(x)$ να υπολογίσετε τον βαθμό του $K(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

Είναι:

$$K(x)=P(x)-Q(x)\Rightarrow K(x)=\left(\lambda^2x^3+2x^2-\lambda^2x-\lambda\right)-\left(2\lambda x^3+\lambda x^2-4x-2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow K(x)=\lambda^2x^3+2x^2-\lambda^2x-\lambda-2\lambda x^3-\lambda x^2+4x+2\Rightarrow\boxed{K(x)=\left(\lambda^2-2\lambda\right)x^3+\left(2-\lambda\right)x^2+\left(4-\lambda^2\right)x+2-\lambda}$$

Αν $\lambda^2-2\lambda\neq0\Rightarrow\lambda\left(\lambda-2\right)\neq0\Rightarrow\boxed{\lambda\neq0 \text{ και } \lambda\neq2}$ τότε $\boxed{\deg K(x)=3}$.

Αν $\boxed{\lambda=0}$ τότε $K(x)=2x^2+4x+2$ και $\boxed{\deg K(x)=2}$.

Αν $\boxed{\lambda=2}$ τότε $K(x)=0$ και $\deg K(x)\rightarrow$ δεν ορίζεται.

Θυμόμαστε:
Όταν θέλουμε να βρούμε τον βαθμό ενός πολυωνύμου ξεκινάμε από τον μεγιστοβάθμιο όρο και εξετάζουμε για ποιες τιμές τις παραμέτρου ο συντελεστής του είναι διάφορος του μηδενός. Τέλος εξετάζουμε τις τιμές της παραμέτρου που απορρίψαμε στην παραπάνω διαδικασία.

<u>Παράδειγμα 6</u>: Δίνονται τα πολυώνυμα $\begin{cases}P(x)=\alpha^2x^3+(\alpha^2+5\alpha)x^2+\alpha^2x-10\\ Q(x)=4x^3+2(\alpha-1)x^2-2\alpha x-\alpha^2+3\alpha\end{cases}$. Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ τα πολυώνυμα είναι ίσα.

Για να είναι τα δύο πολυώνυμα ίσα πρέπει:

$$\begin{cases}-10=-\alpha^2+3\alpha\\ \alpha^2=-2\alpha\\ \alpha^2+5\alpha=2\left(\alpha-1\right)\\ \alpha^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha^2-3\alpha-10=0\\ \alpha^2+2\alpha=0\\ \alpha^2+3\alpha+2=0\\ \alpha^2-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(\alpha-5\right)\left(\alpha+2\right)=0\\ \alpha\left(\alpha+2\right)=0\\ \left(\alpha+1\right)\left(\alpha+2\right)=0\\ \left(\alpha-2\right)\left(\alpha+2\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=5 \text{ ή } \alpha=-2\\ \alpha=0 \text{ ή } \alpha=-2\\ \alpha=-1 \text{ ή } \alpha=-2\\ \alpha=2 \text{ ή } \alpha=-2\end{cases}\Rightarrow\boxed{\alpha=-2}$$

Θυμόμαστε:
Όταν εξετάζουμε πότε δύο πολυώνυμα είναι ίσα ξεκινάμε από τους σταθερούς όρους προς του μεγιστοβάθμιους και εξισώνουμε. Αν περισσεύουν όροι στο τέλος από κάποιο πολυώνυμο τους θέτουμε ίσους με «μηδέν». Συναληθεύουμε τις σχέσεις που βρίσκουμε και προσδιορίζουμε τις παραμέτρους.

<u>Παράδειγμα 7</u>: Δίνεται το μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$\left[P(x)\right]^2=(x+1)P(x)-3x+6$$

α) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ είναι πρώτου βαθμού.

β) Να βρείτε το $P(x)$.

γ) Να βρείτε πολυώνυμο $Q(x)$ για το οποίο ισχύει: $P(x)\cdot Q(x)=2x^3-7x^2+2x+8$.

α) Έστω ν ο βαθμός του $P(x)$ τότε ο βαθμός του $\left[P(x)\right]^2$ θα είναι 2ν ενώ ο βαθμός του $(x+1)P(x)-3x+6$ θα είναι $\nu+1$.
Προκύπτει οπότε $2\nu=\nu+1 \Rightarrow \nu=1$, δηλαδή το $P(x)$ είναι πρώτου βαθμού.

Θυμόμαστε:
$\deg\left(P(x)\cdot Q(x)\right)=\deg P(x)+\deg Q(x)$
$\deg\left(P(x)+Q(x)\right)=\max\left\{\deg P(x),\deg Q(x)\right\}^{*}$
*εάν οι μεγιστοβάθμιοι όροι δεν έχουν αντίθετους συντελεστές.

β) Εφόσον το $P(x)$ είναι πρώτου βαθμού υποθέτουμε ότι $P(x)=\alpha x+\beta$ οπότε προκύπτει:
$\left[P(x)\right]^2=(x+1)P(x)-3x+6 \Rightarrow \left(\alpha x+\beta\right)^2=\left(x+1\right)\left(\alpha x+\beta\right)-3x+6 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha^2x^2+2\alpha\beta x+\beta^2=\alpha x^2+\left(\alpha+\beta-3\right)x+\beta+6$
Για να είναι ίσα τα δύο παραπάνω πολυώνυμα πρέπει:

$$\begin{cases}\alpha^2=\alpha\\ 2\alpha\beta=\alpha+\beta-3\\ \beta^2=\beta+6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha^2-\alpha=0\\ 2\alpha\beta=\alpha+\beta-3\\ \beta^2-\beta-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha\left(\alpha-1\right)=0\\ 2\alpha\beta=\alpha+\beta-3\\ \left(\beta-3\right)\left(\beta+2\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0 \text{ ή } \alpha=1\\ 2\alpha\beta=\alpha+\beta-3\\ \beta=3 \text{ ή } \beta=-2\end{cases}$$

Συναληθεύοντας τις παραπάνω σχέσεις και λαμβάνοντας υπόψη ότι το $P(x)$ είναι πρώτου βαθμού προκύπτει ότι $\boxed{\alpha=1}$ και $\boxed{\beta=-2}$. Άρα $\boxed{P(x)=x-2}$.
γ) Εφόσον το $P(x)$ είναι πρώτου βαθμού θα πρέπει το $Q(x)$ να είναι δευτέρου επομένως υποθέτουμε ότι $Q(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και είναι:
$P(x)\cdot Q(x)=2x^3-7x^2+2x+8 \Rightarrow \left(x-2\right)\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)=2x^3-7x^2+2x+8 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha x^3+\left(\beta-2\alpha\right)x^2+\left(\gamma-2\beta\right)x-2\gamma=2x^3-7x^2+2x+8$
Για να είναι ίσα τα δύο παραπάνω πολυώνυμα πρέπει:

$$\begin{cases}\alpha=2\\ \beta-2\alpha=-7\\ \gamma-2\beta=2\\ -2\gamma=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{\alpha=2}\\ \boxed{\beta=-3}\\ \boxed{\gamma=-4}\end{cases}$$

Οπότε $\boxed{Q(x)=2x^2-3x-4}$

- <u>Διαίρεση πολυωνύμων</u>
  - ❖ Ταυτότητα της διαίρεσης: Έστω πολυώνυμα $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x)\neq 0$. Τότε υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ τέτοια ώστε
    $$\Delta(x)=\delta(x)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)$$
    όπου $\deg\upsilon(x)<\deg\delta(x)$ ή $\upsilon(x)$ το μηδενικό πολυώνυμο.
    Το $\Delta(x)$ καλείται διαιρετέος, το $\delta(x)$ διαιρέτης, το $\pi(x)$ πηλίκο και το $\upsilon(x)$ υπόλοιπο.
  - ❖ Η διαίρεση καλείται «τέλεια» όταν το υπόλοιπο είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Ισοδύναμα λέμε ότι το $\delta(x)$ «διαιρεί» το $\Delta(x)$ ή ακόμα ότι το $\delta(x)$ είναι «παράγοντας» του $\Delta(x)$. Για όλα τα παραπάνω είναι $\Delta(x)=\delta(x)\cdot\pi(x)+0 \Rightarrow \boxed{\Delta(x)=\delta(x)\cdot\pi(x)}$

- Όταν διαιρούμε με $\delta(x)=x-\rho$ επειδή ο διαιρέτης είναι πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο θα είναι είτε μηδενικού βαθμού είτε μηδενικό πολυώνυμο, δηλαδή το υπόλοιπο θα είναι σε κάθε περίπτωση σταθερό, επομένως $\upsilon(x)=\upsilon\in\mathbb{R}$.
  Από την ταυτότητα της διαίρεσης προκύπτει:
  $\Delta(x)=(x-\rho)\cdot\pi(x)+\upsilon\Rightarrow\Delta(\rho)=\cancel{(\rho-\rho)}\cdot\pi(\rho)+\upsilon\Rightarrow\boxed{\Delta(\rho)=\upsilon}$
- Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ένα πολυώνυμο θα έχει παράγοντα της μορφής $\delta(x)=x-\rho$ αν και μόνον αν $\boxed{\Delta(\rho)=0}$.

Θυμόμαστε:
$\boxed{x-\rho \text{ παράγοντας του } \Delta(x)\Leftrightarrow x-\rho \text{ διαιρεί το } \Delta(x)\Leftrightarrow\Delta(\rho)=0}$

<u>Παράδειγμα 8</u>: Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+(\beta-1)x^2-3x-2\beta+6$.

α) Να βρείτε τα α, β αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$ είναι το 2.

β) Για $\alpha=2$ και $\beta=4$ να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+2$.

Είναι:

α) Εφόσον το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ πρέπει:

$P(1)=0\Rightarrow\alpha+(\beta-1)-3-2\beta+6=0\Rightarrow\alpha-\beta=-2$ (1)

Επειδή ακόμα το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$ είναι το 2 πρέπει:

$P(-1)=2\Rightarrow-\alpha+(\beta-1)+3-2\beta+6=2\Rightarrow-\alpha-\beta=-6$ (2)

Από (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη: $-2\beta=-8\Rightarrow\boxed{\beta=4}$ άρα $\boxed{\alpha=2}$

β) Για $\alpha=2$ και $\beta=4$ είναι $P(x)=2x^3+3x^2-3x-2$ οπότε:

$$\begin{array}{rr|l}
 & 2x^3+3x^2-3x-2 & x+2 \\ \cline{3-3}
- & 2x^3+4x^2 & 2x^2-x-1 \\ \cline{1-2}
 & -x^2-3x-2 & \\
- & -x^2-2x & \\ \cline{1-2}
 & -x-2 & \\
- & -x-2 & \\ \cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Άρα η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης των παραπάνω πολυωνύμων είναι:
$2x^3+3x^2-3x-2=(x+2)\cdot(2x^2-x-1)$
όπου $\pi(x)=2x^2-x-1$ και $\upsilon(x)=0$.

<u>Παράδειγμα 9</u>: Το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+2$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ διαιρούμενο με το x^2-1 δίνει υπόλοιπο $2x+3$.

α) Αν $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της παραπάνω διαίρεσης να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β) Να βρείτε τις τιμές των α, β.
γ) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 1$ να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - 1$.
Είναι:
α) Η ταυτότητας της διαίρεσης είναι:

$$P(x) = \left(x^2 - 1\right) \cdot \pi(x) + \upsilon(x) \Rightarrow \boxed{x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2 = \left(x^2 - 1\right) \cdot \pi(x) + \left(2x + 3\right)}$$

β) Για $x = 1$ η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$1^3 + \alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + 2 = \cancel{\left(1^2 - 1\right)} \cdot \pi\left(1\right) + \left(2 \cdot 1 + 3\right) \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta = 2} \quad (1)$$

Για $x = -1$ αντίστοιχα είναι:

$$\left(-1\right)^3 + \alpha\left(-1\right)^2 + \beta\left(-1\right) + 2 = \cancel{\left(\left(-1\right)^2 - 1\right)} \cdot \pi(-1) + \left(2\left(-1\right) + 3\right) \Rightarrow \boxed{\alpha - \beta = 0} \quad (2)$$

Από (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $\boxed{\alpha = 1}$ οπότε και $\boxed{\beta = 1}$.

> Θυμόμαστε:
> Όταν πρέπει να προσδιορίσουμε τιμές παραμέτρων από μία σχέση που ισχύει για κάθε x, μπορούμε με κατάλληλη επιλογή τιμών του x να καταλήξουμε σε κάποιο σύστημα και να βρούμε τις παραμέτρους.

γ) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 1$ είναι $P(x) = x^3 + x^2 + x + 2$ οπότε:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + x^2 + x + 2 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
- \quad x^3 - x & x + 1 \\ \cline{1-1}
x^2 + 2x + 2 & \\
- \quad x^2 - 1 & \\ \cline{1-1}
2x + 3 &
\end{array}$$

Άρα $\boxed{\pi(x) = x + 1}$.

> Το γεγονός ότι το υπόλοιπο βγήκε $\upsilon(x) = 2x + 3$ αποτελεί επαλήθευση των παραπάνω πράξεων.

<u>Παράδειγμα 10</u>: Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \left(\lambda - \lambda^3\right)x^4 - \left(\lambda^2 - 1\right)x^3 + \left(\lambda - 1\right)x - 2\lambda + 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε το $P(x)$ να είναι 3ου βαθμού.
β) Για $\lambda = 0$ να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 2$.
Είναι:
α) Εφόσον το $P(x)$ είναι 3ου βαθμού πρέπει:

$$\begin{cases} \lambda - \lambda^3 = 0 \\ -\left(\lambda^2 - 1\right) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda\left(1 - \lambda^2\right) = 0 \\ 1 - \lambda^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lambda = 0}$$

> Θυμόμαστε:
> Για να είναι ένα πολυώνυμο ν-οστού βαθμού πρέπει $\begin{cases} \alpha_\nu \neq 0 \\ \alpha_\kappa = 0, \quad \kappa > \nu \end{cases}$

β) Για $\lambda = 0$ είναι $P(x) = x^3 - x + 2$ οπότε:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + 0x^2 - x + 2 & x + 2 \\ \hline
\end{array}$$

x^2-2x+3

Άρα $\boxed{\pi(x)=x^2-2x+3}$ και $\boxed{\upsilon(x)=-4}$.

Επειδή ο διαιρέτης είναι της μορφής $x-\rho$ το υπόλοιπο μπορούμε να το βρούμε ως εξής: $\upsilon=P(-2)=-4$
Αυτό επαληθεύει και τη διαίρεση που κάναμε.

- <u>Σχήμα Horner</u>
  - Το σχήμα Horner είναι ένας τρόπος να κάνουμε διαιρέσεις όταν ο διαιρέτης είναι της μορφής $\delta(x)=x-\rho$. Ενδεικτικά αν θέλαμε να κάνουμε την διαίρεση του προηγούμενου παραδείγματος θα ήταν:

1	0	-1	2	$\rho=-2$
	-2	4	-6	
1	-2	3	$\boxed{-4}$	

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)=\left(x^3-x+2\right)\div\left(x+2\right)$ είναι $\pi(x)=x^2-2x+3$ και $\upsilon(x)=-4$

Για να κατασκευάσουμε τον παραπάνω πίνακα θυμόμαστε:

- Στην πρώτη γραμμή βάζουμε τους συντελεστές του διαιρετέου $P(x)$, χωρίς να παραλείψουμε τα μηδενικά, και στο τέλος βάζουμε τον αριθμό ρ.
- Κατεβάζουμε το πρώτο στοιχείο της πρώτης γραμμής στην πρώτη θέση της τρίτης γραμμής.
- Πολλαπλασιάζουμε το στοιχείο αυτό με το ρ και το τοποθετούμε στην επόμενη θέση της δεύτερης γραμμής.
- Προσθέτουμε τα δύο πρώτα στοιχεία της δεύτερης στήλης και τα τοποθετούμε στην τρίτη γραμμή της δεύτερης στήλης.
- Συνεχίζουμε κατά τον ίδιο τρόπο μέχρι να συμπληρώσουμε τα στοιχεία της προτελευταίας στήλης.
- Ο τελευταίος αριθμός που καταλήγουμε είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενώ οι υπόλοιποι αριθμοί της τρίτης γραμμής είναι οι συντελεστές του πηλίκου της διαίρεσης.

  - Το σχήμα Horner δεν υποκαθιστά την διαδικασία της διαίρεσης που έχουμε μάθει. Αποτελεί έναν εύκολο αλγόριθμο που «δουλεύει» μόνον όταν $\delta(x)=x-\rho$

<u>Παράδειγμα 11</u>: Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2+\left(\alpha-2\right)x+\beta+5$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα α και β ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x-1$ και διαιρούμενο με το $x+2$ να αφήνει υπόλοιπο 6.

β) Αν $a=-2$ και $\beta=-3$ με τη βοήθεια του σχήματος Horner να εκτελέσετε την διαίρεση $P(x)\div\left(x+2\right)$ και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

Είναι:

α) Εφόσον το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ πρέπει:

$P(1)=0 \Rightarrow 1^3+1^2+(\alpha-2)\cdot 1+\beta+5=0 \Rightarrow \boxed{\alpha+\beta=-5}$ (1)

Ανάλογα επειδή το $P(x)$ διαιρούμενο με το $x+2$ δίνει υπόλοιπο 6 πρέπει:

$P(-2)=6 \Rightarrow (-2)^3+(-2)^2+(\alpha-2)\cdot(-2)+\beta+5=6 \Rightarrow \boxed{2\alpha-\beta=-1}$ (2)

Από (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $\boxed{\alpha=-2}$ οπότε και $\boxed{\beta=-3}$.

β) Για $a=-2$ και $\beta=-3$ είναι $P(x)=x^3+x^2-4x+2$ οπότε είναι:

1	1	–4	2	$\rho=-2$
	–2	2	4	
1	–1	–2	6	

Οπότε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)\div(x+2)$ είναι:

$\boxed{\pi(x)=x^2-x-2}$ και $\boxed{\upsilon(x)=6}$.

Η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι $\boxed{P(x)=(x+2)\cdot(x^2-x-2)+6}$.

<u>Παράδειγμα 12</u>: Δίνεται πολυώνυμο $P(x)=x^3+4x-5$.

α) Να εξετάσετε αν το $x+2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)\div(x-3)$.

Είναι:

α) Για να εξετάσουμε αν το $x+2$ είναι παράγοντας του $P(x)$ θυμόμαστε ότι:

$$\boxed{x-\rho \text{ παράγοντας του } P(x) \Leftrightarrow P(\rho)=0}$$

Είναι: $P(-2)=(-2)^3+4\cdot(-2)-5=-8-8-5 \Rightarrow P(-2)=-21\neq 0$

Άρα το $x+2$ δεν είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) Κάνουμε τη διαίρεση με σχήμα Horner οπότε είναι:

1	0	4	–5	$\rho=3$
	3	9	39	
1	3	13	34	

Οπότε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)\div(x-3)$ είναι:

$\boxed{\pi(x)=x^2+3x+13}$ και $\boxed{\upsilon(x)=34}$.

Επειδή ο διαιρέτης είναι της μορφής $x-\rho$ το υπόλοιπο μπορούμε να το βρούμε ως εξής: $\upsilon=P(3)=34$
Αυτό επαληθεύει και το σχήμα Horner που κάναμε.

Θυμόμαστε:
Όταν κάνουμε το σχήμα Horner δεν ξεχνάμε να βάλουμε μηδενικά για τις δυνάμεις του $P(x)$ που δεν εμφανίζονται και είναι μικρότερου βαθμού από τον μεγιστοβάθμιο όρο.

Πολυωνυ

- <u>Πολυωνυμικες εξισωσεις</u>

Φροντιστήρια 2001-ΟΡΟΣΗΜΟ

Η γενική αντιμετώπιση ενός προβλήματος, είτε αυτό πραγματεύεται κάποιο μαθηματικό αντικείμενο είτε κάποια καθημερινή ασχολία, είναι η αναγωγή του σε απλούστερα προβλήματα των οποίων τη λύση γνωρίζουμε.

