ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝ/ΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Περιέχει: Όλη την ύλη της Γ΄ Λυκείου, σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα του Υπουργείου Παιδείας σε **(20)** **ΒΙΒΛΙΟμαθήματα** που το καθένα περιέχει:

Α. Απαραίτητες γνώσεις θεωρίας

Β. Λυμένα παραδείγματα

Γ. Λυμένες ασκήσεις

Δ. Προτεινόμενα θέματα

Ε. Το ξεχωριστό θέμα

Θέματα που κινούν τη σκέψη και βοηθούν στο σωστό τρόπο μάθησης.

Κεφάλαιο 1°

Μιγαδικοί αριθμοί

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο αυτό θα πρέπει να είναι σε θέση:

- Να γνωρίζει:
  α. την έννοια του μιγαδικού αριθμού και
  β. πότε δύο μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι.

- Να μπορεί να βρίσκει:
  α. το άθροισμα, το γινόμενο, τη διαφορά και το πηλίκο μιγαδικών αριθμών
  β. το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού και να λύνει προβλήματα σε συνδιασμό με τις κωνικές τομές.

- Να γνωρίζει:
  α. την έννοια του συζυγούς ενός μιγαδικού αριθμού
  β. τις ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών αριθμών.

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ: Τύποι - Βασικές έννοιες

Πράξεις στο σύνολο των μιγαδικών

1. Πρόσθεση: $z_1 + z_2 = (\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i) = (\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$

2. Πολλαπλασιασμός: $z_1 z_2 = (\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i) = \alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+\beta\delta i^2 =$

$$= \alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i-\beta\delta = (\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$$

3. Διαίρεση: Η διαίρεση εκτελείται με τη βοήθεια του συζυγούς του μιγαδικού του παρονομαστή.

Έστω $z_1 = \alpha+\beta i$, $z_2 = \gamma+\delta i \neq 0$.

Τότε: $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i} = \frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)} = \ldots = \frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$$

Δύναμη μιγαδικού αριθμού

Όμοια όπως στο R ορίζουμε για τον μιγαδικό $z = \alpha+\beta i$:

i. $z^1 = z$ **ii.** $z^0 = 1$, $z \neq 0$

iii. $z^{-\nu} = \dfrac{1}{z^{\nu}}$, $\nu \in N^*$, $z \neq 0$ **iv.** $z^{\nu} = z^{\nu-1}\cdot z$, $\nu \in N$, $\nu > 1$

v. $$i^{\nu} = i^{\upsilon} = \begin{cases} 1, & \text{αν } \upsilon = 0 \\ i, & \text{αν } \upsilon = 1 \\ -1, & \text{αν } \upsilon = 2 \\ -i, & \text{αν } \upsilon = 3 \end{cases}$$

Ιδιότητες συζυγών

I. Για τους συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $z = \alpha+\beta i$ και $\overline{z} = \alpha-\beta i$ ισχύουν:

i. $z\overline{z} = \alpha^2+\beta^2$ **ii.** $z+\overline{z} = 2\alpha = 2\,\mathrm{Re}(z)$ **iii.** $z-\overline{z} = 2\beta i = 2(\mathrm{Im}(z))i$

II. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \alpha+\beta i$. Τότε:

i. Ο αριθμός z είναι πραγματικός αν και μόνο αν $\overline{z} = z$

ii. Ο αριθμός z είναι φανταστικός αν και μόνο αν $\overline{z} = -z$

III. Για τους μιγαδικούς z, z_1, z_2 ισχύουν

i. $\overline{\overline{z}} = z$

ii. $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$ και γενικότερα $\overline{z_1+z_2+\ldots+z_{\nu}} = \overline{z_1}+\overline{z_2}+\ldots+\overline{z_{\nu}}$

iii. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ και γενικότερα $\overline{z_1 \cdot z_2 ... z_\nu} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} ... \overline{z_\nu}$ για κάθε $\nu \in N^*$.

iv. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $\quad (z_2 \neq 0)$ $\quad$ **v.** $\overline{(z^\nu)} = (\overline{z})^\nu$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

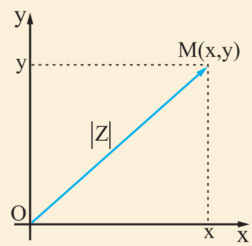
Επίλυση της εξίσωσης $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ (1) στο C με $\alpha, \beta, \gamma \in R$, και $\alpha \neq 0$

Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ (διακρίνουσα της (1))

- Αν $\Delta > 0$ η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες: $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν $\Delta = 0$ η (1) έχει μία διπλή πραγματική ρίζα: $z = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$
- Αν $\Delta < 0$ (1) έχει δύο ρίζες μιγαδικούς συζυγείς: $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$

Ισχύουν οι τύποι Vieta, δηλαδή $z_1 + z_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $z_1 z_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

Μέτρο μιγαδικού αριθμού



Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ και M(z) η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο. Ονομάζουμε μέτρο του μιγαδικού z την απόσταση του M(z) από την αρχή O(0,0) των αξόνων και συμβολίζουμε:

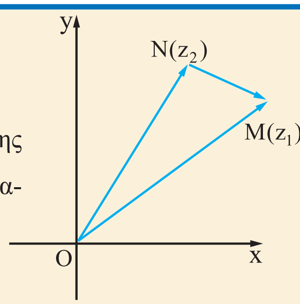
$$|z| = (OM) = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ιδιότητες του μέτρου

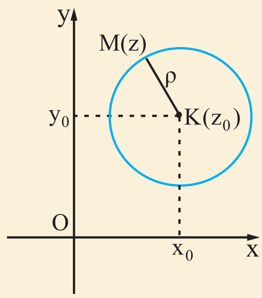
- Έστω $z = x + yi$ τότε $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Για κάθε μιγαδικό $z = x + yi$ ισχύει $|z^2| = |z|^2 = z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$
- Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί τότε: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ και γενικότερα

  $|z_1 \cdot z_2 ... z_\nu| = |z_1| \cdot |z_2| ... |z_\nu|$ και $|z^\nu| = |z|^\nu$ $\quad \nu \in N^*$
- Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί με $z_2 \neq 0$ τότε $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$,
- Αν $z_1, z_2 \in C$ τότε $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (τριγωνική ανισότητα)

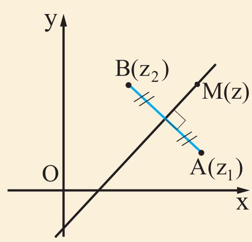
- Για τις εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, ισχύει ακόμα $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{NM}$ ή $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \left|z_1 - z_2\right|$ δηλαδή το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με τήν απόσταση των εικόνων τους.

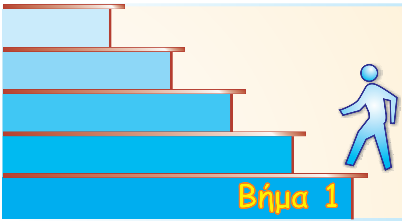


- Έστω ο μιγαδικός $z_0 = x_0 + y_0 i$ και ένας θετικός πραγματικός ρ. Η εξίσωση $\left|z - z_0\right| = \rho$ είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο την εικόνα $K\left(x_0, y_0\right)$ του z_0 και ακτίνα ρ.



- Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2. Η εξίσωση $\left|z - z_1\right| = \left|z - z_2\right|$ είναι εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος με άκρα τα $A\left(z_1\right)$ και $B\left(z_2\right)$.





Μαθαίνουμε τις αποδείξεις

ΘΕΩΡΙΑ 1 **Αποδείξτε ότι η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.**

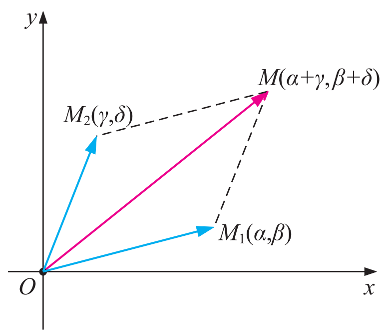
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα

$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο $M(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$.

Επομένως, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$.



ΘΕΩΡΙΑ 2 **Αποδείξτε ότι η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

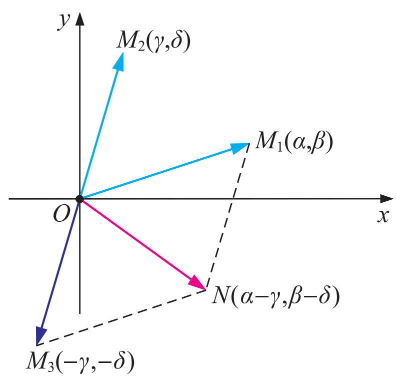
Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε η διαφορά

$$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο

$N(\alpha-\gamma,\beta-\delta)$.

Επομένως, $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$



ΘΕΩΡΙΑ 3 **Πως εκφράζεται το πηλίκο $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, όπου $\gamma+\delta i\neq 0$, στη μορφή μιγαδικού αριθμού;**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για να εκφράσουμε το πηλίκο $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, όπου $\gamma+\delta i\neq 0$, στη μορφή $\kappa+\lambda i$, πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με τον συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i.$$

Δηλαδή,

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i.$$

ΘΕΩΡΙΑ 4 **Πως υπολογίζουμε τη δύναμη i^ν, με ν φυσικό;**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για να υπολογίσουμε συγκεκριμένη δύναμη του i, γράφουμε τον εκθέτη ν στη μορφή $\nu=4\rho+\upsilon$, όπου ρ είναι το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4, οπότε έχουμε:

$$i^\nu=i^{4\rho+\upsilon}=i^{4\rho}i^\upsilon=(i^4)^\rho i^\upsilon=1^\rho i^\upsilon=i^\upsilon=\begin{cases}1 & , \text{ αν } \upsilon=0\\ i & , \text{ αν } \upsilon=1\\ -1 & , \text{ αν } \upsilon=2\\ -i & , \text{ αν } \upsilon=3\end{cases}$$

.

ΘΕΩΡΙΑ 5 **Αποδείξτε ότι $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, όπου z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$ έχουμε:

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)}=\overline{(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i}$$
$$=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)i=(\alpha-\beta i)+(\gamma-\delta i)=\overline{z_1}+\overline{z_2}\,.$$

ΘΕΩΡΙΑ 6 Να βρείτε τον τύπο που δίνει τις λύσεις της *εξίσωσης* $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με α,β,γ πραγματικούς *και* $\alpha\neq 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Κάθε εξίσωση δεύτερου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει πάντα λύση στο σύνολο **C**. Πράγματι, έστω η εξίσωση

$$\alpha z^2+\beta z+\gamma=0,\quad \text{με με } \alpha,\beta,\gamma \text{ πραγματικούς και } \alpha\neq 0.$$

Τη μετασχηματίζουμε, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή:

$$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2},$$

όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης. Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\Delta>0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις: $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν $\Delta=0$. Τότε έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$
- Αν $\Delta<0$. Τότε, επειδή $\dfrac{\Delta}{4\alpha^2}=\dfrac{(-1)(-\Delta)}{4\alpha^2}=\dfrac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{(2\alpha)^2}=\left(\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$, η εξίσωση γράφεται:

  $$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2\Leftrightarrow z+\frac{\beta}{2\alpha}=\pm\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\Leftrightarrow z=-\frac{\beta}{2\alpha}\pm\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}.$$

  Άρα οι λύσεις της είναι:

  $$z_{1,2}=\frac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$$

ΘΕΩΡΙΑ 7 **Αποδείξτε ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, όπου z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$

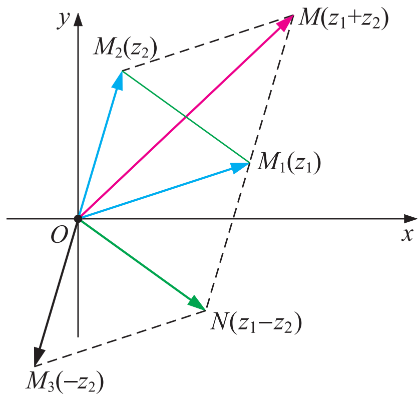
$$\Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$
$$\Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$

και, επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

ΘΕΩΡΙΑ 8 **Αποδείξτε ότι $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, όπου z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί και ότι το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

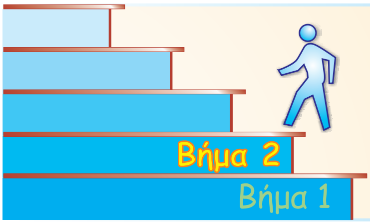
Από την τριγωνική ανισότητα και από τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος $z_1 + z_2$ και της διαφοράς $z_1 - z_2$ δύο μιγαδικών σύμφωνα με το διπλανό σχήμα προκύπτει ότι:



$\big||OM_1| - |M_1M|\big| \leq |OM| \leq |OM_1| + |M_1M|$ δηλαδή

$$\boxed{\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|}$$

Επίσης, είναι φανερό ότι το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{ON}$ είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{M_2M_1}$ (αφού το ONM_1M_2 είναι παραλληλόγραμμο). Δηλαδή: $\boxed{(M_1M_2) = |z_1 - z_2|}$



Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις “κλειδιά”

Α. Από το σχολικό βιβλίο

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

§ 2.1 Η έννοια του μιγαδικού αριθμού.

§ 2.2 Πράξεις στο C.