Όσον αφορά τις πολυωνυμικές εξισώσεις, καθώς και τις ανισώσεις που θα δούμε αργότερα, η αναγωγή αυτή μεταφράζεται ως ελάττωση του βαθμού του υπό εξέταση πολυωνύμου. Ειδικότερα προβλήματα που έχουν να κάνουν με πολυώνυμα και θα απαιτούν απλοποίηση αυτών ή επίλυση εξισώσεων-ανισώσεων αυτών θα λύνονται με «παραγοντοποίηση». Η παραγοντοποίηση είναι η διαδικασία κατά την οποία ένα άθροισμα από όρους μετατρέπεται σε γινόμενο, αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ένα πολυώνυμο ν-οστού βαθμού να μετατρέπεται σε γινόμενο πολυωνύμων με βαθμούς μικρότερους του ν.

- Πολυωνυμική εξίσωση ν-οστού βαθμού ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής
$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0 \text{ με } \alpha_\nu \neq 0$$
- Ρίζα της παραπάνω πολυωνυμικής εξίσωσης ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολυωνύμου $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$, δηλαδή κάθε πραγματικό αριθμό που την επαληθεύει.
- <u>Θεώρημα Ακέραιων Ριζών</u>
Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Όταν θέλουμε να λύσουμε μία πολυωνυμική εξίσωση της $P(x)=0$ με ακέραιους συντελεστές θα ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Βρίσκουμε τις ακέραιες ρίζες εξετάζοντας ως πιθανές ακέραιες ρίζες τους διαιρέτες του σταθερού όρου α_0.
- Έστω ρ μία ακέραιο ρίζα κάνουμε την διαίρεση $P(x) \div (x-\rho)$ η οποία πρέπει να είναι τέλεια και βρίσκουμε κάποιο πηλίκο $\pi(x)$.
- Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για το $\pi(x)$ και για τα επόμενα που θα βρούμε έως ότου καταλήξουμε σε κάποιο πολυώνυμο πρώτου ή δευτέρου βαθμού.
- Τελικά $P(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \ldots \cdot p_\kappa(x)$, δηλαδή παραγοντοποιήσαμε το $P(x)$ σε πολυώνυμα $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_\kappa(x)$ που είναι όλα πρώτου ή δευτέρου βαθμού.
- Είναι $P(x)=0 \Rightarrow p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \ldots \cdot p_\kappa(x) = 0 \Rightarrow p_1(x) = 0$ ή $p_2(x)$ ή ... ή $p_\kappa(x)$ όπου η εξισώσεις που καταλήξαμε είναι πρώτου ή δευτέρου βαθμού και είναι γνωστός ο τρόπος επίλυσής τους.

Ας δούμε την παραπάνω διαδικασία από το ακόλουθο παράδειγμα. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 4x - 5$ και ζητείται να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

Είναι: $P(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 4x - 5 = 0$

Βρίσκουμε τις πιθανές ακέραιες ρίζες του σταθερού όρου που είναι το 5.

Πιθανές ακέραιες ρίζες: $\pm 1, \pm 5$

Επαληθεύουμε ότι $\rho = 1$

ρίζα της παραπάνω εξίσωσης.

Θυμόμαστε:
Όταν σε ένα πολυώνυμο το άθροισμα των συντελεστών του ισούται με «μηδέν» τότε έχει προφανή ρίζα το «ένα»!

Κάνουμε την διαίρεση $P(x)\div(x-1)$

1	0	4	–5	$\rho=1$
	1	1	5	
1	1	5	0	

Οπότε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)\div(x-1)$ είναι: $\boxed{\pi(x)=x^2+x+5}$ και $\boxed{\upsilon(x)=0}$.
Το υπόλοιπο βγήκε μηδέν όπως αναμενόταν!

Από την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης είναι:

$$P(x)=(x-1)\cdot\left(x^2+x+5\right)+0 \Rightarrow P(x)=(x-1)\cdot\left(x^2+x+5\right)$$

Άρα το $P(x)$ παραγοντοποιήθηκε σε ένα πολυώνυμο πρώτου και σε ένα δευτέρου βαθμού.

Είναι: $P(x)=0 \Rightarrow (x-1)\cdot\left(x^2+x+5\right) \Rightarrow 0 \Rightarrow \boxed{x-1=0}$ (1) ή $\boxed{x^2+x+5=0}$ (2)

Από την (1) προκύπτει $x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$.

Από την (2) προκύπτει $x^2+x+5=0$, λύνουμε με διακρίνουσα οπότε:

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\cdot1\cdot5 \Rightarrow \Delta=-19<0$ αδύνατη!

Τελικά η μοναδική λύση της αρχικής εξίσωσης είναι η $\boxed{x=1}$.

<u>Παράδειγμα 13</u>: Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^3+2x^2-7x+2$.

α) Να δειχθεί ότι το $x=-2$ είναι ρίζα του $P(x)$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

Είναι:

α) $P(-2)=3(-2)^3+2(-2)^2-7(-2)+2 \Rightarrow P(-2)=-24+8+14+2 \Rightarrow P(-2)=0$

Άρα πράγματι το $x=-2$ είναι ρίζα του $P(x)$.

β) Επαληθεύουμε ότι το $x=-2$ είναι διαιρέτης τους σταθερού όρου του πολυωνύμου όπως όφειλε βάσει του θεωρήματος.

Κάνουμε την διαίρεση $P(x)\div(x+2)$

3	2	–7	2	$\rho=-2$
	–6	8	–2	
3	–4	1	0	

Οπότε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)\div(x+2)$ είναι: $\boxed{\pi(x)=3x^2-4x+1}$ και $\boxed{\upsilon(x)=0}$.
Το υπόλοιπο βγήκε μηδέν όπως αναμενόταν!

Από την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης είναι:

$$P(x)=(x+2)\cdot\left(3x^2-4x+1\right)+0 \Rightarrow P(x)=(x+2)\cdot\left(3x^2-4x+1\right)$$

Άρα το $P(x)$ παραγοντοποιήθηκε σε ένα πολυώνυμο πρώτου και σε ένα δευτέρου βαθμού.

Είναι: $P(x)=0 \Rightarrow (x+2)\cdot\left(3x^2-4x+1\right) \Rightarrow 0 \Rightarrow \boxed{x+2=0}$ (1) ή $\boxed{3x^2-4x+1=0}$ (2)

Από την (1) προκύπτει $x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-2}$.

Από την (2) προκύπτει $3x^2-4x+1=0$, λύνουμε με διακρίνουσα οπότε:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 3\cdot 1 \Rightarrow \Delta = 4 > 0 \text{ άρα } x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4\pm\sqrt{4}}{2\cdot 3} = \frac{4\pm 2}{6}\begin{cases}\boxed{x_1 = 1}\\ \boxed{x_2 = \frac{1}{3}}\end{cases}$$

Τελικά οι λύσεις της εξίσωσης είναι $\boxed{x=-2}$, $\boxed{x=\frac{1}{3}}$ και $\boxed{x=1}$.

<u>Παράδειγμα 14</u>: Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{17}{6}x^2 + 3x - \frac{4}{3}$. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

Όπως παρατηρούμε η παραπάνω εξίσωση είναι πολυωνυμική όμως δεν έχει ακέραιους συντελεστές. Ωστόσο είναι:

$$\frac{1}{2}x^3 + \frac{17}{6}x^2 + 3x - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow 6\cdot\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{17}{6}x^2 + 3x - \frac{4}{3}\right) = 6\cdot 0 \Rightarrow \boxed{3x^3 + 17x^2 + 18x - 8 = 0}$$

Η εξίσωση στην οποία καταλήξαμε είναι ισοδύναμη της αρχικής και έχει ακέραιους συντελεστές, οπότε επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία.

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$.

Επαληθεύουμε ότι το -2 είναι ρίζα: $3\left(-2^3\right) + 17(-2)^2 + 18(-2) - 8 = -24 + 68 - 36 - 8 = 0$

Κάνουμε την διαίρεση $\left(3x^3 + 17x^2 + 18x - 8\right) \div (x+2)$.

3	17	18	-8	$\rho = -2$
	-6	-22	8	
3	11	-4	$\boxed{0}$	

Οπότε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $\left(3x^3 + 17x^2 + 18x - 8\right) \div (x+2)$ είναι: $\boxed{\pi(x) = 3x^2 + 11x - 4}$ και $\boxed{\upsilon(x) = 0}$.

Από την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης είναι:

$$3x^3 + 17x^2 + 18x - 8 = (x+2)\cdot\left(3x^2 + 11x - 4\right) + 0 \Rightarrow 3x^3 + 17x^2 + 18x - 8 = (x+2)\cdot\left(3x^2 + 11x - 4\right)$$

Είναι τελικά: $3x^3 + 17x^2 + 18x - 8 = 0 \Rightarrow (x+2)\cdot\left(3x^2 + 11x - 4\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 & (1) \\ 3x^2 + 11x - 4 = 0 & (2)\end{cases}$

Από (1) προκύπτει $x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=-2}$

Από (2) προκύπτει $3x^2 + 11x - 4 = 0$, λύνουμε με διακρίνουσα οπότε:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 11^2 - 4\cdot 3\cdot(-4) \Rightarrow \Delta = 169 > 0 \text{ άρα } x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11\pm\sqrt{169}}{2\cdot 3} = \frac{-11\pm 13}{6}\begin{cases}\boxed{x_1 = -4}\\ \boxed{x_2 = \frac{1}{3}}\end{cases}$$

Τελικά οι λύσεις της εξίσωσης είναι $\boxed{x=-2}$, $\boxed{x=-4}$ και $\boxed{x=\frac{1}{3}}$.

- <u>Πολυωνυμικές Ανισώσεις</u>

Η διαδικασία επίλυσης μίας πολυωνυμικής ανίσωσης είναι παρόμοια με την επίλυση μιας εξίσωσης όμως εκτός από το στάδιο της παραγοντοποίησης απαιτεί και την κατασκευή ενός πίνακα προσήμων βάσει του οποίου θα αποφανθούμε για την λύση της ανίσωσης.
Όσον αφορά την διαδικασία κατασκευής του πίνακα προσήμων ας δούμε το ακόλουθο παράδειγμα. Ζητείται να λυθεί η ανίσωση $(x+3)(-x+5)(3x+2)\geq 0$.
Όπως βλέπουμε στην συγκεκριμένη περίπτωση το πολυώνυμο που εμφανίζεται είναι ήδη παραγοντοποιημένο οπότε απαιτείται μόνο η κατασκευή του πίνακα προσήμων.

x	$-\infty$	-3		$-\frac{2}{3}$		5		$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-x+5$	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x+3)(-x+5)(3x+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Στην πρώτη γραμμή βάζουμε τις ρίζες του πολυωνύμου από την μικρότερη προς την μεγαλύτερη!

Στις επόμενες σειρές βάζουμε τους παράγοντες και τα πρόσημα του καθενός καθώς και τις θέσεις μηδενισμού αυτών!

Στην τελευταία γραμμή βάζουμε το γινόμενο των προηγούμενων παραγόντων οπότε προκύπτει το πολυώνυμο που έχουμε. Πολλαπλασιάζοντας τα πρόσημα κάθε στήλης βρίσκουμε τα πρόσημα της τελευταίας γραμμής. Όσον αφορά την λύση της ανίσωσης αν ζητείται $P(x)\geq 0$ εντοπίζουμε το θετικό πρόσημο στην τελευταία γραμμή και δίνουμε την απάντηση, αντίστοιχα εργαζόμαστε και στην αντίθετη περίπτωση!

Όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα $(x+3)(-x+5)(3x+2)\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty,-3]\cup\left[-\frac{2}{3},5\right]$

<u>Παράδειγμα 15</u>: Να λυθεί η ανίσωση $(x-1)\cdot(x^2+x+5)>0$.

Όσον αφορά το τριώνυμο x^2+x+5 είναι $\Delta=b^2-4ac=1^2-4\cdot 1\cdot 5\Rightarrow \Delta=-19<0$. Επειδή η διακρίνουσα είναι αρνητική το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες οπότε δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί περαιτέρω και το πρόσημο του είναι πάντα ομόσημο του α δηλαδή του συντελεστή του x^2.
Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
x^2+x+5	$+$		$+$
$x-1$	$-$	0	$+$
$(x+3)(-x+5)(3x+2)$	$-$	0	$+$

Από το διπλανό πίνακα προκύπτει ότι:
$(x-1)\cdot(x^2+x+5)>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{x\in(1,+\infty)}$

Θυμόμαστε:
Έστω το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha \neq 0$

- Αν $\Delta>0$ τότε η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες ρ_1,ρ_2 και το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής:
  $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$
  Το πρόσημο του τριωνύμου είναι ετερόσημο του α ανάμεσα στις ρίζες και ομόσημο εκτός.
- Αν $\Delta=0$ τότε η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει μία «διπλή» πραγματική ρίζα ρ και το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής:
  $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho)^2$
  Το πρόσημο του τριωνύμου είναι ομόσημο του α εκατέρωθεν τις ρίζας.
- Αν $\Delta<0$ τότε η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες και το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται!
  Το πρόσημο του τριωνύμου είναι παντού ομόσημο του α !

<u>Παράδειγμα 16</u>: Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(x-1)(x-2)(\gamma-3x)+\alpha x+\beta$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Αν γνωρίζετε ότι η διαίρεση $P(x)\div(x-1)$ δίνει υπόλοιπο 5 και η διαίρεση $P(x)\div(x-2)$ δίνει υπόλοιπο 8 τότε:
α) Να βρεθούν τα α,β.
β) Αν $\alpha=3$, $\beta=2$ και $|\gamma|<3$ να λυθεί η ανίσωση $P(x)\leq 3x+2$.
γ) Αν ισχύει $P(3)=-3$ να βρεθεί το γ.

Είναι:

α) Εφόσον $P(x) \div (x-1)$ δίνει υπόλοιπο 5 είναι $P(1)=5 \Rightarrow \boxed{\alpha+\beta=5}$ (1)

Αντίστοιχα επειδή $P(x) \div (x-2)$ δίνει υπόλοιπο 8 είναι $P(2)=8 \Rightarrow \boxed{2\alpha+\beta=8}$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει $\boxed{\alpha=3}$ και $\boxed{\beta=2}$.

β) Εφόσον $\alpha=3$ και $\beta=2$ είναι $P(x)=(x-1)(x-2)(\gamma-3x)+3x+2$, επομένως

$P(x) \le 3x+2 \Rightarrow (x-1)(x-2)(\gamma-3x)+3x+2 \le 3x+2 \Rightarrow (x-1)(x-2)(\gamma-3x) \le 0$

Είναι: $x-1=0 \Rightarrow x=1$ και $x-2=0 \Rightarrow x=2$ ακόμα $\gamma-3x=0 \Rightarrow x=\frac{\gamma}{3}$ επειδή όμως

$|\gamma|<3$ είναι $-1<\frac{\gamma}{3}<1$.

Η τελευταία σχέση χρειάζεται για να γνωρίζουμε με ποια σειρά να τοποθετήσουμε τις ρίζες!

x	$-\infty$	$\frac{\gamma}{3}$		1		2	$+\infty$
$\gamma-3x$	+	0	−		−		−
$x-2$	−		−		−	0	+
$x-1$	−		−	0	+		+
$(x-1)(x-2)(\gamma-3x)$	+	0	−	0	+	0	−

Τελικά προκύπτει ότι:

$(x-1)(x-2)(\gamma-3x) \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{x \in \left[\frac{\gamma}{3},1\right] \cup [2,+\infty)}$

γ) Αν $P(3)=-3$ τότε $P(3)=-3 \Rightarrow (3-1)(3-2)(\gamma-3\cdot 3)+3\cdot 3+2=-3 \Rightarrow 2(\gamma-9)=-14 \Rightarrow \boxed{\gamma=2}$

- <u>Εξισώσεις-Ανισώσεις που ανάγονται σε Πολυωνυμικές</u>

Πολλές φορές αντιμετωπίζουμε την επίλυση μιας εξίσωσης η οποία περιέχει κλάσματα, ρίζες ακόμα και ποιο σύνθετες μορφές της αγνώστου μεταβλητής x. Σε αρκετές από αυτές τις περιπτώσεις με κατάλληλες πράξεις είναι δυνατόν να καταλήξουμε σε κάποια πολυωνυμική εξίσωση-ανίσωση η οποία λύνεται με τις παραπάνω διαδικασίες. Βεβαία τις περισσότερες φορές όταν λύνουμε μια εξίσωση-ανίσωση αυτής της μορφής είναι πολύ σημαντικό είτε να επαληθεύσουμε τις λύσεις που βρήκαμε είτε να θέσουμε τους περιορισμούς που προκύπτουν από την φύση της υπό μελέτη εξίσωσης-ανίσωσης.

<u>Παράδειγμα 17</u>: Αν $P(x)=(x+1)(x-2)$, να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)}{(x+4)^2} \le 0$.

Είναι:

$\frac{P(x)}{(x+4)^2} \le 0 \Leftrightarrow P(x)(x+4)^2 \le 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x+4)^2 \le 0$ με τον περιορισμό $x+4 \ne 0 \Rightarrow \boxed{x \ne -4}$.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
$(x+4)^2$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)(x-2)(\gamma-3x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Τελικά προκύπτει ότι:
$(x+1)(x-2)(x+4)^2 \le 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{x\in[-1,2]}$

Θυμόμαστε:

- $\dfrac{\alpha}{\beta}\le 0 \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta\le 0$ με περιορισμό $\beta\ne 0$
- $\dfrac{\alpha}{\beta}< 0 \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta< 0$
- $\dfrac{\alpha}{\beta}\ge 0 \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta\ge 0$ με περιορισμό $\beta\ne 0$
- $\dfrac{\alpha}{\beta}> 0 \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta> 0$

<u>Παράδειγμα 17</u>: Να λυθεί η εξίσωση $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{3x-10}{x^2-4}=2x-\dfrac{x-3}{x-2}$.

Είναι:

Περιορισμοί: $\begin{cases} x+2\ne 0 \\ x^2-4\ne 0 \Rightarrow \left\{\boxed{x\ne\pm 2}\right. \\ x-2\ne 0 \end{cases}$

$$\frac{1}{x+2}-\frac{3x-10}{x^2-4}=2x-\frac{x-3}{x-2}\Rightarrow\frac{1}{x+2}-\frac{3x-10}{(x-2)\cdot(x+2)}=2x-\frac{x-3}{x-2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x-2)-(3x-10)=2x(x-2)\cdot(x+2)-(x+2)\cdot(x-3)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2-3x+10=2x^3-8x-x^2+3x-2x+6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{2x^3-x^2-5x-2=0}$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι: $\pm 1, \pm 2$.

Επαληθεύουμε ότι το -1 είναι ρίζα: $2\left(-1^3\right)-\left(-1\right)^2-5\left(-1\right)-2=-2-1+5-2=0$

Κάνουμε την διαίρεση $\left(2x^3-x^2-5x-2\right)\div\left(x+1\right)$.

2	-1	-5	-2	$\rho=-1$
	-2	3	2	
2	-3	-2	$\boxed{0}$	

Οπότε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $\left(3x^3+17x^2+18x-8\right)\div\left(x+2\right)$ είναι: $\boxed{\pi(x)=2x^2-3x-2}$ και $\boxed{\upsilon(x)=0}$.

Από την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης είναι:

$$2x^3-x^2-5x-2=\left(x+1\right)\cdot\left(2x^2-3x-2\right)+0 \Rightarrow 2x^3-x^2-5x-2=\left(x+1\right)\cdot\left(2x^2-3x-2\right)$$

Είναι τελικά: $2x^3-x^2-5x-2=0 \Rightarrow \left(x+1\right)\cdot\left(2x^2-3x-2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 & (1) \\ 2x^2-3x-2=0 & (2) \end{cases}$

Από (1) προκύπτει $x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

Από (2) προκύπτει $2x^2-3x-2=0$, λύνουμε με διακρίνουσα οπότε:

$$\Delta=b^2-4ac=\left(-3\right)^2-4\cdot 2\cdot\left(-2\right) \Rightarrow \Delta=25>0 \text{ άρα } x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm 5}{4}\boxed{\begin{cases} x_1=2 \text{ απορρίπτεται} \\ x_2=-\dfrac{1}{2} \end{cases}}$$

Τελικά οι λύσεις της εξίσωσης είναι $\boxed{x=-1}$ και $\boxed{x=-\frac{1}{2}}$.

<u>Παράδειγμα 18</u>: Να λυθεί η ανίσωση: $2x^2+\dfrac{5x^2}{x-3}+\dfrac{6}{x}\le\dfrac{7x^2-18}{x^2-3x}$.

Αρχικά έχουμε τους περιορισμούς: $\begin{cases} x-3\neq 0 \\ x\neq 0 \\ x^2-3x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x\neq 3} \\ \boxed{x\neq 0} \end{cases}$

Είναι:

$$2x^2+\frac{5x^2}{x-3}+\frac{6}{x}\le\frac{7x^2-18}{x^2-3x} \Rightarrow 2x^2+\frac{5x^2}{x-3}+\frac{6}{x}-\frac{7x^2-18}{x^2-3x}\le 0 \Rightarrow \frac{2x^2x\left(x-3\right)+5x^2x+6\left(x-3\right)-\left(7x^2-18\right)}{x\left(x-3\right)}\le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x^4+5x^3-6x^3+6x-18-7x^2+18}{x\left(x-3\right)}\le 0 \Rightarrow \frac{2x^4-x^3-7x^2+6x}{x\left(x-3\right)}\le 0 \Rightarrow \boxed{\frac{2x^3-x^2-7x+6}{\left(x-3\right)}\le 0} \quad (1)$$

Θυμόμαστε:
Όταν λύνουμε μία ανίσωση όπως η παραπάνω πότε δεν πολλαπλασιάζουμε για να φύγουν οι παρονομαστές. Αντιθέτως πηγαίνουμε όλους τους όρους σε ένα μέλος και κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα!

Από (1) προκύπτει: $\boxed{\left(2x^3-x^2-7x+6\right)\left(x-3\right)\le 0}$ (2)

Παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο $2x^3 - x^2 - 7x + 6$:
Πιθανές ακέραιες ρίζες: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$
Επαληθεύουμε ότι το $x = 1$ είναι ρίζα: $2\cdot1^3 - 1^2 - 7\cdot1 + 6 = 2 - 1 - 7 + 6 = 0$
Κάνουμε τη διαίρεση $\left(2x^3 - x^2 - 7x + 6\right) \div (x-1)$:

2	−1	−7	6	$\rho = 1$
	2	1	−6	
2	1	−6	0	

Οπότε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $\left(2x^3 - x^2 - 7x + 6\right) \div (x-1)$ είναι: $\boxed{\pi(x) = 2x^2 + x - 6}$ και $\boxed{\upsilon(x) = 0}$.

Από την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης είναι:

$$2x^3 - x^2 - 7x + 6 = (x-1)\cdot\left(2x^2 + x - 6\right) + 0 \Rightarrow \boxed{2x^3 - x^2 - 7x + 6 = (x-1)\cdot\left(2x^2 + x - 6\right)} \quad (3)$$

Παραγοντοποιούμε το $\boxed{\pi(x) = 2x^2 + x - 6}$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\cdot2\cdot(-6) \Rightarrow \Delta = 49 > 0 \text{ άρα } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2\cdot2} = \frac{-1 \pm 7}{4} \begin{cases} \boxed{x_1 = -2} \\ \boxed{x_2 = \frac{3}{2}} \end{cases}$$

Οπότε $\boxed{2x^2 + x - 6 = 2(x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right)}$ (4)

Από (3) και (4) η (2) γράφεται: $(x-1)\cdot 2(x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-3) \le 0 \Rightarrow \boxed{2(x+2)(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-3) \le 0}$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	-2	1	$\frac{3}{2}$	3	$+\infty$
$(x+2)$	−	0 +	+	+	+	
$\left(x - \frac{3}{2}\right)$	−	−	− 0	+	+	
$(x-1)$	−	− 0	+	+	+	
$(x-3)$	−	−	−	− 0	+	
$2(x+2)(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-3)$	+ 0	− 0	+ 0	− 0	+	

Από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι η λύση της ανίσωσης είναι: $x \in [-2,0) \cup (0,1] \cup \left[\frac{3}{2},3\right)$.

Θυμόμαστε:
Πριν δώσουμε την τελική απάντηση λαμβάνουμε υπόψη τους περιορισμούς που θέσαμε εξ' αρχής!

<u>Παράδειγμα 18</u>: Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{x+10} = x-2$.

Θυμόμαστε:
Αν $\sqrt{\alpha} = \beta$ τότε πρέπει $\begin{cases} \alpha \geq 0 \\ \beta \geq 0 \end{cases}$

Αρχικά έχουμε τους περιορισμούς: $\begin{cases} x+10 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -10 \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x \geq 2}$

Είναι: $\sqrt{x+10} = x-2 \Rightarrow \sqrt{x+10}^2 = (x-2)^2 \Rightarrow x+10 = x^2-4x+4 \Rightarrow \boxed{x^2-5x-6=0}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6) \Rightarrow \Delta = 49 > 0$ άρα $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm 7}{2} \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -1 \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$

Η λύση $x=-1$ απορρίφθηκε γιατί πρέπει $\boxed{x \geq 2}$.
Άρα η μοναδική λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι η $\boxed{x=6}$.

<u>Παράδειγμα 19</u>: Να λυθεί η ανίσωση $\sqrt{x-3} \geq x-5$.
Αρχικά έχουμε τον περιορισμό $x-3 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq 3}$.

Θυμόμαστε:
$\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha^2 \leq \beta^2$ αν και μόνον αν α, β θετικοί.

Όπως παρατηρούμε δεν μπορούμε να υψώσουμε σε τετράγωνα γιατί δεν γνωρίζουμε αν το δεύτερο μέλος είναι θετικό, οπότε είμαστε αναγκασμένοι να λάβουμε περιπτώσεις:

- ✓ Αν $x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$ τότε

  $\sqrt{x-3} \geq x-5 \Rightarrow \sqrt{x-3}^2 \geq (x-5)^2 \Rightarrow x-3 \geq x^2-10x+25 \Rightarrow x^2-11x+28 \leq 0$

  $\Delta = b^2-4ac = (-11)^2 - 4\cdot 1\cdot 28 \Rightarrow \Delta = 9 > 0$ άρα $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11 \pm \sqrt{9}}{2\cdot 1} = \frac{11 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

  Θυμόμαστε ότι το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α ανάμεσα στις ρίζες οπότε πρέπει $x \in [4,7]$ λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς είναι $\boxed{x \in [5,7]}$

- ✓ Αν $x-5 \leq 0 \Rightarrow x \leq 5$ τότε

  $\sqrt{x-3} \geq x-5$ ισχύει για κάθε x για το οποίο ορίζεται η ανίσωση οπότε $\boxed{x \in [3,5]}$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω περιπτώσεις καταλήγουμε $\boxed{x \in [3,7]}$.

Κεφάλαιο – 3ο: Ακολουθίες

Ακολουθίες Αριθμών

Η έννοια της ακολουθίας κάποιων αριθμών απασχόλησε και απασχολεί ιδιαίτερα την μαθηματική επιστήμη από το πεδίο των καθαρών μαθηματικών (πρώτοι αριθμοί) έως και τα εφαρμοσμένα μαθηματικά (χρηματιστήριο). Λίγο πολύ οι ακολουθίες είναι γνώριμες σε όλους μέσα από γρίφους ή παιχνίδια ευφυΐας όπου με βάση κάποια σειρά αριθμών καλούμαστε να βρούμε τον επόμενο αριθμό στην ακολουθία. Ασυναίσθητα όσοι έχουμε ασχοληθεί με ένα τέτοιο γρίφο προσπαθούμε να βρούμε-μαντέψουμε την αλληλουχία των αριθμών αυτών δηλαδή κάποια σχέση που τους συνδέει και με βάση αυτή τη σχέση να προσδιορίσουμε τους επόμενους.

Ας δούμε λίγο τα επόμενα παραδείγματα:

- ❖ Ζητείται να βρεθεί ο επόμενος αριθμός στην ακολουθία $3,7,11,15,...$
  Με λίγη σκέψη δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι κάθε επόμενος προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού 4. Οπότε ο επόμενος αριθμός θα είναι το 19 και ο μεθεπόμενος το 23. Μήπως μπορείτε να βρείτε τον 100ο αριθμό στη σειρά η ακόμα και τον 1000ο ;
- ❖ Ζητείται να βρεθεί ο επόμενος αριθμός στην ακολουθία $2^1,2^2,2^3,...$
  Όπως βλέπουμε ο ν-ιοστός αριθμός στην σειρά είναι ο 2^ν οπότε ο επόμενος αριθμός στην παραπάνω ακολουθία είναι 2^4. Αν μας ζητούσαν να βρούμε τον 100ο αριθμό στην σειρά θα ήταν εύκολο να απαντήσουμε ότι είναι ο 2^{100}, ενώ ο 1000ο είναι ο 2^{1000}.

Παραπάνω είδαμε δύο παραδείγματα ακολουθιών προτού όμως προχωρήσουμε στην ανάλυση τους ας δούμε κάποιους ορισμούς:

- ➢ Ακολουθία καλείται κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{N}^*$ των θετικών ακεραίων.
- ➢ Οι όροι μίας ακολουθίας, δηλαδή η τιμές που παίρνει η παραπάνω συνάρτηση, συμβολίζονται με α_ν(αντί $f(\nu)$). Για παράδειγμα όταν λέμε ότι $\alpha_3=5$ εννοούμε ότι ο 3ος αριθμός στην σειρά της ακολουθίας είναι ο 5.
- ➢ Μία ακολουθία ορίζεται με δύο τρόπους:
  - ✓ <u>Αναδρομικά</u>: Δηλαδή με μία σχέση βάσει της οποίας γνωρίζοντας έναν όρο μπορούμε να βρούμε τον επόμενο.
  - ✓ <u>Με τύπο</u>: Δηλαδή προσδιορίζοντας τον τύπο της συνάρτησης f που περιγράφει την ακολουθία.

Άς επανέλθουμε τώρα στα παραδείγματα που εξετάσαμε παραπάνω:

- ❖ Στο πρώτο παράδειγμα κάναμε την διαπίστωση ότι ο κάθε όρος προκύπτει από τον επόμενο προσθέτοντας τον αριθμό 4. Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω συμβολισμούς μπορούμε να γράψουμε: $\begin{cases}\alpha_1=3\\ \alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+4\end{cases}$

Η πρώτη σχέση μας πληροφορεί για τον πρώτο όρο της ακολουθίας ενώ η δεύτερη μας δείχνει τον τρόπο να βρίσκουμε κάθε επόμενο όρο. Η σχέση αυτή καλείται αναδρομική σχέση της ακολουθίας γιατί για να βρούμε τον επόμενο όρο πρέπει να κάνουμε αναδρομή στους προηγούμενους. Αν και η αναδρομική σχέση είναι χρήσιμη ωστόσο αν θέλαμε να υπολογίσουμε τον 100ο όρο της ακολουθίας θα έπρεπε να υπολογίσουμε τους υπόλοιπους 99 κάτι που καθιστά ιδιαίτερα χρονοβόρο το υπολογιστικό έργο αυτής της διαδικασίας.

- Στο δεύτερο παράδειγμα κάναμε την διαπίστωση ότι ο νιοστός όρος της ακολουθίας είναι ο 2^{ν} δηλαδή $\alpha_{\nu} = 2^{\nu}$. Η τελευταία σχέση δεν αποτελεί παρά τον τύπο της ακολουθίας δηλαδή τον τύπο της συνάρτησης που περιγράφει την ακολουθία αυτή. Ο τύπος είναι προτιμότερος από την αναδρομική σχέση σε μία ακολουθία γιατί όπως είδαμε μπορούμε να βρούμε να βρούμε τους όρους κάθε τάξης με απλή εφαρμογή του. Για παράδειγμα ο 1000ος όρος της ακολουθίας είδαμε ότι είναι $\alpha_{1000} = 2^{1000}$.

<u>Παράδειγμα 1</u>: Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολοθιών:

α) $\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu} + 3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1 \\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu} + \alpha_{\nu-1} \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_{\nu+1} = 2\alpha_{\nu} \end{cases}$

δ) $\alpha_{\nu} = \nu^2 + 1$ ε) $a_{\nu} = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$ στ) $a_{\nu} = \eta\mu\left(\dfrac{\nu\pi}{6}\right)$

Είναι:

α) Όπως βλέπουμε μας έχει δοθεί η αναδρομική σχέση οπότε προκύπτει:

$\boxed{\alpha_1 = 2}$, $\alpha_2 = \alpha_1 + 3 \Rightarrow \alpha_2 = 2 + 3 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 5}$, $\alpha_3 = \alpha_2 + 3 \Rightarrow \alpha_3 = 5 + 3 \Rightarrow \boxed{\alpha_3 = 8}$,

$\alpha_4 = \alpha_3 + 3 \Rightarrow \alpha_4 = 8 + 3 \Rightarrow \boxed{\alpha_4 = 11}$ και $\alpha_5 = \alpha_4 + 3 \Rightarrow \alpha_5 = 11 + 3 \Rightarrow \boxed{\alpha_5 = 14}$

β) Αντίστοιχα προκύπτει:

Ακολουθία Fibonacci

$\boxed{\alpha_1 = 1}$, $\boxed{\alpha_2 = 1}$, $\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_1 \Rightarrow \alpha_3 = 1 + 1 \Rightarrow \boxed{\alpha_3 = 2}$,

$\alpha_4 = \alpha_3 + \alpha_2 \Rightarrow \alpha_4 = 2 + 1 \Rightarrow \boxed{\alpha_4 = 3}$, $\alpha_5 = \alpha_4 + \alpha_3 \Rightarrow \alpha_5 = 3 + 2 \Rightarrow \boxed{\alpha_5 = 5}$

γ) Αντίστοιχα προκύπτει:

$\boxed{\alpha_1 = 3}$, $\alpha_2 = 2\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 = 2 \cdot 3 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 6}$, $\alpha_3 = 2\alpha_2 \Rightarrow \alpha_3 = 2 \cdot 6 \Rightarrow \boxed{\alpha_3 = 12}$,

$\alpha_4 = 2\alpha_3 \Rightarrow \alpha_4 = 2 \cdot 12 \Rightarrow \boxed{\alpha_4 = 24}$, $\alpha_5 = 2\alpha_4 \Rightarrow \alpha_5 = 2 \cdot 24 \Rightarrow \boxed{\alpha_5 = 48}$

δ) Όπως βλέπουμε εδώ μας έχει δοθεί ο τύπος της ακολουθίας οπότε προκύπτει:

$\alpha_1 = 1^2 + 1 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 2}$, $\alpha_2 = 2^2 + 1 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 5}$, $\alpha_3 = 3^2 + 1 \Rightarrow \boxed{\alpha_3 = 10}$, $\alpha_4 = 4^2 + 1 \Rightarrow \boxed{\alpha_4 = 17}$,

$\alpha_5 = 5^2 + 1 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 26}$

ε) Αντίστοιχα προκύπτει:

$a_1 = \dfrac{1(1+1)}{2} \Rightarrow \boxed{a_1 = 1}$, $a_2 = \dfrac{2(2+1)}{2} \Rightarrow \boxed{a_2 = 3}$, $a_3 = \dfrac{3(3+1)}{2} \Rightarrow \boxed{a_3 = 6}$, $a_4 = \dfrac{4(4+1)}{2} \Rightarrow \boxed{a_4 = 10}$,

$a_5 = \dfrac{5(5+1)}{2} \Rightarrow \boxed{a_2 = 15}$

Μήπως μπορείτε να βρείτε την αναδρομική σχέση αυτής της ακολουθίας;

στ) Αντίστοιχα προκύπτει:

$a_1 = \eta\mu\left(\frac{1\pi}{6}\right) \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{1}{2}}$, $a_2 = \eta\mu\left(\frac{2\pi}{6}\right) \Rightarrow a_2 = \eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}}$,

$a_3 = \eta\mu\left(\frac{3\pi}{6}\right) \Rightarrow a_3 = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{a_3 = 1}$, $a_4 = \eta\mu\left(\frac{4\pi}{6}\right) \Rightarrow \alpha_4 = \eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \boxed{\alpha_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}}$,

$a_5 = \eta\mu\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow \boxed{a_5 = \frac{1}{2}}$

<u>Παράδειγμα 2</u>: Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες:

α) $\alpha_\nu = 2\nu - 5$ β) $\alpha_\nu = \frac{\nu+2}{3}$ γ) $\alpha_\nu = 3 - \frac{\nu}{2}$

δ) $\alpha_\nu = 5^\nu$ ε) $\alpha_\nu = 2^\nu - 1$ στ) $\alpha_\nu = \frac{2}{5^\nu}$

Είναι:

Θυμόμαστε:
Όταν θέλουμε να ορίσουμε αναδρομικά μια ακολουθία, της οποίας γνωρίζουμε τον τύπο, προσπαθούμε να βρούμε μία σχέση ανάμεσα στον $\alpha_{\nu+1}$ και α_ν και ενδεχομένως και σε προηγούμενους όρους.
Δεν ξεχνάμε να ορίσουμε τους αρχικούς όρους που χρειάζεται η αναδρομική σχέση για να «τρέχει» καλά π.χ. $\alpha_1, \alpha_2, ...$

α) Είναι $\begin{cases} \alpha_{\nu+1} = 2(\nu+1) - 5 \\ \alpha_\nu = 2\nu - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{\nu+1} - 2 = 2\nu - 5 \\ \alpha_\nu = 2\nu - 5 \end{cases} \Rightarrow \alpha_{\nu+1} - 2 = \alpha_\nu \Rightarrow \boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2}$

Επίσης $\alpha_1 = 2 \cdot 1 - 5 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = -3}$

Τελικά η αναδρομική σχέση της ακολουθίας είναι: $\boxed{\begin{cases} \alpha_1 = -3 \\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2 \end{cases}}$

β) Είναι $\begin{cases} \alpha_{\nu+1} = \dfrac{\nu+1+2}{3} \\ \alpha_\nu = \dfrac{\nu+2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_{\nu+1} = \nu + 3 \\ 3\alpha_\nu = \nu + 2 \end{cases} \Rightarrow 3\alpha_{\nu+1} - 3\alpha_\nu = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \frac{1}{3}}$

Επίσης $\alpha_1 = \frac{1+2}{3} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 1}$

Τελικά η αναδρομική σχέση της ακολουθίας είναι: $\boxed{\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \dfrac{1}{3} \end{cases}}$

γ) Είναι $\begin{cases} \alpha_{\nu+1} = 3 - \dfrac{\nu+1}{2} \\ \alpha_\nu = 3 - \dfrac{\nu}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - \frac{1}{2}}$

Επίσης $\alpha_1 = 3 - \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{5}{2}}$

Τελικά η αναδρομική σχέση της ακολουθίας είναι: $\boxed{\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{5}{2} \\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - \dfrac{1}{2} \end{cases}}$

δ) Είναι $\begin{cases} \alpha_{\nu+1} = 5^{\nu+1} \\ \alpha_\nu = 5^\nu \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \dfrac{5^{\nu+1}}{5^\nu} \Rightarrow \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = 5 \Rightarrow \boxed{\alpha_{\nu+1} = 5\alpha_\nu}$

Επίσης $\alpha_1 = 5^1 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 5}$

Τελικά η αναδρομική σχέση της ακολουθίας είναι: $\boxed{\begin{cases} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_{\nu+1} = 5\alpha_\nu \end{cases}}$

ε) Είναι $\begin{cases} \alpha_{\nu+1} = 2^{\nu+1} - 1 \\ \alpha_\nu = 2^\nu - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{\nu+1} + 1 = 2^{\nu+1} \\ \alpha_\nu + 1 = 2^\nu \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\alpha_{\nu+1} + 1}{\alpha_\nu + 1} = \dfrac{2^{\nu+1}}{2^\nu} \Rightarrow \dfrac{\alpha_{\nu+1} + 1}{\alpha_\nu + 1} = 2 \Rightarrow \boxed{\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu + 1}$

Επίσης $\alpha_1 = 2^1 - 1 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 1}$

Τελικά η αναδρομική σχέση της ακολουθίας είναι: $\boxed{\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu + 1 \end{cases}}$

στ) Είναι $\begin{cases} \alpha_{\nu+1} = \dfrac{2}{5^{\nu+1}} \\ \alpha_\nu = \dfrac{2}{5^\nu} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \dfrac{\frac{2}{5^{\nu+1}}}{\frac{2}{5^\nu}} \Rightarrow \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \boxed{\alpha_{\nu+1} = \dfrac{\alpha_\nu}{5}}$

Επίσης $\alpha_1 = \dfrac{2}{5^1} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \dfrac{2}{5}}$

Τελικά η αναδρομική σχέση της ακολουθίας είναι: $\boxed{\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{2}{5} \\ \alpha_{\nu+1} = \dfrac{\alpha_\nu}{5} \end{cases}}$

<u>Παράδειγμα 3</u>: Να βρείτε τον ν-οστό όρο, δηλαδή τον τύπο, των ακολουθιών:

α) $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 3 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \alpha_1 = 7 \\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 2 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu \end{cases}$ ε) $\begin{cases} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu + 3 \end{cases}$ στ) $\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_{\nu+1} = \dfrac{\alpha_\nu}{3} \end{cases}$

Θυμόμαστε:
Όταν θέλουμε να βρούμε τον τύπο μιας ακολουθίας προσπαθούμε να προσδιορίσουμε

Για να προσδιορίσουμε το α_ν πρακτικά αντικαθιστούμε στην αναδρομική σχέση που έχουμε διαδοχικά το $\alpha_{\nu-1}$ μετά το $\alpha_{\nu-2}$ και ούτω καθ' εξής μέχρι να καταλήξουμε στο α_1. Επειδή αυτή η διαδικασία είναι δύσκολη και χρονοβόρα προσπαθούμε με διάφορα τεχνάσματα, που θα φανούν από τις λύσεις του παραδείγματος, να βρούμε τον γενικό τύπο.