- Πράξεις	σελ. 95, άσκηση 6	
-Ισότητα μιγαδικών	σελ. 95, άσκηση 7	
-Εξισώσεις 1ου βαθμού στο C	σελ. 96, άσκηση 12	
-Εξισώσεις που περιέχουν $\overline{Z}$	σελ. 124, άσκηση 7	(γενικές)
-Δυνάμεις του i	σελ. 93, εφαρμογή 1	
	σελ. 96, άσκηση 3,4	(Β΄ ομάδα)
	σελ. 93, εφαρμογή 2	
	σελ. 96-97, άσκηση 1, 6, 8	(Β΄ ομ.)
	σελ. 101-102, άσκηση 2, 3, 4	(Β΄ ομ.)
-Εξισώσεις 2ου Βαθμού	σελ. 96, άσκηση 13, 14	
-Γεωμετρικοί τόποι	σελ. 97, άσκηση 9	
	σελ. 123, άσκηση 1, 3	(Γενικές)
§ 2.3 Μέτρο Μιγάδικου		
-Εύρεση μέτρου	σελ. 99, εφαρμογή 1	
	σελ. 100, άσκηση 1	
-Αποδεικτικές ασκήσεις	σελ. 101, άσκηση 9	
-Εξισώσεις με μέτρα	σελ. 101, άσκηση 3	(Α΄ ομάδα)
-Ανισοτικές ασκήσεις	σελ. 101, άσκηση 1	(Β΄ ομάδα)
-Γεωμετρική ερμηνεία	σελ. 99-100, εφαρμογή 1	

$\|Z_1 - Z_2\|$	σελ. 101, άσκηση 4,5,6,7,8 (Α΄ ομάδα)
και γεωμετρικοί τόποι	σελ. 102, άσκηση 5, 6, 7, 8, 9
	σελ. 123, άσκηση 4
-Συνδιαστικές με ανάλυση	
-Ερωτήσεις κατανόησης	σελ. 124-125, άσκηση 1, 2, 3

Β. Από τα Βιλιομαθήματα

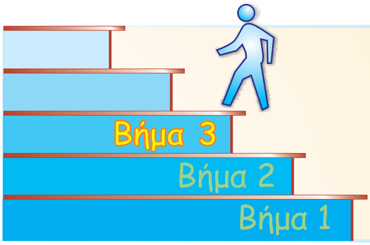
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
εκδόσεις "ΟΡΟΣΗΜΟ"

Βιβλιομάθημα 1ο

Λυμένες ασκήσεις : 3, 7, 8
Προτεινόμενες ασκήσεις : 3, 7, 11, 13

Βιβλιομάθημα 2ο

Λυμένες ασκήσεις : 2, 4, 7, 8
Προτεινόμενες ασκήσεις : 4, 7, 8, 10



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει η σχέση: $|z-1| = 1+\mathrm{Re}(z)$ (1) και η συνάρτηση f με $f(z) = z^2 - z$.

α. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η παραβολή με εξίσωση: $y^2 = 4x$.

β. Να βρείτε τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν την σχέση (1) και για τους οποίους ισχύει: $f(z) = -4+2i$.

γ. Να βρείτε τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν την σχέση (1) και για τους οποίους ισχύει: $|f(z)| = 3|\bar{z}|$.

Λύση

α. Έστω z = x + yi, με x και y πραγματικούς. Τότε:

$$|z-1| = 1+\mathrm{Re}(z) \Leftrightarrow |x+yi-1| = 1+x \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 1+x \quad (1)$$

Πρέπει $1+x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Τότε η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = (1+x)^2 \Leftrightarrow y^2 = 4x$$

που είναι εξίσωση παραβολής.

β. $f(z) = -4+2i \Leftrightarrow z^2 - z = -4+2i \Leftrightarrow (x+yi)^2 - (x+yi) = -4+2i \Leftrightarrow$

$$(x^2-y^2-x) + y(2x-1)i = -4+2i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x=-4 \left(\text{διότι } y^2=4x\right) \\ y(2x-1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-5x+4=0 \\ y(2x-1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ή } x=4 \\ y(2x-1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=4 \\ y=2/7 \end{cases}$$

Άρα υπάρχουν δύο μιγαδικοί οι : $z_1 = 1+2i$ και $z_2 = 4+\frac{2}{7}i$.

Από τους οποίους μόνο ο z_1 ανήκει στην παραβολή $y^2 = 4x$

γ. $f(z)=3|\bar{z}| \Leftrightarrow |z^2-z|=3|z| \Leftrightarrow |z||z-1|=3|z| \Leftrightarrow |z|(|z-1|-3)=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}|z|=0\\ \text{ή}\\ |z-1|=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=0\\ \text{ή}\\ 1+\mathrm{Re}(z)=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=0\\ \text{ή}\\ \mathrm{Re}(z)=2 \Leftrightarrow x=2\end{cases}$$

Ο μιγαδικός $z=0$ ανήκει στην παραβολή $y^2=4x$.

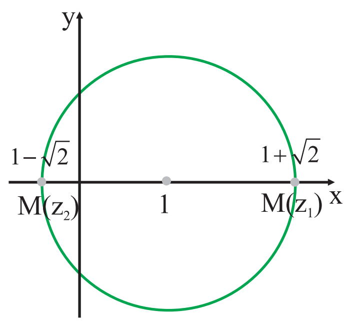
$\mathrm{Re}(z)=2 \Leftrightarrow x=2$, όμως $y^2=4\cdot 2 \Leftrightarrow y=\pm 2\sqrt{2}$, άρα οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι οι $z=0$, $z_1=2+2\sqrt{2}i$ και $z_2=2-2\sqrt{2}i$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{z+1}{z}$, **όπου** $z=x+yi$ **με x ,y πραγματικούς και** $z\neq 0$.

α. Να γραφεί ο μιγαδικός f(z) στη μορφή α + βi.

β. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία:

f(z) πραγματικός $\Leftrightarrow$ z πραγματικός



γ. Αν ισχύει $f(z)f(\bar{z})=2$, **να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος κέντρου K(1,0) και ακτίνας** $R=\sqrt{2}$.

δ. Για τους μιγαδικούς του προηγούμενου ερωτήματος να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του μέτρου $|f(z)-1|$.

Λύση

α. Εχουμε: $f(z)=\dfrac{z+1}{z}=\dfrac{x+yi+1}{x+yi}=\dfrac{[(x+1)+yi](x-yi)}{x^2+y^2}=\dfrac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}+\dfrac{-y}{x^2+y^2}i$

β. Είναι: $f(z)\in R \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f(z))=0 \Leftrightarrow \dfrac{-y}{x^2+y^2}=0 \Leftrightarrow -y=0 \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow z\in R$

γ. $f(z)f(\bar{z})=2 \Leftrightarrow \dfrac{z+1}{z}\cdot\dfrac{\bar{z}+1}{\bar{z}}=2 \Leftrightarrow \dfrac{(z+1)(\bar{z}+1)}{z\bar{z}}=2 \Leftrightarrow \dfrac{z\bar{z}+z+\bar{z}+1}{z\bar{z}}=2 \Leftrightarrow$

$\dfrac{x^2+y^2+2x+1}{x^2+y^2}=2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-1=0$, που παριστάνει κύκλο με κέντρο (1,0) και ακτίνα $R=\sqrt{2}$.

δ. $|f(z)-1|=\left|\dfrac{z+1}{z}-1\right|=\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$

Όμως η εικόνα του z κινείται σε κύκλο με κέντρο (1,0) και ακτίνα $R=\sqrt{2}$. Άρα

$$\max\{|z|\}=|1+R|=\left|1+\sqrt{2}\right| \text{ και } \min\{|z|\}=|1-R|=\left|1-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-1$$

Έτσι:

$$\max\{|f(z)-1|\}=\frac{1}{\min\{|z|\}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1} \text{ και } \min\{|f(z)-1|\}=\frac{1}{\max\{|z|\}}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

3. Δίνεται ο μιγαδικός $z\neq 0$ και η συνάρτηση $f:N^*\to C$ με $f(\nu)=(i^\nu-1)z$.

α. Να δείξετε ότι για κάθε $\nu\in N^*$ ισχύει: $f(\nu)\cdot f(\nu+1)\cdot f(\nu+2)\cdot f(\nu+3)=0$.

β. Αν ισχύει $f(3)=-1-3i$, να δείξετε ότι: $z=2+i$.

γ. Για τον μιγαδικό z του προηγούμενου ερωτήματος να υπολογίσετε το μέτρο του μιγαδικού $w=f(\nu+1)-f(\nu)$, για κάθε $\nu\in N^*$.

Λύση:

α. • Αν $\nu=4\kappa,\ \kappa\in N^*$ τότε $f(\nu)=(i^{4\kappa}-1)z=0$

• Αν $\nu=4\kappa+1,\ \kappa\in N^*$ τότε $f(\nu+3)=(i^{4\kappa+4}-1)z=0$

• Αν $\nu=4\kappa+2,\ \kappa\in N^*$ τότε $f(\nu+2)=(i^{4\kappa+4}-1)z=0$

• Αν $\nu=4\kappa+3,\ \kappa\in N^*$ τότε $f(\nu+1)=(i^{4\kappa+4}-1)z=0$

Άρα για κάθε $\nu\in N^*$, $f(\nu)\cdot f(\nu+1)\cdot f(\nu+2)\cdot f(\nu+3)=0$.

β. $f(3)=-1-3i \Leftrightarrow (i^3-1)z=-1-3i \Leftrightarrow (-1-i)z=-1-3i \Leftrightarrow$

$$z=\frac{-1-3i}{-1-i}\Leftrightarrow z=\frac{(-1-3i)(-1+i)}{(-1)^2+(-1)^2}\Leftrightarrow z=\frac{4+2i}{2}\Leftrightarrow z=2+i$$

γ. $w=f(\nu+1)-f(\nu)=(1^{\nu+1}-1)z-(i^\nu-1)z=$

$=(i^{\nu+1}-1-i^\nu+1)z=i^\nu(i-1)z$

Έτσι: $|w|=|i^\nu(i-1)z|=|i^\nu|\cdot|-1+i|\cdot|z|=|i|^\nu\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2}\sqrt{2^2+1^2}=1^\nu\sqrt{2}\sqrt{5}=\sqrt{10}$

4. Δίνονται οι μιγαδικοί z, w και $u=z\cdot w$.

α. Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός z είναι φανταστικός αν και μόνο αν ισχύει $z=-\overline{z}$.

β. Αν για τους z και w ισχύει: $|z+\overline{w}|=|\overline{z}-w|$, να δείξετε ότι ο αριθμός $u=z\cdot w$ είναι φανταστικός.

γ. Αν επιπλέον ισχύει ότι $w=2+i$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

Λύση:

α. Αν $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in R$ τότε:

$$z=-\overline{z}\Leftrightarrow \alpha+\beta i=-(\alpha-\beta i)\Leftrightarrow \alpha+\beta i=-\alpha+\beta i\Leftrightarrow$$

$$2\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=0\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0\Leftrightarrow z \text{ είναι φανταστικός}$$

β. $|z+\overline{w}|=|\overline{z}-w|$ υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε:

$$|z+\overline{w}|^2=|\overline{z}-w|^2\Leftrightarrow (z+\overline{w})(\overline{z+\overline{w}})=(\overline{z}-w)(\overline{\overline{z}-w})\Leftrightarrow$$

$$(z+\overline{w})(\overline{z}+w)=(\overline{z}-w)(z-\overline{w})\Leftrightarrow z\overline{z}+zw+\overline{z}\overline{w}+w\overline{w}=z\overline{z}-zw-\overline{z}\overline{w}+w\overline{w}\Leftrightarrow$$

$$2zw=-2\overline{z}\overline{w}\Leftrightarrow zw=-\overline{zw}\Leftrightarrow u=-\overline{u}$$ που σημαίνει ότι ο z είναι φανταστικός.

γ. Αν $w=2+i$ και $z=x+yi$, $x,y\in R$ τότε:

$$u=zw=(x+yi)(2+i)=2x+xi+2yi+yi^2=(2x-y)+(x+2y)i$$

Αφού ο u είναι φανταστικός, ισχύει:

$$\mathrm{Re}(u)=0\Leftrightarrow 2x-y=0\Leftrightarrow y=2x$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η ευθεία y = 2x.

5. Δίνονται οι μιγαδικοί z και $w=\dfrac{z+3i}{z+3}$, με $z\neq-3$.

α. Αν $z=x+yi$, $x,y\in R$ να γράψετε τον w στην μορφή $\alpha+\beta i$.

β. Να δείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $y=-x-3$.

γ. Να δείξετε ότι αν $|w|=2$, τότε η εικόνα του z κινείται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Λύση:

α. $$w=\frac{x+yi+3i}{x+yi+3}=\frac{x+(y+3)i}{(x+3)+yi}=\frac{[x+(y+3)i][(x+3)-yi]}{(x+3)^2+y^2}=$$

$$=\frac{x(x+3)-xyi+(x+3)(y+3)i-(y+3)yi^2}{(x+3)^2+y^2}=$$

$$=\frac{x(x+3)+y(y+3)}{(x+3)^2+y^2}+\frac{-xy+(x+3)(y+3)}{(x+3)^2+y^2}i$$

Έτσι $\mathrm{Re}(w)=\dfrac{x^2+y^2+3x+3y}{(x+3)^2+y^2}$, $\mathrm{Im}(w)=\dfrac{3x+3y+9}{(x+3)^2+y^2}$

β. Ο w είναι πραγματικός , αν και μόνον αν ,

$$\mathrm{Im}(w)=0 \Leftrightarrow 3x+3y+9=0 \Leftrightarrow y=-x-3$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $y=-x-3$, με εξαίρεση το σημείο (–3,0), αφού πρέπει $z+3\neq 0 \Leftrightarrow x+3+yi\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -3$ και $y\neq 0$

γ. $|w|=2 \Leftrightarrow \dfrac{|z+3i|}{|z+3|}=2 \Leftrightarrow |z+3i|=2|z+3| \Leftrightarrow |x+(y+3)i|=2|(x+3)+yi| \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2+(y+3)^3}=2\sqrt{(x+3)^2+y^2}$

Υψώνουμε στο τετράγωνο: $x^2+(y+3)^2=4\left[(x+3)^2+y^2\right]\Leftrightarrow$

$x^2+y^2+6y+9=4x^2+24x+36+4y^2 \Leftrightarrow$

$3x^2+3y^2+24x-6y+27=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+8x-2y+9=0$

Επειδή $8^2+(-2)^2-4\cdot 9=64+4-36=32>0$, η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-4,1)$ και ακτίνα $R=\dfrac{\sqrt{32}}{2}=2\sqrt{2}$.

6. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί, για τους οποίους ισχύει: $z_1\neq 0$, $z_2\neq 0$, $z_1\neq z_2$ και $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$ (1).

α. Να δείξετε ότι ο μιγαδικός $w=\dfrac{z_1}{z_2}$ είναι φανταστικός.

β. Να δείξετε ότι $\left|\dfrac{iz_1}{z_1-z_2}\right|+\left|\dfrac{\overline{z}_2}{z_1+z_2}\right|\geq 1$.

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z_1 αν $z_2=1+i$.

Λύση:

α. $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$ υψώνουμε στο τετράγωνο:

$|z_1+z_2|^2=|z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=(z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)\Leftrightarrow$

$z_1\overline{z}_1+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2=z_1\overline{z}_1-z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2 \Leftrightarrow$

$$2z_1\overline{z}_2 = -2z_2\overline{z}_1 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = -\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} \Leftrightarrow w = -\overline{w}$$

Όμως: αν $w = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in R$.

$w = -\overline{w} \Leftrightarrow \alpha + \beta i = -(\alpha - \beta i) \Leftrightarrow \alpha + \beta i = -\alpha + \beta i \Leftrightarrow \alpha = 0$, άρα ο w είναι φανταστικός.

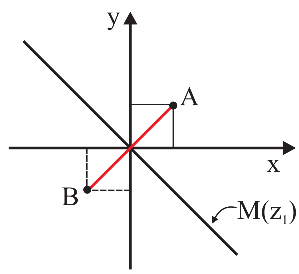
(*2ος τρόπος:*

Διαιρούμε με $|z_2|$, οπότε $\left|\frac{z_1 + z_2}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1 - z_2}{z_2}\right| \Leftrightarrow |w+1| = |w-1|$, αρα η εικόνα του w ανήκει στην μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα $A(1,0)$ $B(-1,0) \to yy'$, άρα w φανταστικός.)

β. Η προς απόδειξη σχέση γίνεται:

$\frac{|z_1|}{|z_1 - z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1 - z_2|} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{|z_1| + |z_2|}{|z_1 - z_2|} \geq 1 \Leftrightarrow |z_1| + |z_2| \geq |z_1 - z_2|$, που ισχύει διότι

$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$, άρα ισχύει και η αρχική .



γ. Για $|z_1 + 1 + i| = |z_1 - 1 - i| \Leftrightarrow |z_1 - (-1 - i)| = |z_1 - (1 + i)|$

Άρα η εικόνα του z_1 κινείται στην μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα $A(-1,-1)$ και $B(1,1)$ που είναι η ευθεία: $(\varepsilon): y = -x$

7. Δίνονται οι μιγαδικοί $z \neq 0$, $w = \frac{1}{z}$ και $u = z^2$ τέτοιοι ώστε οι εικόνες των z και w σχηματίζουν με την αρχή των αξόνων O, ορθογώνιο τρίγωνο στο O.

α. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι οι διχοτόμοι των αξόνων χωρίς το σημείο τομής τους.

β. Να δείξετε ότι ο u είναι φαντασικός.

γ. Αν ισχύει $\left|z - \frac{1}{z}\right| = \sqrt{2}$, να βρείτε το μέτρο του u.

Λύση:

α. Έστω $z = x + yi$ τότε $w = \frac{1}{x + yi} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i$.

Έστω M_1 η εικόνα του z $\overrightarrow{OM_1}(x,y)$, M_2 η εικόνα του w $\overrightarrow{OM_2}\left(\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$

πρέπει:

$$\overrightarrow{OM_1}\perp\overrightarrow{OM_2}\Leftrightarrow \lambda_1\cdot\lambda_2=-1\Leftrightarrow \frac{y}{x}\cdot\frac{-y}{x}=-1\Leftrightarrow y^2=x^2\Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ \text{ή} \\ y=-x\end{cases},\ z\neq 0$$

Άρα γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι οι διχοτόμοι των γωνιών του ορθοκανονικού συστήματος χωρίς το $O(0,0)$.

β. $u=z^2\Leftrightarrow u=(x+yi)^2\Leftrightarrow u=(x^2-y^2)+2xyi$

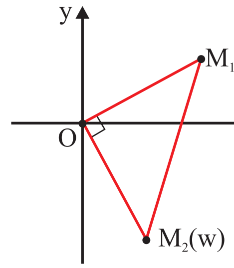
Όμως από το **α.** ισχύει $y^2=x^2$ (και $z\neq 0$, $x\neq 0$ και $y\neq 0$)

Έτσι $u=(x^2-x^2)+2xyi=2xyi$, άρα $xy\neq 0$ ο u είναι φανταστικός.

γ. $\left|z-\frac{1}{z}\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow |z-w|=\sqrt{2}$ (1)

Όμως $|z-w|$: απόσταση των εικόνων του z και του w (M_1M_2).

Στο τρίγωνο OM_1M_2 εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε:



$$(M_1M_2)^2=(OM_1)^2+(OM_2)^2\Leftrightarrow |z-w|^2=|z|^2+|w|^2\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}^2=|z|^2+|w|^2\Leftrightarrow |z|^2+\frac{1}{|z|^2}=2\Leftrightarrow (|z|^2)^2-2|z|^2+1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|z|^2-1)^2=0\Leftrightarrow |z|^2=1\Leftrightarrow |z|=1$$ Έτσι $|u|=|z^2|=|z|^2=1$.

8. **Αν $z\in C$ και ισχύει $(z+i)^{17}+(2i)^{11}(\overline{z}-i)^6=0$, με $z\neq -i$, να αποδείξετε ότι:**

α. $|z+i|=2$ **β.** $w=\frac{(z+i)^2+4}{z+i}\in R$ **γ.** $u=(z+i)^{23}\in I$

Λύση:

Είναι: $(z+i)^{17}+(2i)^{11}(\overline{z}-i)^6=0\Leftrightarrow (z+i)^{17}+2^{11}\cdot i^{11}(\overline{z}-i)^6=0\Leftrightarrow$

$$(z+i)^{17}+2^{11}\cdot(-i)(\overline{z}-i)^6=0 \Leftrightarrow (z+i)^{17}=2^{11}i(\overline{z}-i)^6 \quad (1)$$

α. Έχουμε: $(z+i)^{17}=2^{11}\cdot i(\overline{z}-i)^6$ και επομένως τα μέτρα τους είναι ίσα, δηλαδή:

$$|z+i|^{17}=|2^{11}|\cdot|i|\cdot|\overline{z}-i|^6$$

Όμως $|\overline{z}-i|=\left|\overline{(z+i)}\right|=|z+i|$ οπότε $|z+i|^{17}=2^{11}|z+i|^6$ και αφού $|z+i|\neq 0$ είναι:

$$\frac{|z+i|^{17}}{|z+i|^6}=2^{11} \Leftrightarrow |z+i|^{11}=2^{11} \Leftrightarrow |z+i|=2$$

β. Είναι: $|z+i|^2=(z+i)\overline{(z+i)}=2^2 \Leftrightarrow 2^2=(z+i)(\overline{z}-i) \Leftrightarrow \overline{z}-i=\dfrac{4}{z+i}$ (2)

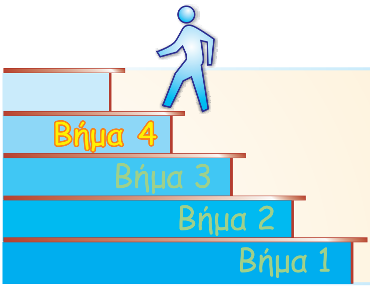
Έχουμε: $w=\dfrac{(z+i)^2+4}{z+i}=\dfrac{(z+i)^2}{z+i}+\dfrac{4}{z+i}\overset{(2)}{=}z+i+\overline{z}-i=z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$

Άρα $w\in R$.

γ. Είναι: $u=(z+i)^{23}=(z+i)^{17}(z+i)^6\overset{(1)}{=}2^{11}i(\overline{z}-i)^6(z+i)^6=$

$=2^{11}i(z+i)^6\overline{(z+i)^6}=2^{11}i\left|(z+i)^6\right|^2=2^{11}i|z+i|^{12}=2^{11}i2^{12}$

Έτσι $u=2^{23}i$, άρα $u\in I$.



Λύνουμε μόνοι μας

1. α. **Να λύσετε στο C την εξίσωση:** $z^2 - 2|z| = 0$

β. **Να σχεδιάσετε στο μιγαδικό επίπεδο το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του $z \in C$, αν $|z-2| = |z-4i|$.**

2. **Δίνεται ο μιγαδικός $z = x + yi$, όπου $x, y \in R$ και $x \neq 0$, $y \neq 2$. Αν $\left|\frac{z-i}{z+2i}\right| = 2$, τότε:**

α. **Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z.**

β. **Να προσδιορίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$ και να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία.**

3. **Έστω ότι για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει:** $|z-4+9i|\le 2$ **. Να αποδείξετε ότι:** $3\le|z-7+5i|\le 7$

....

....

....

....

....

....

....

4. **α.** **Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του** $|z|$ **αν** $|z-5|\le 2$.

β. **Αν** z_1, z_2 **είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε να αποδείξετε ότι:** $(z_1\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_2)^2 \le 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

5. **Δίνεται ο μιγαδικός z και έστω** $f(z)=\dfrac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}}, z\neq 1$

α. **Να αποδείξετε ότι ο αριθμός** $w=[f(2)]^{2004}$ **είναι πραγματικός.**

β. **Να αποδείξετε ότι:** $\left|\dfrac{f(z)-2}{f(z)+i}\right|=|z|$

γ. **Αν |z|=1 και Μ είναι η εικόνα του f(z) στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το Μ ανήκει σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.**

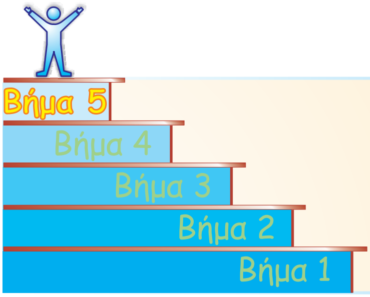
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

6.α. **Αν για το μιγαδικό z ισχύουν** $|z^2+1|<1$ **και** $|z+1|<1$**, να δειχθεί ότι** $|z|\le 1$**.**

β. **Αν** $z_1, z_2 \in C$ **με** $z_2 \ne 0$**, να δειχθεί η ισοδυναμία:**

$$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2| \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}\in R$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....



Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

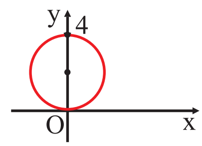
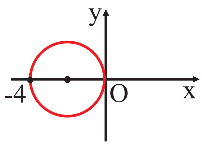
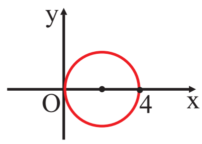
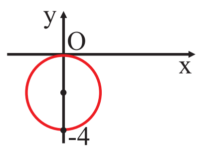
Α.α. Γράψτε τις ιδιότητες που γνωρίζετε για συζυγείς μιγαδικούς και για το μέτρο μιγαδικού.

(Μονάδες 3)

β. Αποδείξτε ότι: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

(Μονάδες 5)

Β.1. Αντιστοιχίστε σε καθένα από τα γράμματα Α,Β,Γ,Δ έναν αριθμό από το 1 έως το 8 ώστε καθένα από τα σχήματα της πρώτης στήλης να ταιριάξει με την κατάλληλη εξίσωση της δεύτερης στήλης.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
Α. 	**1.** $\lvert z+2\rvert=2$
	2. $\lvert z-2i\rvert=4$
Β. 	**3.** $\lvert z-2i\rvert=2$
	4. $\lvert z-2\rvert=2$
	5. $\lvert z+2i\rvert=2$
Γ. 	**6.** $\lvert z+2\rvert=4$
	7. $\lvert z+2i\rvert=2$
Δ. 	**8.** $\lvert z-2\rvert=2$

(Μονάδες 5)

Β.2. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος)

α. Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

(Μονάδες 4)

β. Ο κύκλος με εξίσωση $\lvert z-i\rvert=1$ εφάπτεται στον πραγματικό άξονα.

(Μονάδες 4)

γ. Αν $\lvert z-1-i\rvert=\sqrt{2}$ τότε η μέγιστη τιμή του $\lvert z\rvert$ είναι ίση με $\sqrt{8}$.

(Μονάδες 4)

Θέμα 2^0

Α. Να γράψετε στη μορφή α+βi, όπου $\alpha,\beta\in R$, τους αριθμούς:

Α. $\dfrac{1-3i}{1-i}$ **Β.** $\dfrac{2}{3-4i}$

(Μονάδες 12)

α. Αν εικόνα του $z \in C$ "γράφει" την ευθεία y=x τότε η εικόνα του $\bar{z}$ "γράφει" την ευθεία:

Α. $y=0$ **Β.** $x=0$ **Γ.** $x+y=0$ **Δ.** $y=x+1$ **Ε.** $y=x+2$

(Μονάδες 7)

β. Μια δευτεροβάθμια εξίσωση με πραγματικούς συντελεστες έχει ρίζα τον αριθμό $3i-\sqrt{3}$. Η άλλη ρίζα της είναι ο αριθμός:

Α. $3-i\sqrt{3}$ **Β.** $-\sqrt{3}-3i$ **Γ.** $\sqrt{3}-3i$ **Δ.** $-\sqrt{3}+3i$ **Ε.** $\sqrt{3}+3i$

(Μονάδες 6)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

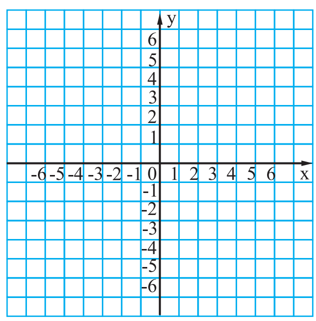
....

....

Θέμα 3ο

Α. Στο διπλανό σχήμα να χαράξετε την ευθεία $|z-2i|=|z+2|$ και να γραμμοσκιάσετε την περιοχή του μιγαδικού επιπέδου τα σημεία της οποίας επαληθεύουν την σχέση $|z-2i| \le |z+2|$.

(Μονάδες 13)



Β. Αν η εικόνα του z βρίσκεται στο εσωτερικό κύκλου με κέντρο την εικόνα του 2-i και ακτίνα 2 τότε:

Α. $|z+2-i|<2$ **Β.** $|z-2+i|<2$ **Γ.** $|z-2+i|<4$

Δ. $|z+2-i|<4$ **Ε.** $|z+2+i|<2$

(Μονάδες 12)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Θέμα 4^0

Έστω z, w μιγαδικοί που συνδέονται με τη σχέση $w = z + \frac{1}{z}$, με $z \neq 0$. Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του w κινείται σε έλλειψη.

(Μονάδες 25)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Κεφάλαιο 2°

Όρια - Συνέχεια

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο αυτό θα πρέπει να είναι σε θέση:

1. Να μπορεί να βρίσκει απο τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης
- ✓ το πεδίο ορισμού της
- ✓ το σύνολο τιμών της
- ✓ την τιμή της σε ένα σημείο x_0 .

2. Να γνωρίζει τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων.

3. Να μπορεί να βρίσκει το άθροισμα, το γινόμενο, το πηλίκο και τη σύνθεση απλών συναρτήσεων.

4. Να γνωρίζει την έννοια της συνάρτησης “1–1”, τις βασικές ιδιότητες της και να κατανοήσουν την διαδικασία εύρεσης της αντίστροφης μιας απλής συνάρτησης. Να γνωρίζει, επιπλέον, οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων.

5. Να μπορεί να εκφράζει, με τη βοήθεια συνάρτησης, τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι τιμές δύο μεγεθών σε διάφορα προβλήματα.