α) $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2 \end{cases}$

Είναι

$$\begin{array}{ll} & \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + 2 \\ & \alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2} + 2 \\ & \alpha_{\nu-2} = \alpha_{\nu-3} + 2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \alpha_3 = \alpha_2 + 2 \\ & \alpha_2 = \alpha_1 + 2 \\ + & \alpha_1 = 1 \\ \hline & \alpha_\nu = 2(\nu-1)+1 \end{array}$$

Άρα ο τύπος της ακολουθίας είναι:

$\boxed{\alpha_\nu = 2(\nu-1)+1}$

β) $\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 3 \end{cases}$

Είναι

$$\begin{array}{ll} & \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + 3 \\ & \alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2} + 3 \\ & \alpha_{\nu-2} = \alpha_{\nu-3} + 3 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \alpha_3 = \alpha_2 + 3 \\ & \alpha_2 = \alpha_1 + 3 \\ + & \alpha_1 = 2 \\ \hline & \alpha_\nu = 3(\nu-1)+2 \end{array}$$

Άρα ο τύπος της ακολουθίας είναι:

$\boxed{\alpha_\nu = 3(\nu-1)+2}$

γ) $\begin{cases} \alpha_1 = 7 \\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 2 \end{cases}$

Είναι

$$\begin{array}{ll} & \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} - 2 \\ & \alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2} - 2 \\ & \alpha_{\nu-2} = \alpha_{\nu-3} - 2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \alpha_3 = \alpha_2 - 2 \\ & \alpha_2 = \alpha_1 - 2 \\ + & \alpha_1 = 7 \\ \hline & \alpha_\nu = 2(\nu-1)+1 \end{array}$$

Άρα ο τύπος της ακολουθίας είναι:

$\boxed{\alpha_\nu = 2(\nu-1)+1}$

δ) $\begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu \end{cases}$

Είναι

$$\begin{array}{ll} & \alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} \\ & \alpha_{\nu-1} = 2\alpha_{\nu-2} \\ & \alpha_{\nu-2} = 2\alpha_{\nu-3} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \alpha_3 = 2\alpha_2 \\ & \alpha_2 = 2\alpha_1 \\ \times & \alpha_1 = 3 \\ \hline & \alpha_\nu = 3 \cdot 2^{\nu-1} \end{array}$$

Άρα ο τύπος της ακολουθίας είναι:

$\boxed{\alpha_\nu = 3 \cdot 2^{\nu-1}}$

ε) $\begin{cases} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu + 3 \end{cases}$

στ) $\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_{\nu+1} = \dfrac{\alpha_\nu}{3} \end{cases}$

Είναι $\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu + 3 \Rightarrow \alpha_{\nu+1} + 3 = 2\alpha_\nu + 6 \Rightarrow \dfrac{\alpha_{\nu+1}+3}{\alpha_\nu + 3} = 2$ Είναι

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_\nu + 3}{\alpha_{\nu-1}+3} = 2\\
&\frac{\alpha_{\nu-1} + 3}{\alpha_{\nu-2}+3} = 2\\
&\frac{\alpha_{\nu-2} + 3}{\alpha_{\nu-3}+3} = 2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\alpha_3 + 3}{\alpha_2+3} = 2\\
&\frac{\alpha_2 + 3}{\alpha_1+3} = 2\\
\times\quad &\alpha_1 + 3 = 8\\
\hline
&\alpha_\nu + 3 = 8\cdot 2^{\nu-1}
\end{aligned}$$

Άρα ο τύπος της ακολουθίας είναι:

$$\boxed{\alpha_\nu = 8\cdot 2^{\nu-1} - 3}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_\nu = \frac{\alpha_{\nu-1}}{3}\\
&\alpha_{\nu-1} = \frac{\alpha_{\nu-2}}{3}\\
&\alpha_{\nu-2} = \frac{\alpha_{\nu-3}}{3}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_3 = \frac{\alpha_2}{3}\\
&\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{3}\\
\times\quad &\alpha_1 = 2\\
\hline
&\alpha_\nu = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu-1}
\end{aligned}$$

Άρα ο τύπος της ακολουθίας είναι:

$$\boxed{\alpha_\nu = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu-1}}$$

<u>Αριθμητική Πρόοδος</u>

Στην προσπάθειά μας να μελετήσουμε τις ακολουθίες τις διακρίνουμε ανάλογα με τα χαρακτηριστικά που παρουσιάζουν.

Αρκετές από τις ακολουθίες που είδαμε παραπάνω ήταν της μορφής $\begin{cases} 2,5,8,11,\ldots \\ 3,5,7,9,\ldots \end{cases}$

Όπως παρατηρούμε οι ακολουθίες αυτές έχουν ένα γνώρισμα το οποίο είναι ότι κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση κάθε φορά του ίδιου αριθμού.
Ειδικότερα είναι:

- Μία ακολουθία λέγεται «αριθμητική πρόοδος», αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.
- Ο αριθμός αυτός που προστίθεται κάθε φορά συμβολίζεται συνήθως με ω και καλείται «βήμα» ή «διαφορά» της προόδου.
- Όπως προκύπτει από τα παραπάνω η αναδρομική σχέση μίας αριθμητικής προόδου έχει την μορφή $\boxed{\begin{cases}\alpha_1 \\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega\end{cases}}$
- Ο τύπος μίας αριθμητικής προόδου όπως προκύπτει από την παραπάνω αναδρομική σχέση έχει την μορφή $\boxed{\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\cdot\omega}$

$$+\quad \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \omega$$

Η σχέση αυτή προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned} \alpha_{\nu-1} &= \alpha_{\nu-2} + \omega \\ \alpha_{\nu-2} &= \alpha_{\nu-3} + \omega \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_3 &= \alpha_2 + \omega \\ \alpha_2 &= \alpha_1 + \omega \\ \alpha_1 & \\ \hline \alpha_\nu &= \alpha_1 + (\nu - 1)\cdot\omega \end{aligned}$$

- «Αριθμητικός μέσος» των x, y ονομάζεται ο αριθμός $\frac{x+y}{2}$.

  Αποδεικνύεται ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνον αν ο β είναι ο αριθμητικός μέσος των α και γ.

Θυμόμαστε:

α, β, γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $\Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$

- Συμβολίζουμε με S_ν το άθροισμα των ν πρώτων όρων μίας ακολουθίας (α_ν).

  Όσον αφορά μία αριθμητική πρόοδο αποδεικνύεται ότι:

$$\boxed{S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)} \text{ και } \boxed{S_\nu = \frac{\nu}{2}\left(2\alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega\right)}$$

<u>Παράδειγμα 4</u>: Έστω (α_ν) μία αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 4$. Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 4\omega$, όπου ω είναι η διαφορά της αριθμητικής προόδου.

Είναι:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_5 = \alpha_1 + 4\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ 4 = 2 + 4\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \omega = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 4\omega}$$

<u>Παράδειγμα 5</u>: Να βρεθεί ο 25^{ος} όρος της ακολουθίας $3, 7, 11, 15, \ldots$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος με $\omega = 4$ και $\alpha_1 = 3$.

Οπότε $\alpha_{25} = \alpha_1 + (25-1)\cdot\omega \Rightarrow \alpha_{25} = 3 + 24\cdot 4 \Rightarrow \boxed{\alpha_{25} = 99}$

<u>Παράδειγμα 6</u>: Σε μία αριθμητική πρόοδο ισχύει $\alpha_3 = 4$ και $\alpha_7 = 16$. Να βρεθούν

α) Το βήμα και ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου.

β) Ο όρος α_{50}.

γ) Το άθροισμα των 50 πρώτων όρων της προόδου.

Είναι:

α) $\begin{cases} \alpha_3 = \alpha_1 + (3-1)\omega \\ \alpha_7 = \alpha_1 + (7-1)\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = \alpha_1 + 2\omega \\ 16 = \alpha_1 + 6\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = \alpha_1 + 2\omega \\ 12 = 4\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = \alpha_1 + 2\omega \\ \omega = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ \omega = 3 \end{cases}}$

β) $\alpha_{50} = \alpha_1 + (50-1)\omega \Rightarrow \alpha_{50} = -2 + 49\cdot 3 \Rightarrow \alpha_{50} = -2 + 49\cdot 3 \Rightarrow \boxed{\alpha_{50} = 145}$

γ) $S_{50}=\frac{50}{2}\left(\alpha_1+\alpha_{50}\right)\Rightarrow S_{50}=25\left(-2+145\right)\Rightarrow \boxed{S_{50}=3575}$

<u>Παράδειγμα 7</u>: Σε μία αριθμητική πρόοδο $\left(\alpha_\nu\right)$ με διαφορά $\omega=3$, ο όρος α_{13} είναι διπλάσιος από τον όρο α_6. Να βρείτε:

α) τον πρώτο όρο της προόδου.

β) τον όρο α_{29}.

γ) ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 63.

Είναι:

α) $\begin{cases} a_6=a_1+\left(6-1\right)\omega \\ \alpha_{13}=\alpha_1+\left(13-1\right)\omega \\ \alpha_{13}=2\alpha_6 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a_6=a_1+5\cdot 3 \\ \alpha_{13}=\alpha_1+12\cdot 3 \\ \alpha_{13}=2\alpha_6 \end{cases}\Rightarrow \alpha_1+12\cdot 3=2\left(a_1+5\cdot 3\right)\Rightarrow \boxed{\alpha_1=6}$

β) $\alpha_{29}=\alpha_1+\left(29-1\right)\cdot\omega\Rightarrow \alpha_{29}=6+28\cdot 3\Rightarrow \boxed{\alpha_{29}=90}$

γ) $\alpha_\nu=63\Rightarrow \alpha_1+\left(\nu-1\right)\omega=63\Rightarrow 6+\left(\nu-1\right)\cdot 3=63\Rightarrow 3\left(\nu-1\right)=57\Rightarrow \nu-1=19\Rightarrow \boxed{\nu=20}$

Άρα ο 20^{ος} όρος της ακολουθίας είναι ίσος με 63.

<u>Παράδειγμα 8</u>: Σε μία αριθμητική πρόοδο $\left(\alpha_\nu\right)$ είναι $\alpha_1=-5$ και $\omega=2$. Να βρεθεί:

α) Το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της ακολουθίας.

β) Το άθροισμα των όρων της ακολουθίας που είναι από τον α_{16} έως και τον α_{20}.

Είναι:

α) $S_{20}=\frac{20}{2}\left(2\alpha_1+\left(20-1\right)\omega\right)\Rightarrow S_{20}=10\left(2\left(-5\right)+19\cdot 3\right)\Rightarrow \boxed{S_{20}=470}$

β) Δεν γνωρίζουμε κάποια σχέση που να μας δίνει το ζητούμενο άθροισμα. Ωστόσο παρατηρούμε ότι αν από το S_{20} αφαιρέσουμε το S_{15} τότε το αποτέλεσμα θα είναι ακριβώς το άθροισμα $a_{16}+a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}$, δηλαδή το ζητούμενο.

$S_{15}=\frac{15}{2}\left(2\alpha_1+\left(15-1\right)\omega\right)\Rightarrow S_{15}=\frac{15}{2}\left(2\left(-5\right)+14\cdot 3\right)\Rightarrow \boxed{S_{15}=240}$

Άρα $a_{16}+a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=S_{20}-S_{15}=470-240\Rightarrow \boxed{a_{16}+a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=230}$

Θυμόμαστε:

$\boxed{\alpha_{\kappa+1}+\alpha_{\kappa+2}+...+\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu=S_\nu-S_\kappa}$ για $\nu>\kappa$

<u>Παράδειγμα 9</u>: Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $1+4+7+...+94$ β) $-5-1+3+7+...+135$ γ) $3+5+7+...+289$

Είναι:

α) Στο άθροισμα $1+4+7+...+94$ παρατηρούμε ότι εμφανίζονται οι αριθμοί $1,4,7,...,94$ οι οποίοι είναι όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1=1$ και $\omega=3$. Αν γνωρίζαμε πόσους όρους αθροίζουμε θα ήταν εύκολο να εφαρμόσουμε τον τύπο και να βρούμε το αποτέλεσμα. Επειδή όμως δεν γνωρίζουμε πόσους όρους αθροίζουμε πρώτα θα βρούμε την τάξη του όρου που είναι ίσος με 94.

$\alpha_\nu = 94 \Rightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 94 \Rightarrow 1 + (\nu - 1)\cdot 3 = 94 \Rightarrow 3(\nu - 1) = 93 \Rightarrow \nu - 1 = 31 \Rightarrow \boxed{\nu = 32}$

Άρα $\alpha_{32} = 94$ και επομένως αναζητούμε το άθροισμα S_{32}.

$S_{32} = \dfrac{32}{2}\left(2\alpha_1 + (32-1)\omega\right) \Rightarrow S_{32} = 16(2\cdot 1 + 31\cdot 3) \Rightarrow \boxed{S_{15} = 1520}$

β) Αντίστοιχα είναι $\alpha_1 = -5$ και $\omega = 4$.

$\alpha_\nu = 135 \Rightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 135 \Rightarrow -5 + (\nu - 1)\cdot 4 = 135 \Rightarrow 4(\nu - 1) = 140 \Rightarrow \nu - 1 = 35 \Rightarrow \boxed{\nu = 36}$

Άρα $\alpha_{36} = 135$ και επομένως αναζητούμε το άθροισμα S_{36}.

$S_{36} = \dfrac{36}{2}\left(2\alpha_1 + (36-1)\omega\right) \Rightarrow S_{36} = 18\left(2(-5) + 35\cdot 4\right) \Rightarrow \boxed{S_{15} = 2340}$

γ) Αντίστοιχα είναι $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 2$.

$\alpha_\nu = 285 \Rightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 289 \Rightarrow 3 + (\nu - 1)\cdot 2 = 289 \Rightarrow 2(\nu - 1) = 286 \Rightarrow \nu - 1 = 143 \Rightarrow \boxed{\nu = 144}$

Άρα $\alpha_{144} = 289$ και επομένως αναζητούμε το άθροισμα S_{144}.

$S_{144} = \dfrac{144}{2}\left(2\alpha_1 + (144-1)\omega\right) \Rightarrow S_{144} = 72(2\cdot 3 + 143\cdot 2) \Rightarrow \boxed{S_{15} = 21024}$

<u>Παράδειγμα 10</u>: Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ο $16^{ος}$ όρος είναι 50, ενώ το άθροισμα του $6^{ου}$ και του $11^{ου}$ όρου είναι 40. Να βρείτε:

α) το άθροισμα των πρώτων 16 όρων της ακολουθίας.

β) το άθροισμα των πρώτων 31 όρων της ακολουθίας.

Είναι:

$$\begin{cases}\alpha_{16} = 50\\ \alpha_6 + \alpha_{11} = 40\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 + 15\omega = 50\\ (\alpha_1 + 5\omega) + (\alpha_1 + 10\omega) = 40\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 + 15\omega = 50\\ 2\alpha_1 + 15\omega = 40\end{cases} \Rightarrow \left\{\boxed{\begin{array}{l}\alpha_1 = -10\\ \omega = 4\end{array}}\right.$$

α) $S_{16} = \dfrac{16}{2}(2\alpha_1 + 15\omega) \Rightarrow S_{16} = 8\left(2(-10) + 15\cdot 4\right) \Rightarrow \boxed{S_{16} = 320}$

β) $S_{31} = \dfrac{31}{2}(2\alpha_1 + 30\omega) \Rightarrow S_{31} = \dfrac{31}{2}\left(2(-10) + 30\cdot 4\right) \Rightarrow \boxed{S_{16} = 1550}$

<u>Παράδειγμα 11</u>: Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της είναι 40, ενώ το άθροισμα των 15 πρώτων όρων της είναι 135. Να βρείτε:

α) τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου.

β) την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A} = \sqrt{\alpha_{19} + \sqrt{\alpha_{16}}}$.

γ) το άθροισμα: $S = a_{10} + a_{11} + \ldots + a_{27}$.

Είναι:

$$\text{α) } \begin{cases}S_{10} = 40\\ S_{15} = 135\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{10}{2}(2\alpha_1 + 9\omega) = 40\\ \dfrac{15}{2}(2\alpha_1 + 14\omega) = 135\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\alpha_1 + 9\omega = 8\\ 2\alpha_1 + 14\omega = 18\end{cases} \Rightarrow \left\{\boxed{\begin{array}{l}\omega = 2\\ \alpha_1 = -5\end{array}}\right.$$

β) $\alpha_{19} = \alpha_1 + 18\omega \Rightarrow \alpha_{19} = -5 + 18\cdot 2 \Rightarrow \boxed{\alpha_{19} = 31}$

$\alpha_{16} = \alpha_1 + 15\omega \Rightarrow \alpha_{16} = -5 + 15\cdot 2 \Rightarrow \boxed{\alpha_{16} = 25}$

Επομένως $\mathrm{A} = \sqrt{\alpha_{19} + \sqrt{\alpha_{16}}} \Rightarrow \mathrm{A} = \sqrt{31 + \sqrt{25}} \Rightarrow \mathrm{A} = \sqrt{31 + 5} \Rightarrow \mathrm{A} = \sqrt{36} \Rightarrow \boxed{\mathrm{A} = 6}$

γ) Είναι: $S = a_{10} + a_{11} + \ldots + a_{27} \Rightarrow S = S_{27} - S_9$

$S_9 = \frac{9}{2}(2\alpha_1 + 8\omega) \Rightarrow S_9 = \frac{9}{2}(2(-5) + 8\cdot 2) \Rightarrow \boxed{S_9 = 27}$

$S_{27} = \frac{27}{2}(2\alpha_1 + 26\omega) \Rightarrow S_{27} = \frac{27}{2}(2(-5) + 26\cdot 2) \Rightarrow \boxed{S_{27} = 567}$

Επομένως $S = a_{10} + a_{11} + ... + a_{27} \Rightarrow S = S_{27} - S_9 \Rightarrow S = 567 - 27 \Rightarrow \boxed{S = 540}$

<u>Παράδειγμα 12</u>: Δίνεται η ακολουθία (α_ν) της οποίας ο ν-οστός όρος είναι $\alpha_\nu = 7 - 2\nu$.

α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος.

β) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 26 όρων της (α_ν).

γ) Πόσοι όροι της παραπάνω ακολουθίας έχουν άθροισμα -187

Είναι:

α) $\begin{cases} \alpha_{\nu+1} = 7 - 2(\nu+1) \\ \alpha_\nu = 7 - 2\nu \end{cases} \Rightarrow \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = (7 - 2(\nu+1)) - (7 - 2\nu) \Rightarrow \boxed{\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = -2}$

Άρα η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με βήμα $\omega = -2$ και $\alpha_1 = 7 - 2\cdot 1 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 5}$

Θυμόμαστε:
Για να αποδείξουμε ότι μία ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος υπολογίζουμε τη διαφορά $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$. Αν η διαφορά αυτή βγει ένας σταθερός αριθμός ανεξάρτητος του ν τότε η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος και μάλιστα η διαφορά αυτή είναι το βήμα της προόδου.