6. Να μπορεί να βρίσκει το όριο μιας συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$, όταν δίνεται η γραφική της παράσταση.

7. Να γνωρίζει τις ιδιότητες του ορίου συνάρτησης και με τη βοήθειά τους να υπολογίζει τα όρια απλών συναρτήσεων.

8. Να μπορεί να διαπιστώνει την ύπαρξη μη πεπερασμένων ορίων συναρτήσεων από τη γραφική τους παράσταση.

9. Να μπορεί να υπολογίζει τα όρια πολυωνυμικών ή ρητών συναρτήσεων στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

10. Να γνωρίζει τις γραφικές παραστάσεις της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης και τα όρια τα σχετικά με τις συναρτήσεις αυτές.

11. Να γνωρίζει την έννοια της ακολουθίας και την έννοια του ορίου ακολουθίας.

12. Να γνωρίζει την έννοια της συνέχειας συνάρτησης σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

13. Να αναγνωρίζει την συνέχεια μιας συνάρτησης f σε σημείο η διάστημα, από τη γραφική της παράσταση.

14. Να γνωρίζει τις βασικές συνεχείς συναρτήσεις και ότι το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο, το πηλίκο καθώς και η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

15. Να γνωρίζει τα βασικά θεωρήματα: Bolzano, ενδιάμεσης τιμής και μέγιστης - ελάχιστης τιμής, όταν η συνάρτηση ορίζεται σε κλειστό διάστημα και να μπορεί να τα εφαρμόζει, στην εύρεση του προσήμου μιας συνεχούς συνάρτησης, στην εύρεση του συνόλου τιμών και του πλήθους των ριζών συναρτήσεων των οποίων είναι γνωστά τα διαστήματα μονοτονίας και το είδος της μονοτονίας.

ΟΡΙΑ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ: Τύποι - Βασικές έννοιες

Με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος διευκολύνεται ο υπολογισμός ορίων (άλγεβρα ορίων): Αν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί τότε :

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(k\cdot f(x)\right)=k\lim_{x\to x_0} f(x)\ ,\ k\in R$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\nu}=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\nu},\ \nu\in N\ \text{με}\ \nu\ge 2$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}\ ,\ \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$$

$$\lim_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=\left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|$$

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}=\sqrt[\nu]{\lim_{x\to x_0} f(x)}\ \ \text{με}\ \ f(x)\ge 0\ \text{κοντά στο}\ x_0,\ \nu\in N\ \text{με}\ \nu\ge 2.$$

Όρια βασικών συναρτήσεων στο άπειρο

Δυνάμεις του x $\nu\in N^*$	Αν ν άρτιος : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\nu}=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\nu}=+\infty$ Αν ν περιττός : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\nu}=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\nu}=-\infty$
Αρνητικές δυνάμεις του x , όπου $\nu\in N^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\nu}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{\nu}}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{-\nu}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^{\nu}}=0$
Πραγματικές δυνάμεις του x, όπου $\alpha>0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\alpha}=0$
Εκθετικά όρια	Αν $\alpha>1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^{x}=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^{x}=0$ Αν $0<\alpha<1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^{x}=0$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^{x}=+\infty$
Λογαριθμικά όρια	Αν $\alpha>1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_{\alpha}x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\alpha}x=-\infty$ Αν $0<\alpha<1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_{\alpha}x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\alpha}x=+\infty$

Ορισμός 1

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **συνεχής σε ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της , αν και μόνον αν, ισχύει : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ορισμός 2

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **συνεχής** (στο πεδίο ορισμού της) , αν και μόνον αν, είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της .

Συνέχεια βασικών συναρτήσεων

- Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής στο R.
- Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της
- Οι συναρτήσεις ημx , συνx είναι συνεχείς στο R.
- Οι συναρτήσεις e^x , α^x , lnx , logx είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους, με $0 < \alpha \neq 1$.

Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους , τότε και οι συναρτήσεις: $f+g$, $f \cdot g$, $\lambda \cdot f \ (\lambda \in R)$, $\dfrac{f}{g} \ (g(x) \neq 0)$, $|f|$, $\sqrt[k]{f} \ (f(x) \geq 0)$, $\kappa \in N$ με $\kappa \geq 2$ είναι συνεχείς στο x_0 .

Θεώρημα Bolzano (Θ.Β.)

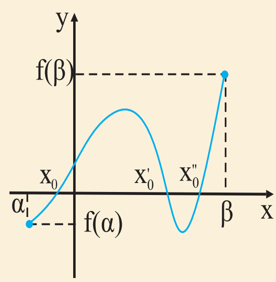
Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β].

Αν: • η f είναι συνεχής στο [α,β] και

• $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

δηλαδή υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (α,β).



Γεωμετρική ερμηνεία

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 μεταξύ των α και β (σχ.1).

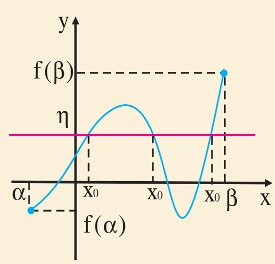
Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (Θ.Ε.Τ)

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν ισχύουν ότι:

• η f είναι συνεχής στο [α,β] και

• $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό n μεταξύ των f(α), f(β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = n$.



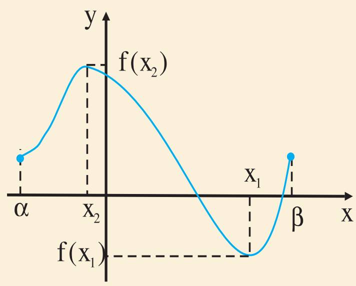
Γεωμετρική ερμηνεία

Η ευθεία $y = n$ όπου n μεταξύ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη μεταξύ των α και β.

Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β] τότε η f παίρνει στο [α,β] μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m, δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$ οπότε:

$m = f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) = M$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.



Ευρεση συνόλου τιμών

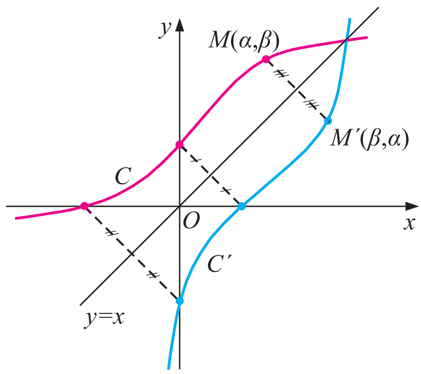
- Όπως ήδη αναφέρθηκε στο πρώτο σχόλιο είναι φανερό ότι το σύνολο τιμών μιάς συνεχούς συνάρτησης f ορισμένης σε κλειστό $[\alpha,\ \beta]$ είναι το $[f(\alpha), f(\beta)]$ αν η f είναι αύξουσα και $[f(\beta), f(\alpha)]$ αν η f είναι φθίνουσα.
- Αν η f είναι συνεχής στο ανοιχτό (α,β) τότε το σύνολο τιμών της στη περίπτωση που είναι γνησίως αύξουσα είναι $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$ ενώ στη περίπτωση που είναι γνησίως φθίνουσα είναι $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x),\ \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$
- Αν τέλος, η f είναι συνεχής και ορισμένη στα $[\alpha,\beta)$ ή $(\alpha,\beta]$ τότε (αν f γνησίως αύξουσα) το σύνολο τιμών της είναι: $f(A) = \left[f(\alpha),\ \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$ ή $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x),\ f(\beta)\right]$.

  Ενώ (αν f γνησίως φθίνουσα) το σύνολο τιμών της είναι $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x), f(\alpha)\right]$ ή $\left[f(\beta), \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$.

ΘΕΩΡΙΑ 1 **Δικαιολογήστε γιατί οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας θεωρήσουμε μια 1–1 συνάρτηση f και ας υποθέσουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C' των f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων είναι αυτές που φαίνονται στο σχήμα.



Επειδή $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$,

αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f, τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Επομένως:

Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

ΘΕΩΡΙΑ 2 **Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$**.**

Αν:

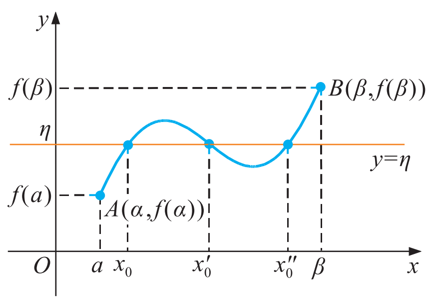
- **η *f* είναι συνεχής στο** $[\alpha,\beta]$ **και**
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

αποδείξτε ότι, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ **και** $f(\beta)$ **υπάρχει ένας, τουλάχιστον** $x_0\in(\alpha,\beta)$ **τέτοιος, ώστε**

$$f(x_0)=\eta$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ (βλ. σχήμα).



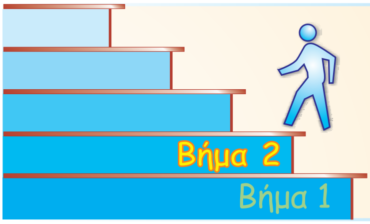
Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

αφού

$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.



Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις “κλειδιά”

Α. Από το σχολικό βιβλίο

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

§ 1.2 Συναρτήσεις

§ 1.3 Μονότονες-Αντίστροφη Συνάρτηση

-Πεδίο ορισμού	σελ. 134, εφαρμογή
	σελ. 145, άσκηση 1,5
	σελ. 147, άσκηση 2,3,4 (Β΄ ομάδα)
-Γραφική παράσταση	σελ. 140, εφαρμογή
	σελ. 145, άσκηση 2,3,6
-Ισότητα συναρτήσεων	σελ. 146, άσκηση 7
-Πράξεις με συναρτήσεις	σελ. 146, άσκηση 8
-Σύνθεση συναρτήσεων	σελ. 143-144, εφαρμογή-σχόλια
	σελ. 146, άσκηση 11,12
	σελ. 148, άσκηση 6,7,8,9
-Μονοτονία συνάρτησης	σελ. 156, άσκηση 1
	σελ. 157, άσκηση 4
-1-1	
-Αντίστροφη συνάρτηση	σελ. 155, εφαρμογή
	σελ. 156, άσκηση 2

§ 1.4-1.7 Όρια

-Ιδιότητες ορίου	σελ. 174, άσκηση 2
	σελ. 176, άσκηση 4
	σελ. 182, άσκηση 4
	σελ. 186, άσκηση 1

-Μορφή $\frac{0}{0}$	σελ. 175, άσκηση 4
	σελ. 175-176, άσκηση 1 (Β΄ ομάδα)
-Ασκήσεις με απόλυτα	σελ. 176, άσκηση 2
	σελ. 187, άσκηση 1 (Β΄ ομάδα)
-Κριτήριο παρεμβολής	
-Τριγωνομετρικά όρια	σελ. 175, άσκηση 6,7
-Μορφή $\frac{\alpha}{0}$	σελ. 181, άσκηση 1,2
	σελ. 182, άσκηση 2
-Μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$	σελ. 187, άσκηση 3i, iii (Α΄ ομάδα)
-Μορφή $(+\infty)-(+\infty)$	σελ. 187, άσκηση 3ii (Α΄ ομάδα)
-Όρια εκθετικής-λογάριθμοι	
-Παραμετρικές ασκήσεις	σελ. 175, άσκηση 9
	σελ. 185, άσκηση 3
	σελ. 187, άσκηση 1,2,3 (Β΄ ομάδα)
-Γενικές ασκήσεις	
§ 1.8 Συνέχεια συνάρτησης	
-Συνέχεια	σελ. 198, άσκηση 4,5
	σελ. 199, άσκηση 2,3 (Β΄ ομάδα)
-Θεώρημα Bolzano	σελ. 198-199, άσκηση 6,7,8,9 (Α΄ ομάδα)
	σελ. 199, άσκηση 4 (Β΄ ομάδα)
	σελ. 200, άσκηση 5,6,7,8
-Ενδιάμεσων τιμών	
-Σύνολο τιμών	σελ. 199, άσκηση 10
-Ερωτήσεις κατανόησης	σελ. 201-203

Β. Από τα Βιλιομαθήματα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
εκδόσεις "ΟΡΟΣΗΜΟ"

Βιβλιομάθημα 3ο

Λυμένες ασκήσεις : 3, 5
Προτεινόμενες ασκήσεις : 3, 4, 7, 8

Βιβλιομάθημα 4ο

Λυμένες ασκήσεις : 5, 6, 10
Προτεινόμενες ασκήσεις : 9, 11

Βιβλιομάθημα 5ο

Παραδείγματα : 1 - 10
Προτεινόμενες ασκήσεις : 6, 7, 11

Βιβλιομάθημα 6ο

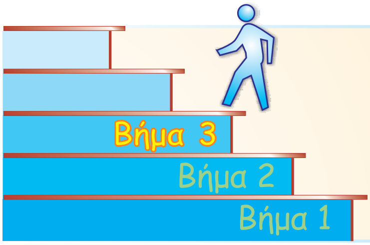
Λυμένες ασκήσεις : 1, 2, 3, 4
Προτεινόμενες ασκήσεις : 7, 8

Βιβλιομάθημα 7ο

Λυμένες ασκήσεις : 1 - 5
Προτεινόμενες ασκήσεις : 3, 4, 5

Βιβλιομάθημα 8ο

Τα λυμένα παραδείγματα
των μεθόδων : 1-9



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. **Να βρεθεί το όριο:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$.

Λύση:

Για κάθε $x \neq 0$:

$$\frac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}=\frac{\left(\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^4+1}-(x^2+1)}{x^2\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{\sqrt{x^4+1}-(x^2+1)}{x^2\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}\cdot\frac{\sqrt{x^4+1}+x^2+1}{\sqrt{x^4+1}+x^2+1}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^4+1}\right)^2-(x^2+1)^2}{x^2\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^4+1}+x^2+1\right)}=$$

$$=\frac{x^4+1-x^4-2x^2-1}{x^2\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^4+1}+x^2+1\right)}=$$

$$=\frac{-2}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^4+1}+x^2+1\right)}$$

Άρα: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^4+1}+x^2+1\right)}=$

$$=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

2. **Θεωρούμε συνάρτηση** $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-(1+2\alpha x)}{x^2}$.

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\beta$.

Λύση:

Η f(x) ορίζεται για $x\in[-1,0)\cup(0,+\infty)$.

Επίσης: $$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-(1+2\alpha x)}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+(1+2\alpha x)}{\sqrt{1+x}+(1+2\alpha x)}=$$

$$=\frac{1+x-(1+2\alpha x)^2}{x^2\left(\sqrt{1+x}+1+2\alpha x\right)}=\frac{1+x-1-4\alpha x-4\alpha^2x^2}{x^2\left(\sqrt{1+x}+1+2\alpha x\right)}=$$

$$=\frac{x\left(1-4\alpha-4\alpha^2x\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x}+1+2\alpha x\right)}.$$ Δηλαδή: $$f(x)=\frac{1-4\alpha-4\alpha^2x}{x\left(\sqrt{1+x}+1+2\alpha x\right)} \quad (1)$$

Άρα: $xf(x)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1+2\alpha x\right)=-4\alpha^2x+1-4\alpha$

Τότε: $\lim\limits_{x\to 0}\left[xf(x)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1+2\alpha x\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[-4\alpha^2x+1-4\alpha\right]$

ή $0\cdot\beta\cdot 2=0+1-4\alpha \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{1}{4}$

Από τη σχέση (1), για $\alpha=\dfrac{1}{4}$ έχουμε: $$f(x)=\frac{-\frac{1}{4}x}{x\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{1}{2}x\right)}$$

Άρα: $$\beta=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{1+x}+1+\frac{1}{2}x}=\frac{-\frac{1}{4}}{2}=\frac{-1}{8}.$$

3. **Έστω** $z\in\mathbb{C}, z\neq 0$ **και** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **συνεχής συνάρτηση. Αν τα επόμενα όρια:**

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|zf(x)-4|-4}{x}$ **και** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|zf(x)+2|-2}{x-2}$, **υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί, να δείξετε ότι υπάρχει** $\xi\in[0,2]$ **τέτοιο ώστε** $f(\xi)=0$.

Λύση:

Έστω $g(x)=\dfrac{|zf(x)-4|-4}{x}$ (1)

Σύμφωνα με την εκφώνηση το $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και η συνάρτηση $|zf(x)-4|$ είναι επίσης συνεχής ,αφού $|zf(x)-4|=\sqrt{(xf(x)-4)^2+y^2f^2(x)}$ όπου $z=x+yi$ με $x,y\in R$.

Από την (1) παίρνουμε: $|zf(x)-4|=xg(x)+4$ οπότε

$$\lim_{x\to 0}|zf(x)-4|=\lim_{x\to 0}(xg(x)+4)=4$$

Άρα $|zf(0)-4|=4$ (2), αφού η $|zf(x)-4|$ είναι συνεχής στο 0.

Αν $z=\alpha+\beta i$ η σχέση (2) γράφεται:

$$\sqrt{(\alpha f(0)-4)^2+f(0)^2\beta^2}=4 \Leftrightarrow f(0)\left[\alpha^2 f(0)-8\alpha+f(0)\beta^2\right]=0$$

Τότε ($f(0)=0$, άρα $\xi=0$) ή $\alpha^2 f(0)-8\alpha+f(0)\beta^2=0$ οπότε: $f(0)=\dfrac{8\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$ (3)

4. **Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει: $f(x)=\dfrac{x^2}{f^2(x)+1}$, για κάθε $x\in R$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0.**

Λύση:

Για κάθε $x\in R$, $|f(x)|=\dfrac{|x^2|}{f^2(x)+1}\le x^2$ (αφού $f^2(x)+1\ge 1$, για κάθε $x\in R$)

δηλαδή για κάθε $x\in R$, $-x^2\le f(x)\le x^2$.

Όμως: $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ (1)

Επίσης από την σχέση της υπόθεσης έπεται ότι: $f(0)=\dfrac{0^2}{f^2(0)+1}=0$ (2)

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

5. **Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ με $|\alpha|<1$ συνεχής και τέτοια ώστε:**

$$f^2(\alpha)+f^2(\beta)+2=2\big(f(\alpha)-f(\beta)\big)$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta): f(x_0)=x_0^{\,2}$

Λύση:

Η σχέση της υπόθεσης γίνεται:

$$f^2(\alpha)+f^2(\beta)+2=2f(\alpha)-2f(\beta)\Leftrightarrow f^2(\alpha)+f^2(\beta)+1+1-2f(\alpha)+2f(\beta)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\big(f(\alpha)-1\big)^2+\big(f(\beta)+1\big)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}f(\alpha)=1\\ \quad\text{και}\\ f(\beta)=-1\end{cases}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2, x\in[\alpha,\beta]$

Για την g παρατηρούμε ότι:

- g συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- $g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha^2=1-\alpha^2>0$, αφού $|\alpha|<1$
- $g(\beta)=f(\beta)-\beta^2=-1-\beta^2=-\big(\beta^2+1\big)<0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano:

υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta): g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-x_0^{\,2}=0\Leftrightarrow f(x_0)=x_0^{\,2}$

6. **Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(0)>1$ ώστε:**

$$f^2(x)-2f(x)=x^2,\ \text{για κάθε } x\in R.$$

Λύση:

Για κάθε $x\in R$: $f^2(x)-2f(x)=x^2\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+1=x^2+1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\big(f(x)-1\big)^2=x^2+1\neq0\quad(1)$$

Επομένως και $f(x)-1\neq0$ για κάθε $x\in R$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-1,\ x\in R$:

Για τη g παρατηρούμε ότι:
- g συνεχής στο R
- $g(x)\neq0$ για κάθε $x\in R$

Επομένως η g διατηρεί πρόσημο στο R και επειδή $g(0)=f(0)-1\overset{\text{υποθ.}}{>}0$ συμπεραίνουμε ότι $g(x)>0$, για κάθε $x\in R$ δηλ. $f(x)-1>0$, για κάθε $x\in R$.

Οπότε λόγω και της (1) έπεται ότι: $f(x)-1=\sqrt{x^2+1}$, για κάθε $x\in R$ ή ισοδύναμα $f(x)=\sqrt{x^2+1}+1$, για κάθε $x\in R$.

7. Έστω $f:R\to R$ συνεχής συνάρτηση ώστε $f(0)>0$ και $f(x)\neq x^2$, για κάθε $x\in R$. Δείξτε ότι: i. $f(x)>x^2$, για κάθε $x\in R$. ii. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

Λύση:

i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2$, $x\in R$. Για τη g παρατηρούμε ότι:

- g συνεχής στο R,
- $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$

Επομένως η g διατηρεί πρόσημο στο R και επειδή $g(0)=f(0)\overset{\text{υποθ.}}{>}0$ συμπεραίνουμε ότι $g(x)>0$, για κάθε $x\in R$, δηλαδή $f(x)-x^2>0$, για κάθε $x\in R$ ή $f(x)>x^2$, για κάθε $x\in R$

ii. Είναι φανερό ότι: για κάθε $x\in R$, $f(x)>x^2\geq 0$ και άρα $0<\dfrac{1}{f(x)}<\dfrac{1}{x^2}$, για κάθε $x\in R^*$. Όμως: $\lim\limits_{x\to-\infty}0=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ και επομένως σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{f(x)}}=+\infty$ (αφού $\dfrac{1}{f(x)}>0$, για κάθε $x\in R$)

δηλαδή $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

8. Έστω $f:R\to R$ συνεχής συνάρτηση και τέτοια ώστε $x<f(x)<x+1$, για κάθε $x\in R$. Δείξτε ότι: $f(R)=R$.

Λύση:

Αρκεί προφανώς να δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός κ είναι τιμή της f.

Δηλαδή ότι υπάρχει $x_0 \in R : f(x_0) = \kappa$

Προς τούτο θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \kappa$, $x \in R$ για την οποία παρατηρούμε ότι: • g συνεχής στο $[\kappa-1, \kappa] \subset R$

• $g(\kappa-1) = f(\kappa-1) - \kappa \overset{\text{υποθ.}}{<} \kappa - 1 + 1 - \kappa = 0$

• $g(\kappa) = f(\kappa) - \kappa \overset{\text{υποθ.}}{>} 0$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano:

υπάρχει $x_0 \in (\kappa-1, \kappa) \subset R : g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - \kappa = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \kappa$ ο.ε.δ.

9. Αν για τη συνάρτηση $f : R \to R$ ισχύει $f(0) = 0$ και $\dfrac{f(x) - x}{f(x) + x} < 0$, για κάθε $x \in R^*$ να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

Λύση:

Από τη σχέση της υπόθεσης έπεται ότι: $(f(x) - x)(f(x) + x) < 0$, για κάθε $x \in R^*$

ή $f^2(x) - x^2 < 0$ για κάθε $x \in R^*$, δηλ. $f^2(x) < x^2$ για κάθε $x \in R^*$.

Οπότε $\sqrt{f^2(x)} < \sqrt{x^2}$, για κάθε $x \in R^*$. Άρα $|f(x)| < |x|$, για κάθε $x \in R^*$

ή ισοδύναμα $-|x| < f(x) < |x|$, για κάθε $x \in R^*$.

Όμως: - $\lim\limits_{x \to 0}(-|x|) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0}|x| = 0$

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ (1)

Όμως εξ' υποθέσεως είναι $f(0) = 0$ (2)

Εκ των (1) και (2) έπεται ότι η f είναι συνεχής στο 0.

10. Έστω $f : [\alpha, \beta] \to R$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x^2 + 1} \le 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Λύση:

Η f ως συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] θα παίρνει μέγιστη τιμή σ' αυτό (θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής). Δηλαδή θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε:

$f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ ή ισοδύναμα $f(x) - f(x_0) \le 0$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Οπότε $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x^2+1} \le 0$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

11. **Έστω $f: R \to R$ συνάρτηση "1–1" και τέτοια ώστε $f(2) < f(1) < f(3)$. Δείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής.**

Λύση:

Ισχυριζόμαστε ότι η f είναι συνεχής στο R. Από τις υποθέσεις του προβλήματος έπεται ότι:
- f συνεχής στο $[2,3] \subset R$
- $f(2) \ne f(3)$
- $f(1) \in (f(2), f(3))$

Αρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει

$$x_0 \in (2,3): f(x_0) = f(1) \overset{f\ "1-1"}{\Leftrightarrow} x_0 = 1, \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο R.

12. **Έστω f συνεχής στο R και τέτοια ώστε να ισχύει:**

$$\mathbf{f(x+2) + f(x) = 0 \quad (1), \text{ για κάθε } x \in R,\ f(0) \ne f(1)}$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f(\xi+1)$.

Λύση:

θεωρούμε $g(x) = f(x) - f(x+1)$, που είναι συνεχής στο $[0,2]$ και ισχύουν:

$g(0) = f(0) - f(1)$ και $g(2) = f(2) - f(3)$. Όμως για $x = 0$ από την (1) έχουμε :

$f(2) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(2) = -f(0)$. Για $x = 1$ έχουμε από την (1):

$$f(3) + f(1) = 0 \Leftrightarrow f(3) = -f(1)$$

Άρα $g(2) = -f(0) + f(1) = -(f(0) - f(1))$ και $g(0) \cdot g(2) = -(f(0) - f(1))^2 < 0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ξ στο (0,2) τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) - f(\xi+1) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = f(\xi+1)$$

13. **Αν f συνεχής στο $[0,4]$, τότε υπάρχει:**

$$\xi\in(0,4): 9f(\xi)=2f(1)+3f(2)+4f(3)$$

Λύση:

Αφού η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,4]$ έχει μέγιστο και ελάχιστο δηλ. υπάρχουν $x_\varepsilon, x_\mu \in [0,4]$ τέτοια ώστε: $f(x_\varepsilon)\le f(x)\le f(x_\mu)$, $x\in[0,4]$

Άρα: $$\begin{cases} f(x_\varepsilon)\le f(1)\le f(x_\mu) \\ f(x_\varepsilon)\le f(2)\le f(x_\mu) \\ f(x_\varepsilon)\le f(3)\le f(x_\mu)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2f(x_\varepsilon)\le 2f(1)\le 2f(x_\mu) \\ 3f(x_\varepsilon)\le 3f(2)\le 3f(x_\mu) \\ 4f(x_\varepsilon)\le 4f(3)\le 4f(x_\mu)\end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε :

$$9f(x_\varepsilon)\le 2f(1)+3f(2)+4f(3)\le 9f(x_\mu) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ f(x_\varepsilon)\le \frac{2f(1)+3f(2)+4f(3)}{9}\le f(x_\mu)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $\xi\in(0,4)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=\frac{2f(1)+3f(2)+4f(3)}{9}\Leftrightarrow 9f(\xi)=2f(1)+3f(2)+4f(3)$$

14. **Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ είναι $|f(x_1)-f(x_2)|\le(x_1-x_2)^2$ να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής και να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3}$.**

Λύση:

Με $x_1=x,\ x_2=x_0$ έχουμε:

$|f(x)-f(x_0)|\le|x-x_0|^2 \Leftrightarrow -|x-x_0|^2\le f(x)-f(x_0)\le|x-x_0|^2$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[-|x-x_0|^2\right]=\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|^2=0$, συμπεραίνουμε από το κριτήριο παρεμβολής ότι

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Επειδή το x_0 είναι τυχαίο στοιχείο του $\mathbb{R}$ η f συνεχής σε κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ομοίως με $x_1=x,\ x_2=-3$ έχουμε:

$$|f(x)-f(-3)| \le |x+3|^2 \Leftrightarrow \left|\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}\right| \le |x+3|$$

$\Leftrightarrow -|x+3| \le \dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3} \le |x+3|$ και επειδή $\lim\limits_{x\to -3}\left[-|x+3|\right] = \lim\limits_{x\to -3}|x+3| = 0$ συμπεραίνουμε ότι: $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3} = 0$.

15. **Θεωρούμε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε : $2f^3(x)+f(x)=kx,\ k>0$**

α. Να δειχθεί ότι η f είναι “1–1”.

β. Να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής και να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

Λύση:

α. Έστω $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow f^3(x_1)=f^3(x_2)$

Επομένως: $\begin{cases} 2f^3(x_1)=2f^3(x_2) \\ f(x_1)=f(x_2) \end{cases}$ με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$2f^3(x_1)+f(x_1)=2f^3(x_2)+f(x_2) \Leftrightarrow kx_1=kx_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$$

που σημαίνει ότι η f είναι 1 - 1.