β) $S_{26} = \frac{26}{2}(2\alpha_1 + 25\omega) \Rightarrow S_{26} = 13(2\cdot 5 + 25(-2)) \Rightarrow \boxed{S_{26} = -520}$

γ) $S_\nu = -187 \Rightarrow \frac{\nu}{2}(2\alpha_1 + (\nu-1)\omega) = -187 \Rightarrow \frac{\nu}{2}(2\cdot 5 + (\nu-1)\cdot(-2)) = -187 \Rightarrow \nu(10 - 2\nu + 2) = -374 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2\nu^2 + 12\nu = -374 \Rightarrow -\nu^2 + 6\nu = -187 \Rightarrow \boxed{\nu^2 - 6\nu - 187 = 0}$

Λύνουμε με διακρίνουσα οπότε:

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot(-187) \Rightarrow \boxed{\Delta = 784}$

Άρα $\nu_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \nu_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{784}}{2\cdot 1} \Rightarrow \nu_{1,2} = \frac{6 \pm 28}{2} \Rightarrow \begin{cases} \nu_1 = -11 \text{ απορρίπτεται} \\ \boxed{\nu_2 = 17} \end{cases}$

Τελικά βρήκαμε ότι αν προσθέσουμε τους 17 πρώτους όρους της ακολουθίας το άθροισμα προκύπτει -187. Το $\nu_1 = -11$ απορρίφτηκε διότι το ν όπως έχουμε αναφέρει είναι θετικός ακέραιος.

Θυμόμαστε:
Όταν καλούμαστε να βρούμε το πλήθος των όρων που έχουν άθροισμα A τότε από την σχέση S_ν με γνωστά τα α_1 και ω καταλήγουμε σε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού απ' όπου βρίσκουμε το ν. Απορρίπτουμε εκείνες τις λύσεις που δεν είναι θετικοί ακέραιοι!

<u>Παράδειγμα 13</u>: Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, οι αριθμοί:

$$3\alpha+\beta\,,\ 2(\alpha-\beta),\ \alpha-5\beta$$

με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Είναι:

$$\frac{(3\alpha+\beta)+(\alpha-5\beta)}{2}=\frac{3\alpha+\alpha+\beta-5\beta}{2}=\frac{4\alpha-4\beta}{2}=2(\alpha-\beta)$$

Επομένως οι παραπάνω αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Θυμόμαστε: α,β,γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $\Leftrightarrow \beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$

<u>Παράδειγμα 14</u>: Αν οι θετικοί αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τους αριθμούς:

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}},\ \frac{1}{\sqrt{\gamma}+\sqrt{\alpha}},\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$$

Εφόσον α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου είναι

$$\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}\Leftrightarrow 2\beta=\alpha+\gamma\Leftrightarrow \boxed{\beta-\gamma=\alpha-\beta}$$

Είναι $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}+\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}}{2}=\dfrac{\dfrac{1\cdot\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}\right)}{\left(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}\right)\cdot\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}\right)}+\dfrac{1\cdot\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)}{\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)\cdot\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)}}{2}=$

$$=\frac{\dfrac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}{\beta-\gamma}+\dfrac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\alpha-\beta}}{2}=\frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}+\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{2(\beta-\gamma)}=\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\gamma}}{(\beta-\gamma)+(\beta-\gamma)}=\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\gamma}}{(\beta-\gamma)+(\alpha-\beta)}=$$

$$=\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\gamma}}{\alpha-\gamma}=\frac{\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\gamma}\right)\cdot\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma}\right)}{(\alpha-\gamma)\cdot\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma}\right)}=\frac{\alpha-\gamma}{(\alpha-\gamma)\cdot\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma}}$$

Δείξαμε οπότε: $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma}}=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}+\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}}{2}$, άρα $\dfrac{1}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}},\ \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}+\sqrt{\alpha}},\ \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

<u>Παράδειγμα 15</u>: Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) και έστω S_ν, $S_{2\nu}$ και $S_{3\nu}$ τα αθροίσματα των πρώτων ν, 2ν και 3ν όρων αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $S_{3\nu}=3\left(S_{2\nu}-S_\nu\right)$.

Είναι:

$$\begin{cases} S_\nu=\dfrac{\nu}{2}\left(2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right) \\ S_{2\nu}=\dfrac{2\nu}{2}\left(2\alpha_1+(2\nu-1)\omega\right)\Rightarrow S_{2\nu}-S_\nu=\dfrac{2\nu}{2}\left(2\alpha_1+(2\nu-1)\omega\right)-\dfrac{\nu}{2}\left(2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right)\Rightarrow \\ S_{3\nu}=\dfrac{3\nu}{2}\left(2\alpha_1+(3\nu-1)\omega\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{2\nu}-S_\nu=\frac{\nu}{2}\left(2\left(2\alpha_1+(2\nu-1)\omega\right)-\left(2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right)\right)\Rightarrow S_{2\nu}-S_\nu=\frac{\nu}{2}\left(4\alpha_1+4\nu\omega-2\omega-2\alpha_1-\nu\omega+\omega\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{2\nu}-S_\nu=\frac{\nu}{2}\left(2\alpha_1+3\nu\omega-\omega\right)\Rightarrow S_{2\nu}-S_\nu=\frac{\nu}{2}\left(2\alpha_1+(3\nu-1)\omega\right)\Rightarrow S_{2\nu}-S_\nu=\frac{S_{3\nu}}{3}\Rightarrow \boxed{S_{3\nu}=3\left(S_{2\nu}-S_\nu\right)}$$

<u>Γεωμετρική Πρόοδος</u>

Μια άλλη κατηγορία ακολουθιών είναι οι λεγόμενες γεωμετρικές πρόοδοι. Ορισμένα από τα παραδείγματα που είδαμε στην αρχή ήταν ακολουθίες όπως: $\begin{cases}3,6,12,24,48,...\\2,10,50,250,...\end{cases}$

Όπως βλέπουμε αυτές οι ακολουθίες έχουν ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα το οποίο είναι ότι κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό κάθε με τον ίδιο αριθμό. Ειδικότερα είναι:

- Μία ακολουθία λέγεται «γεωμετρική πρόοδος», αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.
- Ο αριθμός αυτός που πολλαπλασιάζεται κάθε φορά συμβολίζεται συνήθως με λ και καλείται «λόγος» της προόδου.
- Όπως προκύπτει από τα παραπάνω η αναδρομική σχέση μίας γεωμετρικής προόδου έχει την μορφή $\boxed{\begin{cases}\alpha_1\\ \alpha_{\nu+1}=\lambda\cdot\alpha_\nu\end{cases}}$ όπου $\boxed{\alpha_1\neq 0}$.
- Ο τύπος μίας αριθμητικής προόδου όπως προκύπτει από την παραπάνω αναδρομική σχέση έχει την μορφή $\boxed{\alpha_\nu=\lambda^{\nu-1}\cdot\alpha_1}$

  Η σχέση αυτή προκύπτει ως εξής:

$$\begin{array}{rl} & \alpha_\nu=\lambda\cdot\alpha_{\nu-1}\\ & \alpha_{\nu-1}=\lambda\cdot\alpha_{\nu-2}\\ & \alpha_{\nu-2}=\lambda\cdot\alpha_{\nu-3}\\ & \dots\dots\dots\dots\\ & \alpha_3=\lambda\cdot\alpha_2\\ & \alpha_2=\lambda\cdot\alpha_1\\ \times & \alpha_1\\ \hline & \alpha_\nu=\lambda^{\nu-1}\cdot\alpha_1\end{array}$$

- «Γεωμετρικός μέσος» των ομόσημων αριθμών x, y ονομάζεται ο αριθμός $\sqrt{x\cdot y}$. Αποδεικνύεται ότι οι αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνον αν ο $|\beta|$ είναι ο γεωμετρικός μέσος των α και γ.

Θυμόμαστε:
α,β,γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $\Leftrightarrow \beta^2=\alpha\cdot\gamma$

- Συμβολίζουμε με S_ν το άθροισμα των ν πρώτων όρων μίας ακολουθίας (α_ν).

Όσον αφορά μία γεωμετρική πρόοδο αποδεικνύεται ότι:

$$\boxed{S_\nu = \frac{\alpha_{\nu+1} - \alpha_1}{1-\lambda}} \text{ και } \boxed{S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}}$$

<u>Παράδειγμα 16</u>: Να βρείτε το 7ο όρο των παρακάτω γεωμετρικών προόδων:

α) $1, 2, 4, \ldots$ β) $2, -4, 8, -16, \ldots$ γ) $\frac{27}{8}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$

Είναι:

α) Προφανώς $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = 2$ οπότε $\alpha_7 = \lambda^6 \cdot \alpha_1 \Rightarrow \alpha_7 = 2^6 \cdot 1 \Rightarrow \boxed{\alpha_7 = 64}$

β) Είναι $\alpha_1 = 2$ και $\lambda = -2$ οπότε $\alpha_7 = \lambda^6 \cdot \alpha_1 \Rightarrow \alpha_7 = (-2)^6 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{\alpha_7 = 128}$

γ) Είναι $\alpha_1 = \frac{27}{8}$ και $\lambda = \frac{2}{3}$ οπότε $\alpha_7 = \lambda^6 \cdot \alpha_1 \Rightarrow \alpha_7 = \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \frac{27}{8} \Rightarrow \alpha_7 = \frac{64}{729} \cdot \frac{27}{8} \boxed{\alpha_7 = \frac{8}{27}}$

<u>Παράδειγμα 17</u>: Σε μία γεωμετρική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_1 = \frac{2}{9}$ και $\alpha_4 = 6$. Να βρείτε:

α) το λόγο λ β) τον α_6 γ) το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων

Είναι:

α) $\begin{cases} \alpha_1 = \frac{2}{9} \\ \alpha_4 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{2}{9} \\ \lambda^3 \cdot \alpha_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \lambda^3 \cdot \frac{2}{9} = 6 \Rightarrow \lambda^3 = 27 \Rightarrow \boxed{\lambda = 3}$

β) $\alpha_6 = \lambda^5 \cdot \alpha_1 \Rightarrow \alpha_6 = 3^5 \cdot \frac{2}{9} \Rightarrow \alpha_6 = 243 \cdot \frac{2}{9} \Rightarrow \boxed{\alpha_6 = 54}$

γ) $S_5 = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^5 - 1}{\lambda - 1} \Rightarrow S_5 = \frac{2}{9} \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} \Rightarrow S_5 = \frac{2}{9} \cdot \frac{243 - 1}{2} \Rightarrow \boxed{S_5 = \frac{242}{9}}$

<u>Παράδειγμα 18</u>: Σε μία γεωμετρική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_6 = -108$ και $\alpha_3 = 4$. Να βρείτε τον πρώτο όρο και τον λόγο της προόδου.

Είναι: $\begin{cases} \alpha_6 = -108 \\ \alpha_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^5 \cdot \alpha_1 = -108 \\ \lambda^2 \cdot \alpha_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda^5 \cdot \alpha_1}{\lambda^2 \cdot \alpha_1} = \frac{-108}{4} \Rightarrow \lambda^3 = -27 \Rightarrow \boxed{\lambda = -3}$

Οπότε: $\alpha_3 = 4 \Rightarrow \lambda^2 \cdot \alpha_1 = 4 \Rightarrow 3^2 \cdot \alpha_1 = 4 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{4}{9}}$

<u>Παράδειγμα 19</u>: Οι αριθμοί $x - 3$, $x + 1$ και $2x^2 - 5x - 7$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός x.

Εφόσον οι αριθμοί $x - 3$, $x + 1$ και $2x^2 - 5x - 7$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου πρέπει: $(x+1)^2 = (x-3)\cdot(2x^2 - 5x - 7) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x^3 - 5x^2 - 7x - 6x^2 + 15x + 21 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^3 - 12x^2 + 6x + 20 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0}$ (1)

Η (1) είναι μία πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές οπότε:

Πιθανές ακέραιες ρίζες: $\pm 1, \pm 2. \pm 5, \pm 10$

Επαληθεύουμε ότι $x = -1$ λύση της (1): $(-1)^3 - 6(-1)^2 + 3(-1) + 10 == -1 - 6 - 3 + 10 = 0$

Κάνουμε την διαίρεση $(x^3 - 6x^2 + 3x + 10) \div (x + 1)$

1	-6	3	10	$\rho = -1$

	-1	7	-10	
1	-7	10	0	

Οπότε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $\left(x^3-6x^2+3x+10\right)\div\left(x+1\right)$ είναι:

$\boxed{\pi(x)=x^2-7x+10}$ και $\boxed{\upsilon(x)=0}$.

Από την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης είναι:

$$\left(x^3-6x^2+3x+10\right)=\left(x+1\right)\cdot\left(x^2-7x+10\right)+0\Rightarrow\left(x^3-6x^2+3x+10\right)=\left(x+1\right)\cdot\left(x^2-7x+10\right)$$

Είναι οπότε:

$$x^3-6x^2+3x+10=0\Rightarrow\left(x+1\right)\cdot\left(x^2-7x+10\right)=0\Rightarrow\begin{cases}x+1=0 \;\;(2)\\ x^2-7x+10=0\;\;(3)\end{cases}$$

Από (2) προκύπτει: $x+1=0\Rightarrow x=-1$

Από (3) προκύπτει: $x^2-7x+10=0$ λύνουμε με διακρίνουσα οπότε $x=2$ ή $x=5$.

Η λύση $x=-1$ απορρίπτεται διότι ο μεσαίος όρος γίνεται μηδέν άρα $\boxed{x=2}$ ή $\boxed{x=5}$.

Θυμόμαστε:
Σε μία γεωμετρική πρόοδο υποθέσαμε $\alpha_1\neq 0$ οπότε θα είναι και
$\alpha_\nu=\lambda^{\nu-1}\cdot\alpha_1\neq 0$ για κάθε ν!

<u>Παράδειγμα 20</u>: Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $5+10+20+\ldots+640$ β) $4-8+16-\ldots-8.192$

Είναι:

α) Όπως παρατηρούμε οι όροι που αθροίζονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1=5$ και λόγο $\lambda=2$. Για να εφαρμόσουμε τον τύπο του αθροίσματος πρέπει να βρούμε πόσους όρους αθροίζουμε οπότε πρέπει να βρούμε την τάξη του όρου ο οποίος είναι ίσος με 640.

Είναι: $\alpha_\nu=640\Rightarrow\lambda^{\nu-1}\cdot\alpha_1=640\Rightarrow 2^{\nu-1}\cdot 5=640\Rightarrow 2^{\nu-1}=128\Rightarrow\nu-1=7\Rightarrow\boxed{\nu=8}$

Τελικά $S_8=5+10+20+\ldots+640=a_1\cdot\dfrac{\lambda^8-1}{\lambda-1}=5\cdot\dfrac{2^8-1}{2-1}\Rightarrow\boxed{S_8=1.275}$

β) Αντίστοιχα είναι $a_1=4$ και λόγο $\lambda=-2$.

Επίσης είναι

$\alpha_\nu=-8.192\Rightarrow\lambda^{\nu-1}\cdot\alpha_1=-8.192\Rightarrow\left(-2\right)^{\nu-1}\cdot 4=-8.192\Rightarrow\left(-2\right)^{\nu-1}=-2.048\Rightarrow\nu-1=11\Rightarrow\boxed{\nu=12}$

Τελικά $S_{12}=4-8+16-\ldots-8.192=\alpha_1\cdot\dfrac{\lambda^{12}-1}{\lambda-1}=4\cdot\dfrac{\left(-2\right)^{12}-1}{-2-1}\Rightarrow\boxed{S_{12}=-5.460}$

<u>Παράδειγμα 21</u>: Ο ν-οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu=\dfrac{2^{\nu+2}}{3^\nu}$.

α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\left(\alpha_\nu\right)$ είναι γεωμετρική πρόοδος, της οποίας να βρείτε το λόγο λ και τον πρώτο όρο.

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών α_1 και λ.

Είναι:

α) $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=\dfrac{\dfrac{2^{\nu+1+2}}{3^{\nu+1}}}{\dfrac{2^{\nu+2}}{3^{\nu}}}=\dfrac{2^{\nu+3}\cdot 3^{\nu}}{3^{\nu+1}\cdot 2^{\nu+2}}\Rightarrow\boxed{\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=\dfrac{2}{3}}$ Βρήκαμε ότι ο λόγος κάθε όρου προς τον προηγούμενο είναι σταθερός και ίσος με $\dfrac{2}{3}$. Άρα η δοθείσα ακολουθία αποτελεί γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\boxed{\lambda=\dfrac{2}{3}}$ και πρώτο όρο $\alpha_1=\dfrac{2^{1+2}}{3^1}\Rightarrow\boxed{\alpha_1=\dfrac{8}{3}}$.

Θυμόμαστε:
Για να αποδείξουμε ότι μία ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος υπολογίζουμε το λόγο $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$. Αν ο λόγος αυτός βγει ένας σταθερός αριθμός ανεξάρτητος του ν τότε η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος και μάλιστα ο λόγος αυτός είναι ο λόγος της προόδου.

<u>Παράδειγμα 22</u>: Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ, για την οποία ισχύει:

$$2\alpha_1\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3 \text{ και } S_{20}=20.000$$

α) Να αποδείξετε ότι $2\alpha_1=\lambda+1$.

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S=\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_{10}^2$

Είναι:

α) $2\alpha_1\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3\Rightarrow 2\alpha_1\lambda\alpha_1=\lambda\alpha_1+\lambda^2\alpha_1 \underset{\lambda\neq 0}{\overset{\alpha_1\neq 0}{\Rightarrow}} \boxed{2\alpha_1=\lambda+1}$

β)
$$S=\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_{10}^2=\alpha_1^2+\lambda^2\alpha_1^2+...+\lambda^{18}\alpha_1^2=\alpha_1^2\left(1+\lambda^2+...+\lambda^{18}\right)=\alpha_1^2\,\frac{\lambda^{20}-1}{\lambda^2-1}=\frac{(\lambda+1)^2}{4}\,\frac{\lambda^{20}-1}{\lambda^2-1}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow S=\frac{(\lambda+1)}{4}\,\frac{\lambda^{20}-1}{\lambda-1}\Rightarrow S=\frac{S_{20}}{2}\Rightarrow S=\frac{20.000}{2}\Rightarrow\boxed{S=10.000}$$

Κεφάλαιο – 4ο: Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση

Εκθετική Συνάρτηση

- Βασικές έννοιες δυνάμεων

Βασικό εργαλείο στις εκθετικές και στις λογαριθμικές συναρτήσεις αποτελεί η έννοια της δύναμης ενός αριθμού. Στις προηγούμενες τάξεις έχουμε διδαχθεί την έννοια της δύναμης με εκθέτη φυσικό και με βάση τις ιδιότητες την επεκτείναμε και στην περίπτωση όπου ο εκθέτης ήταν ακέραιος. Στην συνέχεια δίνοντας τον ακόλουθο ορισμό επεκτείναμε την έννοια της δύναμης και στην περίπτωση όπου ο εκθέτης είναι ρητός:

❖ Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος τότε ορίζουμε:

$$\boxed{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$$

Επιπλέον αν μ, ν θετικοί ακέραιοι, ορίζουμε: $0^{\frac{\mu}{\nu}}=0$.

Στην περίπτωση όπου ο εκθέτης είναι άρρητος αποδεικνύεται ότι όταν η βάση είναι θετικός πραγματικός έχει νόημα η έννοια της δύναμης και ισχύουν οι ιδιότητες:

❖ Αν α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, τότε:

- $\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1+x_2}$
- $\alpha^{x_1} \div \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1-x_2}$
- $\left(\alpha^{x_1}\right)^{x_2} = \alpha^{x_1 \cdot x_2}$
- $\left(\alpha \cdot \beta\right)^{x} = \alpha^{x} \cdot \beta^{x}$
- $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{x} = \dfrac{\alpha^{x}}{\beta^{x}}$
- $\alpha^{0} = 1$

Εφόσον ορίστηκε η δύναμη ενός αριθμού με εκθέτη άρρητο το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε την εκθετική συνάρτηση, ειδικότερα:

❖ Η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \left(0,+\infty\right)$ με $f(x)=\alpha^{x}$, $a > 0$ και $\alpha \neq 1$ καλείται εκθετική συνάρτηση με βάση το α.