β. Απο τις σχέσεις: $2f^3(x)+f(x)=kx$ και $2f^3(x_0)+f(x_0)=kx_0$ με αφαίρεση κατά μέλη,παίρνουμε: $2\left[f^3(x)-f^3(x_0)\right]+\left[f(x)-f(x_0)\right]=k(x-x_0)$

$\Leftrightarrow 2\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right]+\left[f(x)-f(x_0)\right]=k(x-x_0)$

$\Leftrightarrow \left[f(x)-f(x_0)\right]\left[2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+1\right]=k(x-x_0)$ (1)

αλλά $2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)>0$ (τριώνυμο ως προς το f(x) με αρνητική διακρίνουσα). Οπότε

$$f(x)-f(x_0)=\frac{k(x-x_0)}{2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+1}$$

$$|f(x)-f(x_0)| = \left|\frac{k(x-x_0)}{2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+1}\right| \le \frac{k|x-x_0|}{1} = k|x-x_0| \Leftrightarrow$$

$$-k|x-x_0| \le f(x)-f(x_0) \le k|x-x_0|$$

και επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}\left[-k\left|x-x_0\right|\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[k\left|x-x_0\right|\right]=0$

σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο τυχαίο x_0 θα είναι συνεχής στο R.

Απο τη σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{k}{2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+1} \qquad (2)$$

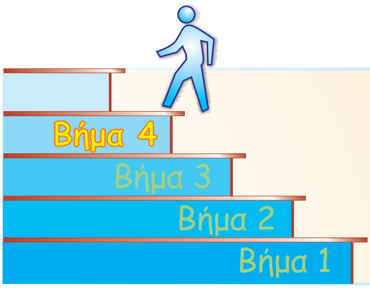
Επειδή η f είναι συνεχής στο R άρα και στο x_0 το 2ο μέλος της (2) μας δίνει:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{k}{2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+1}=$$

$$=\frac{k}{2f^2(x_0)+2f(x_0)f(x_0)+2f^2(x_0)+1}=\frac{k}{6f^2(x_0)+1}$$

Άρα από (2) έχουμε: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{k}{6f^2(x_0)+1}$ (για $x_0=2$ έχουμε:)

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{k}{6f^2(2)+1}$$



Λύνουμε μόνοι μας

1. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=5$, $\lim\limits_{x\to 2}\left[g(x)\left(2x^2+x-10\right)\right]=3$, να βρεθεί το :

$$\lim_{x\to 2}\left[f(x)g(x)\right]$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x+2\beta, & x\le 1\\ x^2+\beta x+2\alpha, & x>1\end{cases}$.Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ και η γραφική παράσταση της f περνά απο το σημείο Α(2,2) να βρεθούν οι τιμές των α και β.

3. Αν $f(x)=\dfrac{\alpha|x+2|+\beta|x-4|-2}{x^2-5x+6}$ και $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=10$ να βρεθούν οι αριθμοί $\alpha,\beta\in R$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x^2+x+4}$

β. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-5x+6}-4x$

γ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{16x^2+x+3}+\sqrt{2x^2+3x+5}+7x+8\right]$

δ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{9x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+x-2}+4x\right]$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5. Να βρεθούν τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x)=x^4\eta\mu\frac{1}{x^4}$, όταν $x\to 0$ και όταν $x\to\pm\infty$

2. $f(x)=x^5\eta\mu\frac{1}{x^3}$, όταν $x\to 0$ και όταν $x\to\pm\infty$

3. $f(x)=x^2\eta\mu\frac{1}{x^6}$, όταν $x\to 0$ και όταν $x\to\pm\infty$

....

....

....

....

....

....

....

....

6. Να βρεθούν τα όρια των συναρτήσεων:

1. $f(x)=\dfrac{3^x+5\cdot 2^{x+1}+7^x}{4^x-2\cdot 3^x+6\cdot e^x}$, όταν $x\to+\infty$

2. $f(x)=\dfrac{5^{x+2}-3\cdot 4^x+2^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x}{3^x-4\cdot 2^x+6\frac{1}{2^x}}$, όταν $x\to-\infty$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

7. **Να προσδιοριστούν οι αριθμοί $\alpha,\beta\in R$ ώστε:**

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{9x^2+3x+4}+\alpha x+\beta\right]=\frac{1}{3}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

8. **Να προσδιοριτεί ο α ώστε η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2-x+5}+\alpha x$ να έχει όριο καθώς $x\to-\infty$ και να βρεθεί η τιμή του ορίου.**

....

....

....

....

....

....

....

9. **Έστω $\alpha\in R$, $f:R\to R$ με:**

α. $(f\circ f)(x)=4x+3$ **και** **β.** $(f\circ f\circ f)(x)=8x+\alpha$ **για κάθε $x\in R$.**

Βρείτε το $\alpha\in R$ και τη συνάρτηση f.

....

....

....

....

10. Έστω $f: R \to R$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in R$: $f^3(x) + 3f(x) = 2x + 2003$

Δείξτε ότι:

α. η f είναι "1-1", **β.** υπάρχει η f^{-1} την οποία να βρείτε.

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: R \to R$. Δείξτε ότι:

α. Αν f, g είναι "1-1" τότε η gof είναι "1-1"

β. Αν f, g είναι αντιστρέψιμες τότε η gof είναι αντιστρέψιμη και

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

....

....

12. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: R \to R$ τέτοια ώστε $(f \circ f)(x) = x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in R$, δείξτε ότι:

α. $f(1)=1$ **β.** η συνάρτηση $g(x) = 1 + x(1 - f(x))$ δεν είναι "1-1"

....

....

....

....

....

....

....

....

....

13. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ γνήσια αύξουσα στο R, τέτοια ώστε $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in R$. Δείξτε ότι $f(x) = x$.

....

....

....

....

....

....

....

....

14. Έστω $f: R \to R$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} (xf(x)) = 1$ να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ β. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2xf(x)+x}{2x+xf(x)}$

....

15. Βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma \in R$ έτσι ώστε: $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\alpha x^3+\beta x^2+2x+3}{|x-1|}=\gamma$

....

16. Να βρεθεί το πολυώνυμο P(x) και το $\alpha \in R$ αν:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2} f(x)=3$ και $f(0)=1$

όπου $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x-1}{P(x)}$.

....

....

....

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}-\alpha x+\beta$ βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$

έτσι ώστε: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$

....

....

....

....

....

....

....

18. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$ και για κάθε $x\in R$

$(x-1)f(x)\geq \eta\mu(x-1)$

α. Βρείτε το f(1).

β. Αν $g(x)=\dfrac{\sqrt{1-\alpha+\alpha x}\ \sqrt{1\text{-}\beta\text{+}\beta x}\ \text{-}f(1)}{x-1}$, $\alpha,\beta\in R$. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to1} g(x)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

19. Έστω $f: R \to R$ συνεχής στο $x_0 = 2$. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x}{x-2} = 2003$

α. Βρείτε το f(2). **β.** Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

20. Δίνονται $f, g: [\alpha,\beta] \to R$ συνεχείς, με $f([\alpha,\beta]) = g([\alpha,\beta])$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε $(gof)(\xi_1) - (fog)(\xi_2) = \xi_1 - \xi_2$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x + (\alpha^2 - \alpha)x - \alpha^2$ με $0 < \alpha \neq 1$, $A_f = R$

α. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

β. Δείξτε ότι η f είναι γνήσια μονότονη.

γ. Λύστε την εξίσωση $\alpha^x + (\alpha^2 - \alpha)x = \alpha^2$.

δ. Βρείτε το σύνολο τιμών της f.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

22. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\alpha^x$, $g(x)=-\frac{1}{x}$ με $0<\alpha<1$.

α. Μελετήστε τις f, g ως προς τη μονοτονία.
β. Δείξτε ότι οι C_f, C_g έχουν μοναδικό σημείο τομής.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

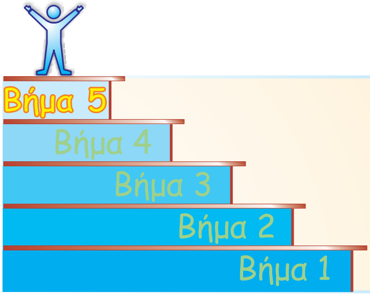
23. Δίνεται συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ συνεχής και τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$, $B(\beta,f(\beta))$ τα οποία είναι σημεία τομής της C_f με την διχοτόμο της 1ης γωνίας των αξόνων. Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε:

$$\frac{f(\xi)-\beta}{\xi-\alpha}=\frac{f(\xi)-\alpha}{\xi-\beta}$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....

24. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to R$ συνεχής. Αν για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ υπάρχει $y\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(x)|$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....



Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

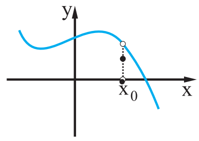
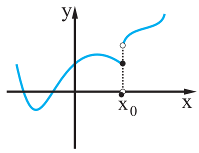
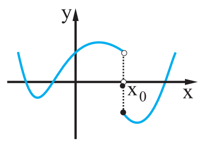
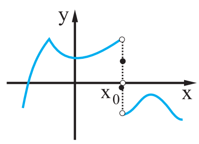
Α.α. Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο [α,β]. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] και $f(\alpha)\neq f(\beta)$ αποδείξτε ότι, για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε: $f(x_0)=n$

(Μονάδες 4)

β. Ποιο είναι το σύνολο τιμών της $f(x)=\dfrac{1}{x}$ όταν $x\in(0,1)$

(Μονάδες 2)

Β1. Αντιστοιχίστε σε καθένα από τα γράμματα Α,Β,Γ,Δ έναν αριθμό ώστε καθένα από τα σχήματα της πρώτης στήλης να ταιριάξει με τις κατάλληλες σχέσεις της δεύτερης στήλης.

	Στήλη Α	Στήλη Β
Α.		**1.** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$
Β.		**2.** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$
Γ.		**3.** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$
Δ.		**4.** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$

Α	Β	Γ	Δ

(Μονάδες 10)

Β2. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος).

α. Αν για μια συνεχή συνάρτηση στο (α,β) ισχύουν:

$$\lim_{x\to \alpha^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to \beta^-} f(x) = +\infty,$$

τότε η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β).

(Μονάδες 3)

β. Αν η f είναι συνεχής στο [-1,2] και f(-1)=2, f(2)=5, τότε υπάρχει πραγματικός $x_0 \in (-1,2)$, τέτοιος ώστε $f(x_0) = \pi$.

(Μονάδες 3)

γ. Αν $\lim\limits_{x\to \alpha^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to \beta^-} f(x) = +\infty$, τότε το πεδίο τιμών της f είναι το $(-\infty,+\infty)$

(Μονάδες 3)

Θέμα 2ο

Α. Έστω f, g συναρτήσεις συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και τέτοιες ώστε $f(\alpha)<g(\alpha)$, $f(\beta)>g(\beta)$. Να αποδείξετε ότι οι καμπύλες με εξισώσεις $y=f(x)$, $y=g(x)$ τέμνονται τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0\in(\alpha,\beta)$

(Μονάδες 15)

Β. Σε ποιό από τα παρακάτω διαστήματα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχει σίγουρα λύση της εξίσωσης $x^3=x+1$

Α. $(-2,-1)$ **Β.** $(1,\ 2)$ **Γ.** $(-1,0)$

Δ. $(0,1)$ **Ε.** $(2,3)$

(Μονάδες 10)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

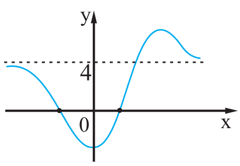
....

Θέμα 3ο

Α. Να προσδιορίσετε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+\alpha x}-\beta x\right)=1$

(Μονάδες 15)

Β. Με βάση το διπλανό σχήμα το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{f(x)}$ είναι ίσο με:



Α. $+\infty$ **Β.** $-\infty$ **Γ.** 0 **Δ.** 2 **Ε.** $\dfrac{1}{2}$

(Μονάδες 10)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Θέμα 4ο

Το ποσοστό επί τοις εκατό του τιμάριθμου μιας χώρας μετά από t χρόνια, δίνεται από τον τύπο: $f(t)=\dfrac{t+45}{t+5}$, $t\geq 0$.

α. Πόσο είναι σήμερα ο τιμάριθμος;

β. Να εξετάσετε αν στο μέλλον ο τιμάριθμος θα αυξηθεί ή θα μειωθεί.

γ. Ποιός θα είναι ο τιμάριθμος μετά από “πάρα πολλά” χρόνια αν το ποσοστό επί τοις εκατό συνεχίζει να εκφράζεται από τον παραπάνω τύπο;

(Μονάδες 25)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Κεφάλαιο 3ο

Διαφορικός λογισμός

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο αυτό θα πρέπει να είναι σε θέση:

1. Να γνωρίζει τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 και να τον ερμηνεύει ως ρυθμό μεταβολής.
2. Να γνωρίζει τις έννοιες ταχύτητα και επιτάχυνση κινητού, οριακό κόστος, οριακή είσπραξη, οριακό κέρδος και τη σχέση τους με την έννοια του παραγώγου.
3. Να γνωρίζει σε ποιά σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης ορίζεται η εφαπτομένη και να μπορεί κάθε φορά να σχηματίζει την εξίσωση της.
4. Να γνωρίζει:
   - ✓ ότι κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση σε σημείο x_0 είναι συνεχής στο σημείο αυτό
   - ✓ τις παραγώγους βασικών συναρτήσεων
   - ✓ τον κανόνα της αλυσίδας και
   - ✓ να μπορεί με τη βοήθειά τους να βρίσκει παραγώγους συναρτήσεων.
   - ✓ τα θεωρήματα: Rolle, Μέσης Τιμής και Fermat και να μπορεί να τα εφαρμόζει σε απλές ασκήσεις.
5. Να μπορεί να προσδιορίζει τα διαστήματα στα οποία μια συνάρτηση είναι:
   - ✓ Σταθερή
   - ✓ γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα
   - ✓ κυρτή ή κοίλη
   - ✓ και να βρίσκει:

     α. τα τοπικά ακρότατα και **β.** τα σημεία καμπή της.
6. Να μπορεί να βρίσκει το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης και το σύνολο λύσεων μιας εξίσωσης $f(x)=0$.

7. Να μπορεί να εφαρμόζει τους κανόνες de L’ Hospital στον υπολογισμό ορίων.

8. Να μπορεί να βρίσκει τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

9. Να μπορεί να χαράζει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με τη βοήθεια των παραγώγων.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ: Τύποι - Βασικές έννοιες

Ορισμός παράγωγου αριθμού

Ορισμός 1

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη** σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Δηλαδή: $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Αν θέσουμε $x-x_0=h \Leftrightarrow x=x_0+h$ τότε έχουμε: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Ορισμός 2

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ,αν και μόνο αν ,υπάρχουν στο R τα όρια: $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ίσα.