Στην περίπτωση όπου $\alpha = 1$ η συνάρτηση $f(x)=1^{x}$ είναι σταθερή και ίση με «ένα».

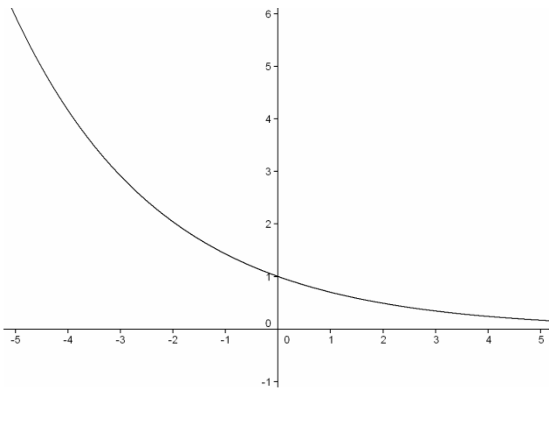
- Η συνάρτηση: $f(x)=\alpha^{x}$ με $0 < \alpha < 1$

Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^{x}$ όταν $0 < \alpha < 1$ είναι μία συνάρτηση με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$
- Βρίσκεται πάντα πάνω από τον άξονα $x'x$, δηλαδή είναι παντού «θετική»
- Διέρχεται πάντα από το σημείο $\mathrm{A}(0,1)$
- Είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το $\mathbb{R}$, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{x_1 < x_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha^{x}$ με $0 < \alpha < 1$ είναι της μορφής:



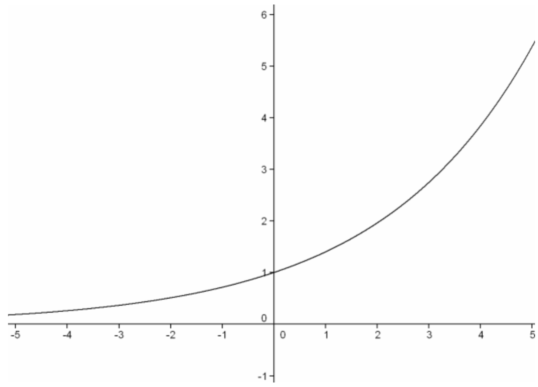
- <u>Η συνάρτηση</u>: $f(x)=\alpha^x$ με $\alpha>1$

Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ όταν $\alpha>1$ είναι μία συνάρτηση με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$
- Βρίσκεται πάντα πάνω από τον άξονα $x'x$, δηλαδή είναι παντού «θετική»
- Διέρχεται πάντα από το σημείο $A(0,1)$
- Είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$, δηλαδή για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{x_1<x_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1}<\alpha^{x_2}}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$ με $\alpha>1$ είναι της μορφής:



<u>Σημαντική παρατήρηση</u>: Σε μία εκθετική συνάρτηση προκύπτει λόγω της μονοτονίας ότι αν $x_1\neq x_2$ τότε $\alpha^{x_1}\neq\alpha^{x_2}$.

Πρακτικά θα ισχύει: $\boxed{\alpha^{x_1}=\alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1=x_2}$

<u>**Σημείωση**</u>: Στο συγκεκριμένο τμήμα περιλαμβάνονται ασκήσεις που περιέχουν ερωτήματα όπως:

- Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- Να βρεθεί η μονοτονία της συνάρτησης.
- Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης.
- Να λυθεί η εξίσωση-ανίσωση.
- Να βρεθούν οι παράμετροι αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση είναι αύξουσα-φθίνουσα.

<u>Παράδειγμα 1</u>: Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $5^{x+2}=25$ β) $3^{2x-5}=27$ γ) $3^{3x+5}=\frac{1}{81}$ δ) $11^{x^2-3x-4}-1=0$

ε) $2^{|x|-6}-\frac{1}{4}=0$ στ) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-6}=\frac{27}{8}$ ζ) $3^{5x+1}=9^{2x}$ η) $4^x\cdot 2^{x-9}=8$

θ) $8^{x-5}=4^{x+3}$ ι) $(36)^{2-x}=\left(\sqrt{6}\right)^{x-12}$ ια) $2^{x^2-5x+6}=1$ ιβ) $5^{2\sigma\upsilon\nu x+1}=1$

Είναι:

Θυμόμαστε: Όταν λύνουμε μία εκθετική εξίσωση βασικός μας στόχος είναι να εμφανίσουμε δυνάμεις με ίδια βάση.

α) $5^{x+2}=25 \Leftrightarrow 5^{x+2}=5^2 \Leftrightarrow x+2=2 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$

β) $3^{2x-5}=27 \Leftrightarrow 3^{2x-5}=3^3 \Leftrightarrow 2x-5=3 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow \boxed{x=4}$

γ) $3^{3x+5}=\frac{1}{81} \Leftrightarrow 3^{3x+5}=\frac{1}{3^4} \Leftrightarrow 3^{3x+5}=3^{-4} \Leftrightarrow 3x+5=-4 \Leftrightarrow 3x=-9 \Leftrightarrow \boxed{x=-3}$

δ) $11^{x^2-3x-4}-1=0 \Leftrightarrow 11^{x^2-3x-4}=11^0 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases}}$

ε) $2^{|x|-6}-\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow 2^{|x|-6}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{|x|-6}=2^{-2} \Leftrightarrow |x|-6=-2 \Leftrightarrow |x|=4 \Leftrightarrow \boxed{x=\pm 4}$

στ) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-6}=\frac{27}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-6}=\left(\frac{3}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x^2-6=3 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow \boxed{x=\pm 3}$

ζ) $3^{5x+1}=9^{2x} \Leftrightarrow 3^{5x+1}=\left((3)^2\right)^{2x} \Leftrightarrow 3^{5x+1}=3^{4x} \Leftrightarrow 5x+1=4x \Leftrightarrow \boxed{x=-1}$

η) $4^x \cdot 2^{x-9}=8 \Leftrightarrow \left(2^2\right)^x \cdot 2^{x-9}=2^3 \Leftrightarrow 2^{2x}\cdot 2^{x-9}=2^3 \Leftrightarrow 2^{3x-9}=2^3 \Leftrightarrow 3x-9=3 \Leftrightarrow 3x=12 \Leftrightarrow \boxed{x=4}$

θ) $8^{x-5}=4^{x+3} \Leftrightarrow \left(2^3\right)^{x-5}=\left(2^2\right)^{x+3} \Leftrightarrow 2^{3x-15}=2^{2x+6} \Leftrightarrow 3x-15=2x+6 \Leftrightarrow \boxed{x=21}$

ι) $(36)^{2-x}=\left(\sqrt{6}\right)^{x-12} \Leftrightarrow \left(6^2\right)^{2-x}=\left(6^{\frac{1}{2}}\right)^{x-12} \Leftrightarrow 6^{4-2x}=6^{\frac{x}{2}-6} \Leftrightarrow 4-2x=\frac{x}{2}-6 \Leftrightarrow \frac{5x}{2}=10 \Leftrightarrow \boxed{x=4}$

ια) $2^{x^2-5x+6}=1 \Leftrightarrow 2^{x^2-5x+6}=2^0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}}$

ιβ) $5^{2\sigma\upsilon\nu x+1}=1 \Leftrightarrow 5^{2\sigma\upsilon\nu x+1}=5^0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x+1=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x=2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}}$

<u>Παράδειγμα 2</u>: Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2^{x+2}+2^{x+3}+48\cdot 2^{x-4}+2\cdot 2^{x-1}=1$ β) $2^{2x}-10\cdot 2^x+16=0$

γ) $3\cdot 27^x-27\cdot 3^{2x-3}-3^{x+3}+9=0$ δ) $\sqrt[4]{2^{x-1}\sqrt{2^{x+3}}}=4$

ε) $2^x+2\cdot 3^{x+1}=3^{x+3}-5\cdot 2^{x+2}$ στ) $9^{x+1}=2\cdot 4^{x+1}-6\cdot 3^{2x+1}$

Είναι:

α) $2^{x+2}+2^{x+3}+48\cdot 2^{x-4}+2\cdot 2^{x-1}=1 \Leftrightarrow 2^2\cdot 2^x+2^3\cdot 2^x+48\cdot\frac{2^x}{2^4}+2\cdot\frac{2^x}{2^1}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\cdot 2^x+8\cdot 2^x+3\cdot 2^x+2^x=1 \Leftrightarrow 16\cdot 2^x=1 \Leftrightarrow 2^4\cdot 2^x=2^0 \Leftrightarrow 2^{4+x}=2^0 \Leftrightarrow 4+x=0 \Leftrightarrow \boxed{x=-4}$

β) $2^{2x}-10\cdot 2^x+16=0 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-10\cdot 2^x+16=0$ (1)

Θέτουμε $2^x=\omega$ οπότε η (1) γίνεται $\omega^2-10\omega+16=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega=2 \\ \omega=8 \end{cases}$

Αν $\omega=2$ τότε $2^x=2 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$

Αν $\omega=8$ τότε $2^x=8 \Leftrightarrow 2^x=2^3 \Leftrightarrow \boxed{x=3}$

Θυμόμαστε: Μία εκθετική εξίσωση αρκετές φορές με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής καταλήγει σε μια πολυωνυμική η οποία επιλύεται με γνωστές μεθόδους. Αφού προσδιορίσουμε την μεταβλητή που έχουμε θέσει δεν ξεχνάμε να υπολογίσουμε την τιμή της αρχικής μεταβλητής.

γ) $3\cdot 27^x - 27\cdot 3^{2x-3} - 3^{x+3} + 9 = 0 \Leftrightarrow 3\cdot\left(3^x\right)^3 - 27\cdot\dfrac{\left(3^x\right)^2}{3^3} - 3^3\cdot 3^x + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\cdot\left(3^x\right)^3 - \left(3^x\right)^2 - 27\cdot 3^x + 9 = 0 \quad (1)$

Θέτουμε $3^x = \omega$ οπότε η (1) γίνεται $3\omega^3 - \omega^2 - 27\omega + 9 = 0$.

Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση στην οποία καταλήξαμε οπότε προκύπτει:

$$3\omega^3 - \omega^2 - 27\omega + 9 = 0 \Leftrightarrow \left(\omega^2 - 9\right)\left(3\omega - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega^2 - 9 = 0 \\ 3\omega - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = \pm 3 \\ \omega = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Αν $\omega = 3$ τότε $3^x = 3 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$

Αν $\omega = 3$ τότε $3^x = -3$, αδύνατη!

Αν $\omega = \dfrac{1}{3}$ τότε $3^x = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-1} \Leftrightarrow \boxed{x = -1}$

δ) $\sqrt[4]{2^{x-1}\sqrt{2^{x+3}}} = 4 \Leftrightarrow \left(2^{x-1}\sqrt{2^{x+3}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^2 \Leftrightarrow \left(2^{x-1}\left(2^{x+3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^2 \Leftrightarrow 2^{\frac{x-1}{4}}\left(2^{x+3}\right)^{\frac{1}{8}} = 2^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{\frac{x-1}{4}}2^{\frac{x+3}{8}} = 2^2 \Leftrightarrow 2^{\frac{2x-2+x+3}{8}} = 2^2 \Leftrightarrow \dfrac{2x-2+x+3}{8} = 2 \Leftrightarrow 3x+1 = 16 \Leftrightarrow 3x = 15 \Leftrightarrow \boxed{x = 5}$

ε) $2^x + 2\cdot 3^{x+1} = 3^{x+3} - 5\cdot 2^{x+2} \Leftrightarrow 2^x + 2\cdot 3\cdot 3^x = 3^3\cdot 3^x - 5\cdot 2^2\cdot 2^x \Leftrightarrow 2^x + 6\cdot 3^x = 27\cdot 3^x - 20\cdot 2^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 21\cdot 2^x = 21\cdot 3^x \Leftrightarrow 2^x = 3^x \Leftrightarrow \dfrac{2^x}{3^x} = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$

στ) $9^{x+1} = 2\cdot 4^{x+1} - 6\cdot 3^{2x+1} \Leftrightarrow 9\cdot 9^x = 2\cdot 4\cdot\left(2^2\right)^{x+1} - 6\cdot 3\cdot 9^x \Leftrightarrow 9\cdot 9^x = 8\cdot 4^x - 18\cdot 9^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 27\cdot 9^x = 8\cdot 4^x \Leftrightarrow \dfrac{9^x}{4^x} = \dfrac{8}{27} \Leftrightarrow \dfrac{\left(3^2\right)^x}{\left(2^2\right)^x} = \dfrac{2^3}{3^3} \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow \boxed{x = -\dfrac{3}{2}}$

<u>Παράδειγμα 3</u>: Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $5^{3x-7} < 5^{x-1}$ β) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{4x-3} \le \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+12}$ γ) $2^{x-5} > 1$ δ) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x^2-x} \ge \dfrac{1}{25}$

ε) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{4x^2-9} > 1$ στ) $2^{x^2}\cdot 16^x < 1$ ζ) $4^{x-2}\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)^{x+3} \le \dfrac{1}{32}$ η) $2^{2x-1} \ge 8^{x-1}\cdot\sqrt{2}$

Είναι:

α) $5^{3x-7} < 5^{x-1} \Leftrightarrow 3x - 7 < x - 1 \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow \boxed{x < 3}$

β) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{4x-3} \le \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+12} \Leftrightarrow 4x - 3 \ge x + 12 \Leftrightarrow 3x \ge 15 \Leftrightarrow \boxed{x \ge 5}$

γ) $2^{x-5} > 1 \Leftrightarrow 2^{x-5} > 2^0 \Leftrightarrow x - 5 > 0 \Leftrightarrow \boxed{x > 5}$

δ) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x^2-x} \ge \dfrac{1}{25} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{5}\right)^{x^2-x} \ge \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - x \le 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \le 0 \Leftrightarrow \boxed{x \in [-1, 2]}$

ε) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{4x^2-9} > 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^{4x^2-9} > \left(\dfrac{3}{5}\right)^0 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow x^2 < \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow \boxed{x \in \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)}$

Θυμόμαστε:

- Αν $\alpha > 1$ τότε $\alpha^{x_1} > \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$
- Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\alpha^{x_1} > \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$

στ) $2^{x^2}\cdot 16^x<1\Leftrightarrow 2^{x^2}\cdot 2^{4x}<2^0\Leftrightarrow 2^{x^2+4x}<2^0\Leftrightarrow x^2+4x<0\Leftrightarrow \boxed{x\in(-4,0)}$

ζ) $4^{x-2}\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)^{x+3}\le\dfrac{1}{32}\Leftrightarrow 2^{2x-4}\cdot 2^{-3x-9}\le 2^{-5}\Leftrightarrow 2^{-x-13}\le 2^{-5}\Leftrightarrow -x-13\le -5\Leftrightarrow -x\le 8\Leftrightarrow \boxed{x\ge -8}$

η) $2^{2x-1}\ge 8^{x-1}\cdot\sqrt{2}\Leftrightarrow 2^{2x-1}\ge 2^{3x-3}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow 2^{2x-1}\ge 2^{3x-\frac{5}{2}}\Leftrightarrow 2x-1\ge 3x-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow -x\ge -\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow \boxed{x\le\dfrac{3}{2}}$

<u>Παράδειγμα 4</u>: Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $2^{2x}-5\cdot 2^x+4>0$ β) $9^x-2\cdot 3^x-3<0$

γ) $2^x+2^{3-x}\ge 9$ δ) $4^{x+\frac{1}{2}}-3\cdot 10^x-5^{2x+1}<0$

ε) $50^x+10\cdot 2^{x-1}\le\dfrac{3}{5}\cdot 10^{x+1}$ στ) $3^x-6\cdot 3^{-x}<1$

Είναι:

α)

$2^{2x}-5\cdot 2^x+4>0\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2-5\cdot 2^x+4>0$ (1)

Θέτοντας $2^x=\omega$ η (1) γίνεται

$\omega^2-5\omega+4>0\Leftrightarrow(\omega-1)\cdot(\omega-4)>0$

Άρα πρέπει $\omega<1$ ή $\omega>4$ οπότε είναι

$$\begin{cases}2^x<1\\ \text{ή}\\ 2^x>4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^x<2^0\\ \text{ή}\\ 2^x>2^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<0\\ \text{ή}\\ x>2\end{cases}.$$

Τελικά $\boxed{x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)}$

ω	$-\infty$	1		4	$+\infty$
$\omega-4$	$-$		$-$	0	$+$
$\omega-1$	$-$	0	$+$		$+$
$(\omega-1)\cdot(\omega-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

β)

$9^x-2\cdot 3^x-3<0\Leftrightarrow\left(3^x\right)^2-2\cdot 3^x-3<0$ (1)

Θέτοντας $3^x=\omega$ η (1) γίνεται

$\omega^2-2\omega-3<0\Leftrightarrow(\omega+1)\cdot(\omega-3)<0$

Άρα πρέπει $-1<\omega<3$ οπότε είναι

$-1<3^x<3\Leftrightarrow 3^x<3\Leftrightarrow x<1$.

Τελικά $\boxed{x\in(-\infty,1)}$

ω	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$\omega-3$	$-$		$-$	0	$+$
$\omega+1$	$-$	0	$+$		$+$
$(\omega+1)\cdot(\omega-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Θυμόμαστε:
Οι εκθετικές συναρτήσεις είναι πάντα θετικές οπότε ανισώσεις της μορφής $\alpha^x>\beta$ όπου β αρνητικός αριθμός ισχύουν ως ταυτότητες.

γ) 2^x+2 … $\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2+8\ge 9\cdot 2^x\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2-9\cdot 2^x+8\ge 0$ (1)

ω	$-\infty$	1		8	$+\infty$

Θέτοντας $2^x = \omega$ η (1) γίνεται

$\omega^2 - 9\omega + 8 \geq 0 \Leftrightarrow (\omega-1)\cdot(\omega-8) \geq 0$

Άρα πρέπει $\omega \leq 1$ ή $\omega \geq 8$ οπότε είναι

$$\begin{cases} 2^x \leq 1 \\ \text{ή} \\ 2^x \geq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x \leq 2^0 \\ \text{ή} \\ 2^x \geq 2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \text{ή} \\ x \geq 3 \end{cases}.$$

Τελικά $\boxed{x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)}$

$\omega - 8$	$-$		$-$	0	$+$
$\omega - 1$	$-$	0	$+$		$+$
$(\omega-1)\cdot(\omega-8)$	$+$	0	$-$	0	$+$

δ)

$$4^{x+\frac{1}{2}} - 3\cdot 10^x - 5^{2x+1} < 0 \Leftrightarrow \left(2^2\right)^{x+\frac{1}{2}} - 3\cdot 2^x \cdot 5^x - 5\cdot 5^{2x} < 0 \Leftrightarrow 2^{2x+1} - 3\cdot 2^x\cdot 5^x - 5\cdot 5^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot 2^{2x} - 3\cdot 2^x\cdot 5^x - 5\cdot 5^{2x} \overset{5^{2x}>0}{\Leftrightarrow} 2\cdot\left[\left(\frac{2}{5}\right)^x\right]^2 - 3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x - 5 < 0 \quad (1)$$

Θυμόμαστε:
Όταν σε μία εκθετική εξίσωση εμφανίζονται δυνάμεις με διαφορετικές βάσεις διαιρούμε με κάποια δύναμη για να δημιουργήσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση!

Θέτοντας $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \omega$ η (1) γίνεται

$2\omega^2 - 3\omega - 5 < 0 \Leftrightarrow 2(\omega+1)\cdot\left(\omega - \frac{5}{2}\right) < 0$

Άρα πρέπει $-1 < \omega < \frac{5}{2}$ οπότε είναι

$$-1 < \left(\frac{2}{5}\right)^x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x < \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \Leftrightarrow x > -1.$$

Τελικά $\boxed{x \in (-1, +\infty)}$

ω	$-\infty$	-1		$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$\omega - \frac{5}{2}$	$-$		$-$	0	$+$
$\omega + 1$	$-$	0	$+$		$+$
$2(\omega+1)\cdot\left(\omega-\frac{5}{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Θυμόμαστε:
- Όταν σε μία εκθετική ανίσωση η βάση είναι μεγαλύτερη του 1 η φορά της ανίσωσης παραμένει <u>δεν</u> αλλάζει!
- Όταν σε μία εκθετική ανίσωση η βάση είναι μεταξύ του 0 και του 1 η φορά της ανίσωσης αλλάζει!

ε) $50^x+10\cdot 2^{x-1}\le \frac{3}{5}\cdot 10^{x+1}\Leftrightarrow 2^x\cdot 25^x+10\cdot\frac{2^x}{2}\le\frac{3}{5}\cdot 10\cdot 10^x\Leftrightarrow 2^x\cdot 5^{2x}+5\cdot 2^x\le 6\cdot 2^x\cdot 5^x\Leftrightarrow$

$\overset{2^x>0}{\Leftrightarrow} 5^{2x}+5\le 6\cdot 5^x\Leftrightarrow\left(5^x\right)^2-6\cdot 5^x+5\le 0\ \ (1)$

Θέτοντας $5^x=\omega$ η (1) γίνεται

$\omega^2-6\omega+5\le 0\Leftrightarrow(\omega-1)\cdot(\omega-5)\le 0$

Άρα πρέπει $1\le\omega\le 5$ οπότε είναι

$1\le 5^x\le 5\Leftrightarrow 5^0\le 5^x\le 5\Leftrightarrow 0\le x\le 1$.

Τελικά $\boxed{x\in[0,1]}$

ω	$-\infty$	1		5	$+\infty$
$\omega-5$	$-$		$-$	0	$+$
$\omega-1$	$-$	0	$+$		$+$
$(\omega-1)\cdot(\omega-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$

στ) $3^x-6\cdot 3^{-x}<1\Leftrightarrow 3^x-6\cdot\frac{1}{3^x}<1\overset{3^x>0}{\Leftrightarrow}\left(3^x\right)^2-6<3^x\Leftrightarrow\left(3^x\right)^2-3^x-6<0$

Θέτοντας $3^x=\omega$ η (1) γίνεται

$\omega^2-\omega-6<0\Leftrightarrow(\omega-3)\cdot(\omega+2)<0$

Άρα πρέπει $-2<\omega<3$ οπότε είναι

$-2<3^x<3\Leftrightarrow 3^x<3\Leftrightarrow x<1$.

Τελικά $\boxed{x\in(-\infty,1)}$

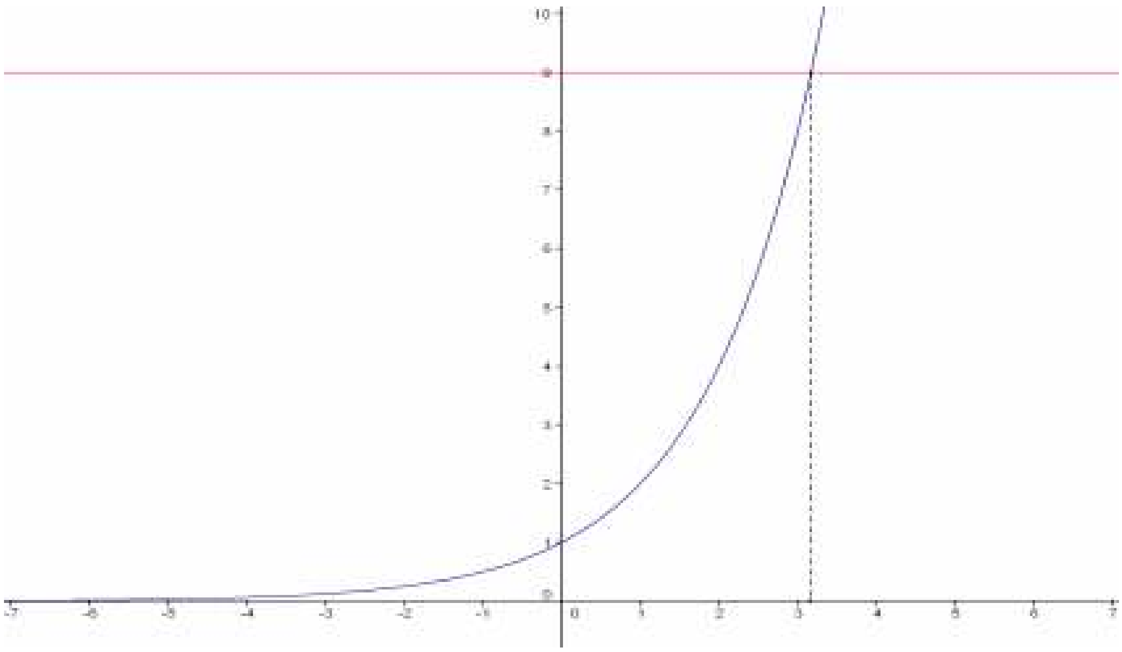
ω	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$\omega-3$	$-$		$-$	0	$+$
$\omega+2$	$-$	0	$+$		$+$
$(\omega-3)\cdot(\omega+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Θυμόμαστε:

- Αν β αρνητικός αριθμός τότε η ανίσωση $\alpha^x\ge\beta$ είναι ταυτότητα.
- Αν β αρνητικός αριθμός τότε η ανίσωση $\alpha^x\le\beta$ είναι αδύνατη.

<u>Η έννοια του λογάριθμου</u>

Όπως είδαμε, όταν επιλύαμε μια εκθετική εξίσωση προσπαθούσαμε να μετατρέψουμε όλους τους όρους σε δυνάμεις με ίδια βάση. Για παράδειγμα όταν θέλαμε να λύσουμε την εξίσωση $2^x = 8$ τότε γράφαμε το 8 ως 2^3 οπότε είχαμε $2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$.
Τι θα γινόταν όμως αν θέλαμε να επιλύσουμε την εξίσωση $2^x = 9$; Παρατηρούμε ότι δεν είναι και τόσο εύκολο να γράψουμε το 9 ως δύναμη με βάση το 2, οπότε είναι εύλογο να αναρωτηθούμε μήπως δεν υπάρχει η λύση αυτής της εξίσωσης.
Ωστόσο από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$ παρατηρούμε ότι υπάρχει η λύση της εξίσωσης και είναι περίπου ίση με $3{,}1$.



Γενικά ισχύει ότι για $\theta > 0$ η λύση της εξίσωση $\alpha^x = \theta$, όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$, υπάρχει και συμβολίζεται με $\log_\alpha \theta$. Το σύμβολο αυτό καλείται λογάριθμος. Είναι δηλαδή:

Για $\theta > 0$ και $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ ισχύει:

$$\boxed{\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha \theta}$$

- <u>Ιδιότητες Λογαρίθμων</u>
  - ❖ $\log_\alpha 1 = 0$

    Πράγματι είναι $\log_\alpha 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = \alpha^0$ που ισχύει!
  - ❖ $\log_\alpha \alpha = 1$

    Είναι $\log_\alpha \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \alpha^1$ που ισχύει!
  - ❖ $\log_\alpha \alpha^x = x$, $x \in \mathbb{R}$

    Αντίστοιχα $\log_\alpha \alpha^x = x \Leftrightarrow \alpha^x = \alpha^x$ που ισχύει!
  - ❖ $\alpha^{\log_\alpha x} = x$, $x > 0$

    Είναι $\alpha^{\log_\alpha x} = x \Leftrightarrow \log_\alpha x = \log_\alpha x$ που ισχύει!

  - ❖ $\log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2 = \log_\alpha x_1 \cdot x_2$, $x_1, x_2 > 0$

Είναι $\log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2 = \log_\alpha x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow \alpha^{\log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2} = \alpha^{\log_\alpha x_1 \cdot x_2} \Leftrightarrow \alpha^{\log_\alpha x_1} \cdot \alpha^{\log_\alpha x_2} = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot x_2$

❖ $\log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2 = \log_\alpha \frac{x_1}{x_2},\ x_1, x_2 > 0$

Είναι $\log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2 = \log_\alpha \frac{x_1}{x_2} \Leftrightarrow \alpha^{\log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2} = \alpha^{\log_\alpha \frac{x_1}{x_2}} \Leftrightarrow \frac{\alpha^{\log_\alpha x_1}}{\alpha^{\log_\alpha x_2}} = \frac{x_1}{x_2} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1}{x_2}$

❖ $x_1 \cdot \log_\alpha x_2 = \log_\alpha x_2^{x_1},\ x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 > 0$

Είναι $x_1 \cdot \log_\alpha x_2 = \log_\alpha x_2^{x_1} \Leftrightarrow \alpha^{x_1 \cdot \log_\alpha x_2} = \alpha^{\log_\alpha x_2^{x_1}} \Leftrightarrow \left(\alpha^{\log_\alpha x_2}\right)^{x_1} = x_2^{x_1} \Leftrightarrow \left(x_2\right)^{x_1} = x_2^{x_1}$

Θυμόμαστε:
- Όταν η βάση σε έναν λογάριθμο είναι το 10 δεν την γράφουμε, δηλαδή $\log_{10} x = \log x$.
- Όταν η βάση σε έναν λογάριθμο είναι το $e \simeq 2,72$ τότε χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\ln x$ δηλαδή $\log_e x = \ln x$

__Σημείωση__: Στο συγκεκριμένο τμήμα περιλαμβάνονται ασκήσεις που περιέχουν ερωτήματα όπως:
- Να αποδειχτεί η δοθείσα σχέση.
- Να βρεθεί η τιμή της παράστασης.

__Παράδειγμα 5__: Να υπολογίσετε τους λογάριθμους:

α) $\log_2 16$ β) $\log_5 25$ γ) $\log_5 \sqrt{5}$ δ) $\log_9 3$ ε) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4}$

στ) $\log_4 \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ ζ) $\log 100$ η) $\log \sqrt{1000}$ θ) $\ln e$ ι) $\ln \frac{1}{e^2}$

ια) $\ln \frac{\sqrt[3]{e^2}}{e}$ ιβ) $\log \sqrt[3]{0,01}$ ιγ) $\log_{\sqrt{27}} \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{27}}$ ιδ) $\log_2 (2+2)$ ιε) $\log_{\sqrt{2}} \frac{\sqrt[3]{2^5}}{2}$

Είναι

α) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4\log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4$

β) $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2\log_5 5 = 2 \cdot 1 = 2$

γ) $\log_5 \sqrt{5} = \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_5 5 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

δ) $\log_9 3 = \log_9 \sqrt{9} = \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_9 9 = \frac{1}{2}$

ε) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4} = \log_{\sqrt{2^3}} \frac{1}{2^2} = \log_{2^{\frac{3}{2}}} 2^{-2} = \log_{2^{\frac{3}{2}}} \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}} =$
$= -\frac{4}{3} \cdot \log_{2^{\frac{3}{2}}} 2^{\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3} \cdot 1 = -\frac{4}{3}$

στ) $\log_4 \frac{\sqrt[3]{4}}{2} = \log_{2^2} \frac{\sqrt[3]{2^2}}{2} = \log_{2^2} \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2} = \log_{2^2} 2^{\frac{2}{3}-1} =$
$= \log_{2^2} 2^{-\frac{1}{3}} = \log_{2^2} \left(2^2\right)^{-\frac{1}{6}} = -\frac{1}{6}$

ζ) $\log 100 = \log 10^2 = 2$

η) $\log \sqrt{1000} = \log \sqrt{10^3} = \log 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

θ) $\ln e = \log_e e = 1$

ι) $\ln \frac{1}{e^2} = \ln e^{-2} = -2$

ια) $\ln \frac{\sqrt[3]{e^2}}{e} = \ln \frac{e^{\frac{2}{3}}}{e} = \ln e^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$

ιβ) $\log \sqrt[3]{0,01} = \log \sqrt[3]{10^{-2}} = \log 10^{\frac{-2}{3}} = -\frac{2}{3}$

ιγ) $\log_{\sqrt{27}} \dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{27}} = \log_{\sqrt{27}} \sqrt[3]{9} - \log_{\sqrt{27}} \sqrt{27} = \log_{3^{\frac{3}{2}}} 3^{\frac{2}{3}} - 1 =$

$= \log_{3^{\frac{3}{2}}} \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{9}} - 1 = \dfrac{4}{9} - 1 = -\dfrac{5}{9}$

ιδ) $\log_2 (2+2) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$

ιε) $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{\sqrt[3]{2^5}}{2} = \log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{2^5} - \log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{5}{3}} - \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}^2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{10}{3}} - 2 = \dfrac{10}{3} - 2 = \dfrac{4}{3}$

Θυμόμαστε:
Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε έναν λογάριθμο προσπαθούμε να γράψουμε το «όρισμα» του λογαρίθμου σε σχέση με την βάση και να εφαρμόσουμε τις ιδιότητες.
Στις παραπάνω περιπτώσεις υπολογίσαμε τους λογάριθμους γιατί αυτό ήταν εφικτό, στην περίπτωση που είχαμε το $\ln 2$ δεν θα μπορούσαμε να το προχωρήσουμε.

<u>Παράδειγμα 6:</u> Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\log_6 2 + \log_6 18$ β) $\log_2 24 - \log_2 3$ γ) $2\log 5 + \log 20 + \log 2$

δ) $\dfrac{1}{2}\log 25 + \dfrac{1}{3}\log 8$ ε) $\dfrac{\log 2 + \log 12 - \log 3}{\log 14 - \log 7}$ στ) $\dfrac{2\log 6 - \frac{1}{2}\log 16}{\log 48 - 4\log 2}$

ζ) $2\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + \ln\left(7 - 4\sqrt{3}\right)$ η) $3\log \sqrt[4]{4\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} + 2\log 5$ θ) $\dfrac{\log_3 81 + \log_8 64 + \log_2 32}{\log_{\frac{1}{2}} 64 + \log_2 \frac{1}{32} + \log_2\left(4\sqrt{2}\right)}$

Είναι

α)

$\log_6 2 + \log_6 18 = \log_6 2 \cdot 18 = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$

β)

$\log_2 24 - \log_2 3 = \log_2 \dfrac{24}{3} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

γ)

$2\log 5 + \log 20 + \log 2 = \log 5^2 + \log 20 + \log 2 = \log 25 \cdot 20 \cdot 2 = \log 1000 = \log 10^3 = 3$

δ)

$\dfrac{1}{2}\log 25 + \dfrac{1}{3}\log 8 = \log 25^{\frac{1}{2}} + \log 8^{\frac{1}{3}} = \log \sqrt{25} + \log \sqrt[3]{8} = \log 5 + \log 2 = \log 5 \cdot 2 = \log 10 = 1$

ε) $\dfrac{\log 2 + \log 12 - \log 3}{\log 14 - \log 7} = \dfrac{\log 2 \cdot 12 - \log 3}{\log \frac{14}{7}} = \dfrac{\log 24 - \log 3}{\log 2} = \dfrac{\log \frac{24}{3}}{\log 2} = \dfrac{\log 8}{\log 2} = \dfrac{\log 2^3}{\log 2} = \dfrac{3\log 2}{\log 2} = 3$

στ)

$$\frac{2\log 6-\frac{1}{2}\log 16}{\log 48-4\log 2}=\frac{\log 6^2-\log 16^{\frac{1}{2}}}{\log 48-\log 2^4}=\frac{\log 36-\log\sqrt{16}}{\log 48-\log 16}=\frac{\log 36-\log 4}{\log\frac{48}{16}}=\frac{\log\frac{36}{4}}{\log 3}=\frac{\log 9}{\log 3}=$$

$$=\frac{\log 3^2}{\log 3}=\frac{2\log 3}{\log 3}=2$$

ζ)

$$2\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+\ln\left(7-4\sqrt{3}\right)=\ln\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\ln\left(7-4\sqrt{3}\right)=\ln\left(7+4\sqrt{3}\right)+\ln\left(7-4\sqrt{3}\right)=$$

$$=\ln\left(7+4\sqrt{3}\right)\cdot\left(7-4\sqrt{3}\right)=\ln\left(7^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2\right)=\ln\left(49-48\right)=\ln 1=0$$

η)

$$3\log\sqrt[4]{4\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}+2\log 5=3\log\left(4\sqrt{2\sqrt[3]{2}}\right)^{\frac{1}{4}}+\log 5^2=\frac{3}{4}\log 4\left(2\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\log 25=$$

$$=\frac{3}{4}\log 4\left(2\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\log 25=\frac{3}{4}\log 4\left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\log 25=\frac{3}{4}\log 2^2\cdot 2^{\frac{2}{3}}+\log 25=$$

$$=\frac{3}{4}\log 2^{\frac{8}{3}}+\log 25=\log\left(2^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}+\log 25=\log 2^2+\log 25=\log 4+\log 25=\log 4\cdot 25=$$

$$=\log 100=\log 10^2=2$$

θ)

$$\frac{\log_3 81+\log_8 64+\log_2 32}{\log_{\frac{1}{2}} 64+\log_2\frac{1}{32}+\log_2\left(4\sqrt{2}\right)}=\frac{\log_3 3^4+\log_8 8^2+\log_2 2^5}{\log_{\frac{1}{2}} 2^6+\log_2\frac{1}{2^5}+\log_2\left(2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)}=\frac{4+2+5}{\log_{\frac{1}{2}} 2^6+\log_2\frac{1}{2^5}+\log_2\left(2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)}=$$

$$=\frac{11}{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}+\log_2 2^{-5}+\log_2 2^{\frac{5}{2}}}=\frac{11}{-6-5+\frac{5}{2}}=\frac{11}{-11+\frac{5}{2}}=\frac{22}{-22+5}=-\frac{22}{17}$$

<u>Παράδειγμα 7:</u> Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\frac{1}{\log_2 5}$, $\frac{1}{\log_4 5}$ και $\frac{1}{\log_8 5}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Για να είναι τρεις αριθμοί, έστω α,β,γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αρκεί να ισχύει $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$, οπότε θα εξετάσουμε αν ισχύει η σχέση $\frac{1}{\log_4 5}=\frac{\frac{1}{\log_2 5}+\frac{1}{\log_8 5}}{2}$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι $\log_{2^\nu} 5=y\Leftrightarrow 5=\left(2^\nu\right)^y\Leftrightarrow 5=2^{\nu\cdot y}\Leftrightarrow \log_2 5=\nu\cdot y\Leftrightarrow\frac{\log_2 5}{\nu}=y$.

Δηλαδή αποδείξαμε ότι $\log_{2^\nu} 5=\frac{\log_2 5}{\nu}$ οπότε είναι:

$$\frac{1}{\log_4 5}=\frac{\frac{1}{\log_2 5}+\frac{1}{\log_8 5}}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{\log_{2^2} 5}=\frac{\frac{1}{\log_2 5}+\frac{1}{\log_{2^3} 5}}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{\frac{\log_2 5}{2}}=\frac{\frac{1}{\log_2 5}+\frac{1}{\frac{\log_2 5}{3}}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{\log_2 5}=\frac{\frac{1}{\log_2 5}+\frac{3}{\log_2 5}}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{\log_2 5}=\frac{\frac{4}{\log_2 5}}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{\log_2 5}=\frac{2}{\log_2 5}$$

Άρα ισχύει!

__Λογαριθμική Συνάρτηση__

Εφόσον ορίστηκε η έννοια του λογαρίθμου το επόμενο βήμα είναι να οριστεί η έννοια της λογαριθμικής συνάρτησης και η μελέτη των ιδιοτήτων της, ειδικότερα:

- Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\log_\alpha x$, $\alpha>0$ και $\alpha\neq 1$ καλείται __λογαριθμική συνάρτηση__ με βάση το α.
  Ιδιαίτερη έμφαση πρέπει να δοθεί στο πεδίο ορισμού μιας λογαριθμικής συνάρτησης που είναι μόνο οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί!