Τα παραπάνω όρια ονομάζονται **πλευρικές παράγωγοι στο x_0.**

Εξίσωση εφαπτομένης

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός έστω λ, τότε ορίζουμε ως **εφαπτομένη** της C_f στο σημείο Α την ευθεία (ε) που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Δηλαδή , αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0 ($\lambda=f'(x_0)=\varepsilon\varphi\omega$),

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) είναι:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

Παράγωγος και συνέχεια

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ'ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

α. Αν $f(x)=c,\ c\in R$ τότε $f'(x)=0$ $\qquad (c)'=0$

β. Αν $f(x)=x$ τότε $f'(x)=1$ $\qquad (x)'=1$

γ. Αν $f(x)=x^{\nu}$ $\nu\in N\text{-}\{0,1\}$ τότε $f'(x)=\nu\cdot x^{\nu-1}$ $\qquad (x^{\nu})'=\nu\cdot x^{\nu-1}$

δ. Αν $f(x)=\sqrt{x},\ x\in[0,+\infty)$ (στο $x=0$ δεν είναι παραγωγίσιμη)

Για $x\in(0,+\infty)$ είναι: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad (\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ε. Αν $f(x)=\eta\mu x$ τότε $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$ $\qquad (\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$

στ. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ τότε $f'(x)=-\eta\mu x$ $\qquad (\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$

ζ. Αν $f(x)=e^x$ τότε $f'(x)=e^x$ $\qquad (e^x)'=e^x$

η. Αν $f(x)=\ln x,\ x>0$ τότε $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ $\qquad (\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

Κανόνες παραγώγισης

α. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $(f+g)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $(f\cdot g)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Αν $c\in R$ και f παραγωγίσιμη στο x_0 τότε: $\quad (cf)'(x_0)=c\cdot f'(x_0)$

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$ τότε η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

- Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η σύνθεση της g με την f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

• Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(g(x))$ με την $g(x)$ να είναι παραγωγίσιμη στο A και την $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $g(A)$. Η $h=fog$ είναι παραγωγίσιμη στο A με $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$ ή $\frac{dh}{dx}=\frac{dh}{du}\frac{du}{dx}$, όπου $u=g(x)$. (Κανόνας αλυσίδας).

Αναφέρουμε τις παραγώγους βασικών σύνθετων συναρτήσεων μόνο τυπικά
(χωρίς το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων)

Συνάρτηση	Παράγωγος	Συνάρτηση	Παράγωγος
f^{ν}	$\nu\cdot f^{\nu-1}\cdot f'$	$\sqrt{f}$	$\frac{1}{2\sqrt{f}}f'$
$\eta\mu f$	$\sigma\upsilon\nu f\cdot f'$	$\sigma\upsilon\nu f$	$-\eta\mu f\cdot f'$
$\varepsilon\varphi f$	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f}\cdot f'$	$\sigma\varphi f$	$-\frac{1}{\eta\mu^2 f}\cdot f'$
e^f	$e^f\cdot f'$	$\ln f$	$\frac{1}{f}f'$
$\alpha^f, \alpha>0$	$\alpha^f\ln\alpha\cdot f'$	$\ell og_{\alpha}f,\ 0<\alpha\neq 1$	$\frac{1}{\ell n\alpha}\cdot\frac{1}{f}\cdot f'$

Θεώρημα Rolle

Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν ότι : είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]
είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε: υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi)=0$,
δηλαδή υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου στο διάστημα (α,β).

Θεώρημα μέσης τιμής

Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν ότι: είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]
είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)
τότε: υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Συνέπειες του θεωρήματος Μέσης Τιμης

Πρόταση 1

Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ ισχύει $f'(x)=0$ τότε η f είναι σταθερή στο Δ δηλαδή $f(x)=c$ για κάθε $x\in\Delta$.

Πρόταση 2

Αν οι f, g είναι συνεχείς σε διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $f'(x) = g'(x)$ τότε: $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

Θεώρημα 1

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ'ένα διάστημα Δ, τότε:

Αν $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ, η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Δ.

Αν $f'(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Δ.

Θεώρημα 2 (Fermat)

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε εσωτερικό σημείο x_0 του Δ στο οποίο παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε είναι: $f'(x_0) = 0$.

Θεώρημα 3

Έστω συνάρτηση f **συνεχής** στο (α, β).

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, x_0) και γνησίως φθίνουσα στο (x_0, β) τότε η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στη θέση x_0.

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, x_0) και γνησίως αύξουσα στο (x_0, β) τότε η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στη θέση x_0.

ή με άλλη διατύπωση:

Έστω f συνάρτηση **συνεχής** στο (α, β) και παραγωγίσιμη σ' αυτό με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 του (α, β).

Αν $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$

και $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (x_0, \beta)$, τότε:

η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στη θέση x_0 το $f(x_0)$.

Αν $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$

και $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (x_0, \beta)$, τότε:

η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στη θέση x_0 το $f(x_0)$.

Αν η f' διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε:

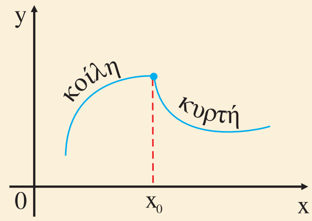
i. το $f(x_0)$ δεν είναι τ. ακρότατο

ii. η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

Αν $f''(x) > 0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ τότε η f είναι κυρτή στο Δ.
Αν $f''(x) < 0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

Πως ορίζεται το σημείο καμπής μιας συνάρτησης.
Μια συνάρτηση μπορεί να αλλάζει απο κυρτή σε κοίλη ή απο κοίλη σε κυρτή.
Αν αυτό συμβαίνει σε σημείο που η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη τότε το σημείο αυτό λέγεται **σημείο καμπής** της συνάρτησης.

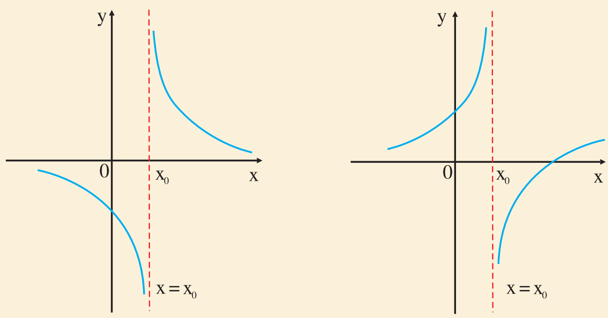


Θεώρημα

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε το $f''(x_0) = 0$.

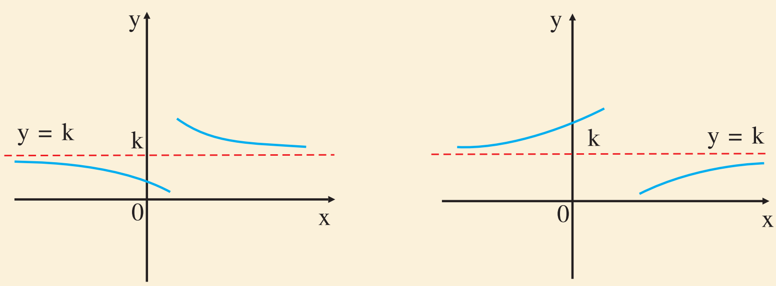
1. Κατακόρυφη ασύμπτωτη

Η ευθεία $x = x_0$ χαρακτηρίζεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.



2. Οριζόντια ασύμπτωτη

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = k \in R$ ή $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = k \in R$, τότε ορίζουμε οριζόντια ασύμπτωτη της C_f την ευθεία $y = k$ στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αντίστοιχα.

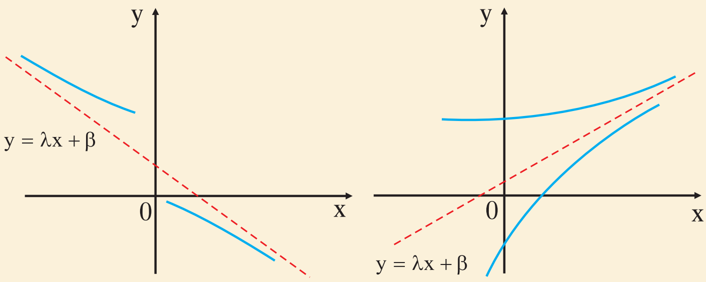


Πλάγια ασύμπτωτη

Ορίζουμε την ευθεία $y=\lambda x+\beta$ ως πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αν :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0 \text{ ή } \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$$

αντίστοιχα.



πλάγια ασύμπτωτη της f

Θεώρημα

Η $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$ αν και μόνον αν :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in R \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in R \text{ ή}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in R \text{ και } \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in R \text{ αντίτοιχα.}$$

Βήμα 1

Μαθαίνουμε τις αποδείξεις

ΘΕΩΡΙΑ 1 **Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τι προκύπτει για την παραγωγισιμότητα της f στο χ_0 ;**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$ έχουμε

$f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$, οπότε

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

$=f'(x_0)\cdot 0=0$, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ΘΕΩΡΙΑ 2 **Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c\,,c\in R$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή**

$$(c)'=0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα τυχαίο στοιχείο του R , τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0\,.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0\,,$$

δηλαδή $(c)'=0$.

ΘΕΩΡΙΑ 3 **Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή**

$$(x)'=1$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα τυχαίο στοιχείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1\,.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1\,,$$

δηλαδή $(x)'=1$.

ΘΕΩΡΙΑ 4 **Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}, \nu\in N-\{0,1\}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή**

$$(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα τυχαίο στοιχείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1}\,,$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1}\,,$$

δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$.

ΘΕΩΡΙΑ 5 **Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή**

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα τυχαίο στοιχείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ΘΕΩΡΙΑ 6 **Έστω συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, δηλαδή**

$$(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε $x\in R$ και $h\neq 0$ ισχύει :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h}=\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu h-\eta\mu x}{h}$$

$$=\eta\mu x\cdot\frac{(\sigma\upsilon\nu h-1)}{h}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}.$$

Επειδή

$$\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}=0,$$

έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\etaμx\cdot 0+\sigmaυνx\cdot 1=\sigmaυνx\,.$$

Δηλαδή, $(\etaμx)'=\sigmaυνx$.

ΘΕΩΡΙΑ 7 **Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigmaυνx$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=-\etaμx$, δηλαδή**

$$(\sigmaυνx)'=-\etaμx$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε $x\in R$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sigmaυν(x+h)-\sigmaυνx}{h}=\frac{\sigmaυνx\cdot\sigmaυνh-\etaμx\cdot\etaμh-\sigmaυνx}{h}$$

$$=\sigmaυνx\cdot\frac{\sigmaυνh-1}{h}-\etaμx\cdot\frac{\etaμh}{h}\,,$$

οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\sigmaυνx\cdot\frac{\sigmaυνh-1}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\left(\etaμx\cdot\frac{\etaμh}{h}\right)$$

$$=\sigmaυνx\cdot 0-\etaμx\cdot 1=-\etaμx\,.$$

Δηλαδή, $(\sigmaυνx)'=-\etaμx$.

ΘΕΩΡΙΑ 8 **Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:**

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x\neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\,.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή $\quad (f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

ΘΕΩΡΙΑ 9 **Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}, \nu\in N^*$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή**

$$(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε $x\in R^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})'=\left(\frac{1}{x^\nu}\right)'=\frac{(1)'x^\nu-1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2}=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}.$$

ΘΕΩΡΙΑ 10 **Αποδείξτε ότι, $(x^\kappa)'=\kappa x^{\kappa-1}$, με $k\in Z-\{0,1\}$ και $x\in R^*$.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από την ερώτηση 4 και 9 προκύπτει ότι, αν $k\in Z -\{0,1\}$,τότε $(x^\kappa)'=\kappa x^{\kappa-1}$.

Πράγματι , αν κ θετικός ακέραιος ισχύει $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$, όπου κ = ν , $\nu\in N-\{0,1\}$.

Αν κ αρνητικός ακέραιος ισχύει : $(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$, όπου κ = -ν , $\nu\in N-\{0,1\}$.

ΘΕΩΡΙΑ 11 **Έστω η συνάρτηση $f(x)=\text{εφ}x$. Αποδείξτε ότι, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1=R-\{\chi/\sigma\upsilon\nu\chi=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{\text{συν}^2x}$, δηλαδή**

$$(\text{εφ}x)'=\frac{1}{\text{συν}^2x}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, για κάθε $x \in R_1$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

ΘΕΩΡΙΑ 12 **Αποδείξτε ότι, η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in R - Z$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή**

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^{u}$. Επομένως,

$$y' = (e^{u})' = e^{u} \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

ΘΕΩΡΙΑ 13 **Αποδείξτε ότι, η συνάρτηση $f(x) = \alpha^{x}$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = \alpha^{x} \ln \alpha$, δηλαδή**

$$(\alpha^{x})' = \alpha^{x} \ln \alpha$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν $y = \alpha^{x} = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^{u}$. Επομένως,

$$y' = (e^{u})' = e^{u} \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^{x} \ln \alpha.$$

ΘΕΩΡΙΑ 14 **Αποδείξτε ότι, η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in R^*$ είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει:**

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$,

αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, $y=\ln(-x)$ και αν θέσουμε $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως,

$$y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει : $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

ΘΕΩΡΙΑ 15 **Διατυπώστε το θεώρημα Rolle και δώστε τη γεωμετρική του ερμηνεία .**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

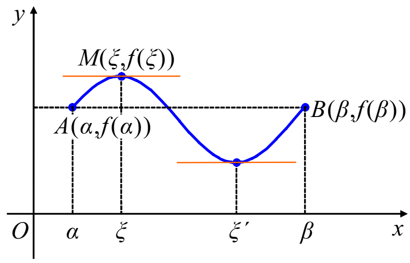
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και
- $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=0$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



ΘΕΩΡΙΑ 16 **Διατυπώστε το θεώρημα μέσης τιμής και δώστε τη γεωμετρική του ερμηνεία .**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

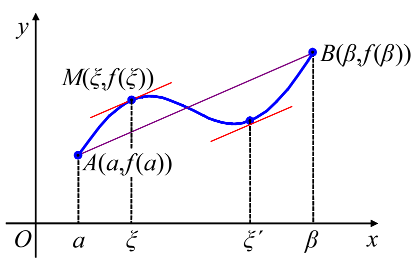
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



ΘΕΩΡΙΑ 17

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- **η f είναι συνεχής στο Δ και**
- **$f'(x)=0$ για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ,**

τότε αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.

Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

ΘΕΩΡΙΑ 18

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

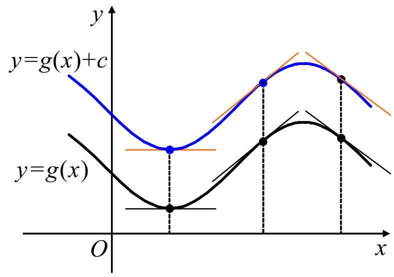
- **οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και**
- **$f'(x)=g'(x)$ για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:**

$$f(x)=g(x)+c$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0\,.$$



Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$,οπότε $f(x)=g(x)+c$.