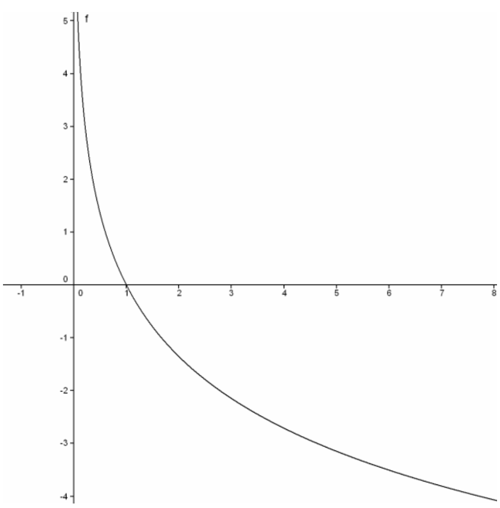
- __Η συνάρτηση__: $f(x)=\log_\alpha x$ με $0<\alpha<1$

Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x)=\log_\alpha x$ όταν $0<\alpha<1$ είναι μία συνάρτηση με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$
- Διέρχεται πάντα από το σημείο $A(1,0)$
- Η γραφικές παραστάσεις των $f(x)=\log_\alpha x$ και των $g(x)=\alpha^x$ είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ ισχύει

$$\boxed{x_1<x_2\Leftrightarrow\log_\alpha x_1>\log_\alpha x_2}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\log_\alpha x$ με $0<\alpha<1$ είναι της μορφής:



- __Η συνάρτηση__: $f(x)=\log_\alpha x$ με $\alpha>1$

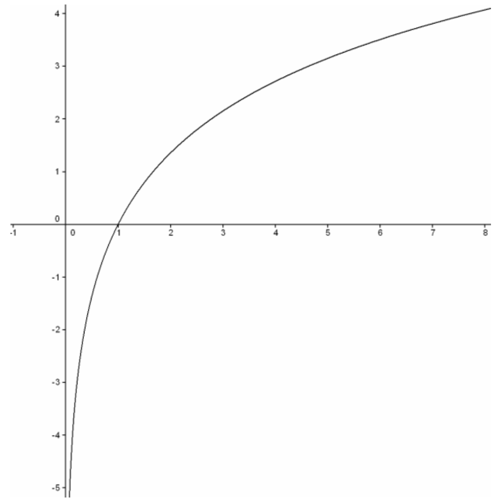
Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x)=\log_\alpha x$ όταν $\alpha>1$ είναι μία συνάρτηση με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$

- Διέρχεται πάντα από το σημείο $A(1,0)$
- Η γραφικές παραστάσεις των $f(x)=\log_\alpha x$ και των $g(x)=\alpha^x$ είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου.
- Είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ ισχύει

$$\boxed{x_1<x_2 \Leftrightarrow \log_\alpha x_1<\log_\alpha x_2}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\log_\alpha x$ με $\alpha>1$ είναι της μορφής:



Σημαντική παρατήρηση: Σε μία λογαριθμική συνάρτηση προκύπτει λόγω της μονοτονίας ότι αν $x_1\neq x_2$ τότε $\log_\alpha x_1\neq\log_\alpha x_2$.
Πρακτικά θα ισχύει: $\boxed{\log_\alpha x_1=\log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2}$

Σημείωση: Όπως φαίνεται από τον ορισμό και τις ιδιότητες του λογαρίθμου, η λογαριθμική και η εκθετική συνάρτηση είναι δύο έννοιες «αντίστροφες». Για αυτό το λόγο στις ασκήσεις πολλές φορές από λογαριθμικές συναρτήσεις μεταβαίνουμε σε εκθετικές ή και το αντίθετο, όπου αυτό είναι απαραίτητο. Όσον αφορά τώρα τις λογαριθμικές συναρτήσεις στη σχολική ύλη περιλαμβάνονται μόνο οι συναρτήσεις $f(x)=\log x$ και $g(x)=\ln x$ οι οποίες είναι της δεύτερης κατηγορίας όπως τις παραθέσαμε παραπάνω διότι οι βάσεις είναι το 10 και το e αντίστοιχα που είναι μεγαλύτερες του 1. Στο τμήμα αυτό περιλαμβάνονται ασκήσεις που περιέχουν ερωτήματα όπως:

- Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- Να λυθεί η εξίσωση- ανίσωση.
- Να βρεθούν οι παράμετροι.
- Να αποδειχθεί η σχέση.

Παράδειγμα 8: Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln\left(3e^x-2\right)$ και $g(x)=\ln\left(e^x+\alpha\right)$. Δίνεται ακόμη ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,\ln 2)$.

Α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

Β) Για $\alpha=1$ να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g.

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < -x$.

Είναι

Α) Εφόσον η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, \ln 2)$ πρέπει $g(0) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(e^0 + \alpha\right) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln(1+\alpha) = \ln 2 \Leftrightarrow 1 + \alpha = 2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$.

Β) Για την f πρέπει $3e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{2}{3} \Leftrightarrow \ln e^x > \ln\frac{2}{3} \Leftrightarrow x > \ln\frac{2}{3}$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι: $x \in \left(\ln\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

Για $\alpha = 1$ είναι $g(x) = \ln\left(e^x + 1\right)$ οπότε πρέπει $e^x + 1 > 0$ που ισχύει!

Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι όλο το $\mathbb{R}$.

Γ) Αρχικά για να ορίζεται η ανίσωση πρέπει $x \in \left(\ln\frac{2}{3}, +\infty\right)$ οπότε με βάση αυτόν τον περιορισμό είναι:

$f(x) < -x \Leftrightarrow \ln\left(3e^x - 2\right) < -x \Leftrightarrow \ln\left(3e^x - 2\right) < \ln e^{-x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3e^x - 2 < e^{-x} \Leftrightarrow 3e^x - 2 < \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow \boxed{3\left(e^x\right)^2 - 2e^x - 1 < 0}$

Θέτοντας $e^x = \omega$ είναι $3\omega^2 - 2\omega - 1 < 0$ οπότε προκύπτει: $3\omega^2 - 2\omega - 1 < 0 \Leftrightarrow 3(\omega - 1)\cdot\left(\omega + \frac{1}{3}\right) < 0$

Θυμόμαστε:
Όταν λύνουμε μία λογαριθμική ανίσωση-εξίσωση στόχος είναι να εμφανίσουμε παντού λογάριθμους. Για αυτό είναι χρήσιμη η ιδιότητα $\boxed{x = \log_\alpha \alpha^x}$

ω	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$\omega - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\omega + \frac{1}{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$2(\omega - 1)\cdot\left(\omega + \frac{1}{3}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα πρέπει $-\frac{1}{3} < \omega < 1$ οπότε είναι:

$-\frac{1}{3} < e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow \boxed{x < 0}$

Λαμβάνοντας υπόψη τον αρχικό περιορισμό παίρνουμε τελικά ότι:

$$\boxed{x \in \left(\ln\frac{2}{3}, 0\right)}$$

Θυμόμαστε:
Επειδή $\ln 1 = 0$ και η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα είναι $\ln\frac{2}{3} < 0$ οπότε έχουν νόημα οι λύσεις που βγάλαμε. Σε διαφορετική περίπτωση η ανίσωση θα ήταν αδύνατη!

<u>Παράδειγμα 9:</u> Δίνεται η συνάρτησ

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνα

Β) Να δείξετε ότι $f(x) = \log\frac{3^{2x} - 3^{x+1}}{3^x + 3}$.

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq \log 9 - \log 2$.

Είναι

Α) Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει $\frac{3^x-3}{1+3^{x-1}}>0 \overset{1+3^{x-1}>0}{\Leftrightarrow} 3^x-3>0 \Leftrightarrow 3^x>3 \Leftrightarrow \boxed{x>1}$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι: $x\in(1,+\infty)$.

Β) Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες του λογαρίθμου είναι:

$$f(x)=(x-1)\log 3+\log\frac{3^x-3}{1+3^{x-1}} \Leftrightarrow f(x)=\log 3^{x-1}+\log\frac{3^x-3}{1+3^{x-1}} \Leftrightarrow f(x)=\log 3^{x-1}\cdot\frac{3^x-3}{1+3^{x-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\log\frac{3^{x-1}\cdot 3^x-3^{x-1}\cdot 3}{1+3^{x-1}} \Leftrightarrow f(x)=\log\frac{3^{2x-1}-3^x}{1+3^{x-1}} \Leftrightarrow f(x)=\log\frac{3\left(3^{2x-1}-3^x\right)}{3\left(1+3^{x-1}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\log\frac{3\cdot 3^{2x-1}-3\cdot 3^x}{3\cdot 1+3\cdot 3^{x-1}} \Leftrightarrow \boxed{f(x)=\log\frac{3^{2x}-3^{x+1}}{3+3^x}}$$

Γ) Αρχικά για να ορίζεται η ανίσωση πρέπει $x\in(1,+\infty)$ οπότε με βάση αυτόν τον περιορισμό είναι:

$$f(x)\le\log 9-\log 2 \Leftrightarrow \log\frac{3^{2x}-3^{x+1}}{3+3^x}\le\log\frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{3^{2x}-3^{x+1}}{3+3^x}\le\frac{9}{2} \overset{3+3^x>0}{\Leftrightarrow} \left(3+3^x\right)\frac{3^{2x}-3^{x+1}}{3+3^x}\le\left(3+3^x\right)\frac{9}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x}-3^{x+1}\le\left(3+3^x\right)\frac{9}{2} \Leftrightarrow 2\cdot 3^{2x}-2\cdot 3^{x+1}\le\left(3+3^x\right)9 \Leftrightarrow 2\cdot 3^{2x}-2\cdot 3\cdot 3^x\le 27+9\cdot 3^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot 3^{2x}-6\cdot 3^x-27-9\cdot 3^x\le 0 \Leftrightarrow \boxed{2\cdot 3^{2x}-15\cdot 3^x-27\le 0}$$

Θέτοντας $3^x=\omega$ είναι $2\omega^2-15\omega-27\le 0$ οπότε προκύπτει:

$$2\omega^2-15\omega-27\le 0 \Leftrightarrow 2\left(\omega+\frac{3}{2}\right)(\omega-9)\le 0$$

ω	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		9		$+\infty$
$\omega-9$		$-$		$-$	0	$+$	
$\omega+\frac{3}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$2\left(\omega+\frac{3}{2}\right)(\omega-9)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα πρέπει $-\frac{3}{2}\le\omega\le 9$ οπότε

$-\frac{3}{2}\le 3^x\le 9 \Leftrightarrow 3^x\le 9 \Leftrightarrow 3^x\le 3^2 \Leftrightarrow \boxed{x\le 2}$

Λαμβάνοντας όμως υπόψη και τον αρχικό περιορισμό έχουμε τελικά:

$\boxed{x\in(1,2]}$

<u>Παράδειγμα 10:</u> Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x$.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.

Β) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln\left(e^{2x}-1\right)-\ln\left(e^x-1\right)^2>f(2)$

Γ) Αφού δείξετε ότι $x^{\ln 5}=5^{\ln x}$ για $x>0$ να λύσετε την εξίσωση $5^{\ln x^2}-6\cdot x^{\ln 5}+5=f(1)$ για $x>0$.

Είναι

Α) Προφανώς πρέπει $x>0$ οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι: $x\in(0,+\infty)$.

Β) Αρχικά για να ορίζετε η ανίσωση πρέπει:

$$\begin{cases} e^{2x}-1>0 \\ \left(e^x-1\right)^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{2x}>1 \\ \left(e^x-1\right)^2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{2x}>e^0 \\ e^x-1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x>0 \\ e^x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x>0}$$

Είναι οπότε:

$$\ln\left(e^{2x}-1\right)-\ln\left(e^x-1\right)^2>f(2)\Leftrightarrow \ln\frac{\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^x-1\right)^2}>\ln 2\Leftrightarrow \frac{\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^x-1\right)^2}>2 \overset{\left(e^x-1\right)^2>0}{\Leftrightarrow} \left(e^x-1\right)^2\frac{\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^x-1\right)^2}>\left(e^x-1\right)^2 2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}-1>2\left(e^{2x}-2e^x+1\right)\Leftrightarrow e^{2x}-1>2e^{2x}-4e^x+2\Leftrightarrow \boxed{-\left(e^x\right)^2+4e^x-3>0}$$

Θέτοντας $e^x=\omega$ είναι $-\omega^2+4\omega-3>0$ οπότε προκύπτει:

$-\omega^2+4\omega-3>0\Leftrightarrow -(\omega-1)(\omega-3)>0$

ω	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$\omega-3$	$-$		$-$	0	$+$
$\omega-1$	$-$	0	$+$		$+$
$-(\omega-1)(\omega-3)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Άρα πρέπει $1<\omega<3$ οπότε

$1<e^x<3\Leftrightarrow \ln 1<\ln e^x<\ln 3\Leftrightarrow \boxed{0<x<\ln 3}$

Τελικά η λύση της ανίσωσης είναι

$$\boxed{x\in(0,\ln 3)}$$

Γ) Είναι $x^{\ln 5}=5^{\ln x}\Leftrightarrow \ln x^{\ln 5}=\ln 5^{\ln x}\Leftrightarrow \ln 5\cdot\ln x=\ln x\cdot \ln 5$ που ισχύει!

Όσον αφορά την εξίσωση για να είναι καλά ορισμένη πρέπει $x>0$ που δίνεται. Οπότε:

$$5^{\ln x^2}-6\cdot x^{\ln 5}+5=f(1)\overset{x^{\ln 5}=5^{\ln x}}{\Leftrightarrow} 5^{\ln x^2}-6\cdot 5^{\ln x}+5=\ln 1\Leftrightarrow 5^{2\ln x}-6\cdot 5^{\ln x}+5=0\Leftrightarrow \boxed{\left(5^{\ln x}\right)^2-6\cdot 5^{\ln x}+5=0}$$

Θέτοντας $5^{\ln x}=\omega$ είναι $\omega^2-6\omega+5=0$ απ' όπου προκύπτει $\omega=1$ ή $\omega=5$.

Αν $\omega=1$ τότε $5^{\ln x}=1\Leftrightarrow 5^{\ln x}=5^0\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow \boxed{x=1}$

Αν $\omega=5$ τότε $5^{\ln x}=5\Leftrightarrow 5^{\ln x}=5^1\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow \boxed{x=e}$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $\boxed{\begin{cases} x=1 \\ x=e \end{cases}}$ και είναι και οι δύο δεκτές εφόσον είναι μεγαλύτερες του μηδενός.

<u>Παράδειγμα 11:</u> Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\left(3-10^x\right)$.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Β) Αν οι αριθμοί $2x$, $f(x)$ και $\log 4$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να βρείτε την τιμή του x.

Γ) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Είναι

Α) Όσον αφορά το πεδίο ορισμού της f πρέπει:

$$3-10^x>0 \Leftrightarrow 3>10^x \Leftrightarrow \log 3>\log 10^x \Leftrightarrow \log 3>x \Leftrightarrow \boxed{x<\log 3}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $\boxed{x\in(-\infty,\log 3)}$

Β) Για να είναι οι αριθμοί αυτοί διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου πρέπει:

$$f(x)=\frac{2x+\log 4}{2} \Leftrightarrow \log\left(3-10^x\right)=\frac{2x+\log 4}{2} \Leftrightarrow 2\log\left(3-10^x\right)=2x+\log 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log\left(3-10^x\right)^2=\log 10^{2x}+\log 4 \Leftrightarrow \log\left(3-10^x\right)^2=\log 4\cdot 10^{2x} \Leftrightarrow \left(3-10^x\right)^2=4\cdot 10^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9-6\cdot 10^x+10^{2x}=4\cdot 10^{2x} \Leftrightarrow 3\cdot 10^{2x}+6\cdot 10^x-9=0 \Leftrightarrow \boxed{\left(10^x\right)^2+2\cdot 10^x-3=0}$$

Θέτοντας $10^x=\omega$ προκύπτει $\omega^2+2\omega-3=0$ απ' όπου παίρνουμε $\omega=1$ ή $\omega=-3$.

Αν $\omega=1$ τότε $10^x=1 \Leftrightarrow 10^x=10^0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$

Αν $\omega=-3$ τότε $10^x=-3$ που είναι αδύνατη!

Λαμβάνοντας υπόψη ότι για να είναι καλά ορισμένη η παραπάνω εξίσωση πρέπει $x\in(-\infty,\log 3)$ η λύση που βγάλαμε είναι δεκτή εφόσον ανήκει σε αυτό το διάστημα.

Γ) Για να βρίσκεται η γραφική παράσταση της f πάνω από τον $x'x$ πρέπει $f(x)>0$.

Λύνουμε αυτή την ανίσωση με τον περιορισμό $x\in(-\infty,\log 3)$ οπότε προκύπτει:

$$f(x)>0 \Leftrightarrow \log\left(3-10^x\right)>0 \Leftrightarrow \log\left(3-10^x\right)>\log 1 \Leftrightarrow 3-10^x>1 \Leftrightarrow 10^x<2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log 10^x<\log 2 \Leftrightarrow \boxed{x<\log 2}$$

Εφόσον $\log 2<\log 3$ δεχόμαστε όλες τις λύσεις που βρήκαμε. Επομένως η γραφική της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον $x'x$ στο διάστημα $\boxed{(-\infty,\log 2)}$.

Πίνακες Τριγωνομετρικών Αριθμών

- Πίνακας βασικών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$	$\varepsilon\varphi x = \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$	$\sigma\varphi x = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$
$\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1$	$\sigma\upsilon\nu^2 x = \dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$	$\eta\mu^2 x = \dfrac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$

- Πίνακας τριγωνομετρικών ταυτοτήτων για αντίθετες γωνίες

$\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$
$\varepsilon\varphi(-x) = -\varepsilon\varphi x$	$\sigma\varphi(-x) = -\sigma\varphi x$

- Πίνακας τριγωνομετρικών ταυτοτήτων για παραπληρωματικές γωνίες

$\sigma\upsilon\nu(180^0 - x) = -\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu(180^0 - x) = \eta\mu x$
$\varepsilon\varphi(180^0 - x) = -\varepsilon\varphi x$	$\sigma\varphi(180^0 - x) = -\sigma\varphi x$

- Πίνακας τριγωνομετρικών ταυτοτήτων για γωνίες που διαφέρουν 180^o

$\sigma\upsilon\nu(180^0 + x) = -\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu(180^0 + x) = -\eta\mu x$
$\varepsilon\varphi(180^0 + x) = \varepsilon\varphi x$	$\sigma\varphi(180^0 + x) = \sigma\varphi x$

- <u>Πίνακας τριγωνομετρικών ταυτοτήτων για συμπληρωματικές γωνίες</u>

$\sigma\upsilon\nu(90^0 - x) = \eta\mu x$	$\eta\mu(90^0 - x) = \sigma\upsilon\nu x$
$\varepsilon\varphi(90^0 - x) = \sigma\varphi x$	$\sigma\varphi(90^0 - x) = \varepsilon\varphi x$

- <u>Πίνακας μετατροπής μοιρών σε ακτίνια(rad)</u>

Με τον όρο ακτίνιο εννοούμε το τόξο ενός κύκλου που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του. Ως γνωστόν το μήκος ενός κύκλου με ακτίνα r είναι ίσο με 2πr, άρα ένας κύκλος αποτελείται συνολικά από 2π ακτίνια. Τελικά για να βρούμε πόσα ακτίνια είναι μια γωνία μ^0 αρκεί να βρούμε πόσα ακτίνια είναι το αντίστοιχο τόξο στο οποίο αντιστοιχεί η γωνία. Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η σχέση μετατροπής μιας γωνίας σε ακτίνια και εφαρμόζεται για τις πιο βασικές γωνίες.

$\frac{\mu^o}{360^0} = \frac{\alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\iota\alpha}{2\pi}$	$360^o \to 2\pi$	$270^o \to \frac{3\pi}{2}$
$180^o \to \pi$	$90^o \to \frac{\pi}{2}$	$45^o \to \frac{\pi}{4}$

- <u>Πίνακας προσήμων τριγωνομετρικών αριθμών</u>

τεταρτημόριο	1ο	2ο	3ο	4ο
ημx	+	+	-	-
συνx	+	-	-	+
εφx	+	-	+	-
σφx	+	-	+	-

- <u>Πίνακας βασικών τριγονομετρικών αριθμών</u>

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί Αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	ημx	συνx	εφx	σφx
0^o	0	0	1	0	δεν ορίζεται
30^o	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^o	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^o	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^o	$\frac{\pi}{2}$	1	0	δεν ορίζεται	0

- <u>Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος γωνιών</u>

$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$	$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$
$\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$
$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$	$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$
$\sigma\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}$	$\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}$

- <u>Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας 2α</u>

$\eta\mu 2\alpha = 2\cdot\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\eta\mu^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$	$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
$\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{2\cdot\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$	$\varepsilon\varphi^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$