ΘΕΩΡΙΑ 19 **Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα *Δ*.**

- **Αν $f'(x)>0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η *f* είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το *Δ*.**
- **Αν $f'(x)<0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η *f* είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.**

Ισχύει το αντίστροφο ; Δώστε ένα παράδειγμα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

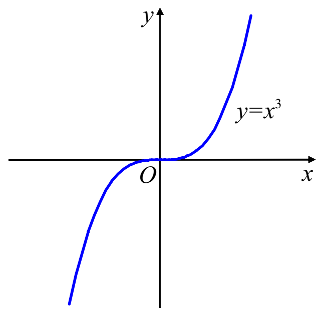
Έστω $f'(x)>0$ και $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$.

Στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$$

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ, η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ.

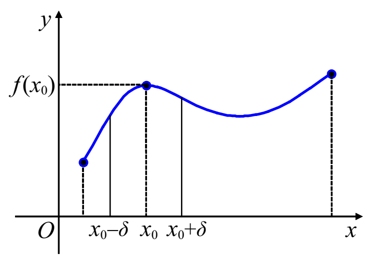


Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο R, έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$,η οποία δεν είναι θετική σε όλο το R, αφού $f'(0)=0$. Ισχύει όμως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in$ R.

ΘΕΩΡΙΑ 20 **Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:**

$$f'(x_0)=0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε

$(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq \Delta$ και $f(x)\leq f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

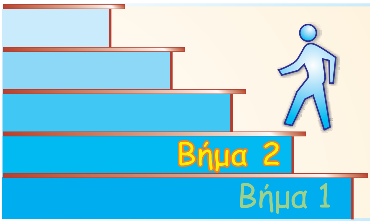
αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \qquad (2)$$

αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 . \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει $f'(x_0) = 0$.



Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις “κλειδιά”

Α. Από το σχολικό βιβλίο

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

§ 2.1-και 2.4	
Παράγωγος	
-Ορισμός παραγώγου	σελ. 220, άσκηση 2,4 (Α΄ ομάδα)
	σελ. 221, άσκηση 5,6,7,8
	σελ. 228, άσκηση 1 (Β΄ ομάδα)
	σελ. 240, άσκηση 7
-Παράγωγος συνάρτησης	σελ. 238, άσκηση 4
	σελ. 239, άσκηση 12,13,14
	σελ. 240, άσκηση 5,9
-Εφαπτομένη	σελ. 228, άσκηση 2,3,4 (Β΄ ομάδα)
	σελ. 239, άσκηση 8,9,10,11
	σελ. 240, άσκηση 1,2,3,4
	σελ. 241, άσκηση 10,11
-Ρυθμός μεταβολής	σελ. 242, Εφαρμογή 2
	σελ. 243, άσκηση 2,3
	σελ. 244, άσκηση 5 (Α΄ ομάδα)
	σελ. 244-245, άσκηση 2,4,5,7,8
§ 2.5 Θεωρήματα	
Rolle-ΘΜΤ	
§ 2.6 Συνέπειες ΘΜΤ	
-Θεωρητικές ασκήσεις	σελ. 248, εφαρμογές 2,3
-Εξισώσεις (τουλάχιστον μια ρίζα, το πολύ μια ρίζα, μοναδική κ.λ.π)	σελ. 247, εφαρμογή 1
	σελ. 249, άσκηση 1 (Β΄ ομάδα)

	σελ. 250, άσκηση 2,3,7
-Ανισότητες με ΘΜΤ	σελ. 252, εφαρμογή
	σελ. 250, άσκηση 4,5
-Να αποδεικνύουμε ότι η f είναι σταθερη	σελ. 252, εφαρμογή
	σελ. 256, άσκηση 1
	σελ. 257, άσκηση 1
-Εύρεση τύπου συνάρτησης	σελ. 293, άσκηση 11
	σελ. 308, άσκηση 4 (Α΄ ομάδα)
	σελ. 309, άσκηση 4 (Β΄ ομάδα)
§ 2.6 Μονοτονία συνάρτησης	
§ 2.7 Τοπικά ακρότατα	
-Στο θεώρημα μονοτονίας	σελ. 256, άσκηση 3,4
	σελ. 257, άσκηση 6
-Εύρεση τοπικών-ολικών ακρότατων	σελ. 268, άσκηση 3,4
	σελ. 270, άσκηση 6
-Ανισότητες με μονοτονία-ακρότατα	σελ. 258, άσκηση 7,8
	σελ. 266, εφαρμογή 2
	σελ. 269, άσκηση 3
	σελ. 291, άσκηση 2
	σελ. 292, άσκηση 6
-Στο θεώρημα Fermat	σελ. 268, άσκηση 5
	σελ. 269, άσκηση 4
	σελ. 292, άσκηση 7
-Σύνολο τιμών	σελ. 255, εφαρμογή 2
	σελ. 256, άσκηση 5
	σελ. 257, άσκηση 2
-Εξισώσεις	σελ. 256, άσκηση 6
	σελ. 257, άσκηση 5
	σελ. 267, άσκηση 2
	σελ. 269, άσκηση 1,2
- Προβλήματα	σελ. 257, άσκηση 3
	σελ. 266, εφαρμογή 3

σελ. 268, άσκηση 8, 10
σελ. 270-271, άσκηση 7, 8, 13

§ 2.8 Κυρτότητα - Σημεία καμπής

σελ. 277, άσκηση 2
σελ. 278-279, άσκηση 2, 35

§2.9 Ασύμπτωτες - Κανόνες De l' Hospital

σελ. 285, άσκηση 1,3 (Α΄ Ομάδα)
σελ. 285-286, άσκηση 1, 2 (Β΄ Ομάδα)
σελ. 285, άσκηση 4
σελ. 286, άσκηση 4,6

§ 2.10 Μελέτη συνάρτησης σελ. 290, άσκηση 3
- Γενικές ασκήσεις σελ. 292, άσκηση 8, 9, 10
- Ερωτήσεις κατανόησης σελ. 295-299

Β. Από τα Βιλιομαθήματα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
εκδόσεις "ΟΡΟΣΗΜΟ"

Βιβλιομάθημα 9ο
Όλα τα παραδείγματα
των μεθόδων: 1-3

Βιβλιομάθημα 10ο
Όλα τα παραδείγματα
των μεθόδων: 1-6

Βιβλιομάθημα 11ο
Λυμένες ασκήσεις: 1,3,4,5

Βιβλιομάθημα 12ο
Λυμένες ασκήσεις: 1,4,6,7,9

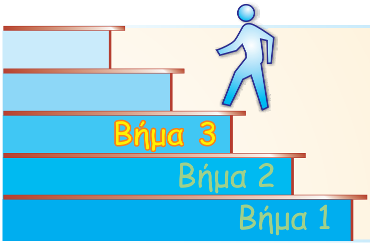
Βιβλιομάθημα 13ο
Λυμένες ασκήσεις: 1,2,4

Βιβλιομάθημα 14ο
Όλα τα παραδείγματα
των μεθόδων: 1-5

Βιβλιομάθημα 15ο
Όλα τα παραδείγματα
των μεθόδων: 1-5

Βιβλιομάθημα 16ο
Όλα τα παραδείγματα
των μεθόδων: 1-3

Βιβλιομάθημα 17ο
Λυμένες ασκήσεις: 1,2,3,4



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. Υποθέτουμε ότι σε κάποια αγορά η τιμή ενός κιβωτίου αχλαδιών είναι μ ευρώ, x είναι ο αριθμός των κιβωτίων (σε χιλιάδες) που εισάγονται στην αγορά κάθε μέρα και η εξίσωση που συσχετίζει αυτά είναι:

$$\mu x - 20\mu - 3x + 105 = 0 \quad (1)$$

Αν μετά από κάποια μέρα ο αριθμός των κιβωτίων που εισάγονται στην αγορά γίνεται μικρότερος κατά 250 κιβώτια την ημέρα, να βρείτε* το ρυθμό μεταβολής της αξίας του κιβωτίου όταν η ημερήσια εισαγωγή είναι 5.000 κιβώτια.

Λύση:

Αναζητούμε το $\mu'(t)$ όταν $x(t) = 5$.

Αν t είναι ο αριθμός των ημερών από τότε που αρχίζει η μείωση της εισαγωγής των κιβωτίων, τα μεγέθη μ και x είναι συνάρτηση του t. Επειδή η μείωση είναι κατά 250 κιβώτια την ημέρα: $x'(t) = -\frac{250}{1000} = -\frac{1}{4}$

Παραγωγίζουμε ως προς t τη δοθείσα σχέση (1).

$$\left(\mu(t)x(t)\right)' - 20\left(\mu(t)\right)' - 3\left(x(t)\right)' + (105)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mu'(t)x(t) + \mu(t)x'(t) - 20\mu'(t) - 3x'(t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mu'(t)\left(x(t) - 20\right) = -\mu(t)x'(t) + 3x'(t) \quad (2)$$

Στη σχέση (1) $x(t) = 5$ και $x'(t) = -\frac{1}{4}$ ενώ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\mu(t)5 - 20\mu(t) - 3\cdot 5 + 105 = 0 \Leftrightarrow -15\mu(t) = -90 \Leftrightarrow \mu(t) = 6\ €$$

Άρα από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\mu'(t)(5-20) = -6\left(-\frac{1}{4}\right) + 3\left(-\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \mu'(t)(-15) = \frac{6}{4} - \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$-15\mu'(t)=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \mu'(t)=-\frac{1}{20} \text{ €/μέρα}$$

2. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-2x}{x-3}=1 \text{ και } f(5)=6$$

i. Να δείξετε ότι $f(3)=6$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(3,f(3))$.

iii. Να δείξετε ότι η ευθεία $y=x+2$ τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα (3,5).

iv. Αν η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(3,5)$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

Λύση:

i. Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x-3}$. Τότε $\lim\limits_{x\to 3}g(x)=1$ και $f(x)-2x=g(x)(x-3)$.

Άρα $f(x)=g(x)(x-3)+2x$ (1). Από την (1) παίρνουμε:

$$\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\left[g(x)(x-3)+2x\right]=6$$

Επειδή η f είναι συνεχής ισχύει: $f(3)=6$.

ii. Αρχικά πρέπει να βρούμε τον $f'(3)$.

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-2x+2x-6}{x-3}=$$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-2x}{x-3}+\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{x-3}=1+2=3$, άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow y-6=3(x-3)\Leftrightarrow y=3x-3$$

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $h(x)=f(x)-x-2$ (2)

που είναι συνεχής στο διάστημα [3,5] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης είναι $h(3)\cdot h(5)=(f(3)-3-2)(f(5)-5-2)=1\cdot(-1)<0$,

συνεπώς υπάρχει $x_0\in(3,5)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0)-x_0-2\Leftrightarrow f(x_0)=x_0+2$$

Το σημείο $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι σημείο τομής της C_f με την $y = x + 2$.

iv. Επειδή η f στρέφει τα κοίλα κάτω, ισχύει ότι για κάθε $x \in (3,5)$ η $f'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο (3,5),άρα είναι και "1–1". Επειδή $f(3) = f(5)$ υπάρχει $\xi \in (3,5)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ (απο θεώρημα Rolle),.Το ξ είναι μοναδικό αφού η f΄ είναι συνάρτηση 1–1.Επομένως

$$\text{Αν } x \in (3,5) \text{ και } x < \xi : f'(x) > f'(\xi) = 0$$

$$\text{Αν } x \in (3,5) \text{ και } x > \xi : f'(x) < f'(\xi) = 0$$

x	3		ξ		5
f'		+	0	-	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Ο πίνακας μεταβολών της f στο (3,5).

Άρα η f παρουσιάζει στο ξ τοπικό μέγιστο και είναι μοναδικό.

3. Δίνεται η συνάρτηση $\begin{cases} e^{2\lambda} + x + 1, & x < 1 \\ -\lambda^3 x + 3, & x \geq 1 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής.

Λύση:

Για $x < 1$ η συνάρτηση $f(x) = x + 1 + e^{2\lambda}$ είναι συνεχής. Το ίδιο ισχύει και για $x > 1$ αφού $f(x) = -\lambda^3 x + 3$.

Για να είναι συνεχής στο R,πρέπει να είναι συνεχής και στο 1.Δηλαδή πρέπει

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1).$$

Όμως $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 + e^{2\lambda}$ ενώ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\lambda^3 + 3 = f(1)$.

Άρα πρέπει να ισχύει $e^{2\lambda} + 2 = -\lambda^3 + 3 \Leftrightarrow e^{2\lambda} + \lambda^3 - 1 = 0 \qquad (1)$.

Προφανής λύση της (1) είναι το μηδέν , $\lambda = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\lambda) = e^{2\lambda} + \lambda^3 - 1,\ \lambda \in R$, τότε $g'(\lambda) = 2e^{2\lambda} + 3\lambda^2 > 0$ για κάθε $\lambda \in R$.Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο R και συνεπώς η $g(\lambda) = 0$ έχει μοναδική λύση στο R.

4. Ένας πληθυσμός βακτηρίων μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες ώστε ο ρυθμός μεταβολής του να ισούται με το 1/10 του πληθυσμού. Βρείτε τον πληθυσμό x(t) αν στην αρχή υπάρχουν 1000 βακτήρια. Πόσος είναι ο πληθυσμός μετά από 10 ώρες;

Λύση

Για $t \geq 0$ ισχύει $x'(t)=\frac{1}{10}x(t)$ απο όπου παίρνουμε ισοδύναμα:

$$\frac{x'(t)}{x(t)}=\frac{1}{10} \Leftrightarrow \left(\ln(x(t))\right)'=\left(\frac{t}{10}\right)' \Leftrightarrow \ln(x(t))=\frac{t}{10}+c\,,\ c\in R\,.$$

Άρα $x(t)=e^{\frac{t}{10}+c}=e^c e^{\frac{t}{10}}=c_1 e^{\frac{t}{10}}$, όπου $c_1=e^c$.

Όμως $x(0)=1000 \Leftrightarrow c_1=1000$, άρα τελικά $x(t)=1000e^{\frac{t}{10}}$ με $t\geq 0$ και ο πληθυσμός μετά από 10 ώρες είναι $x(10)=1000e$.

5. Δίνονται $f,g:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ παραγωγίσιμες και τέτοιες ώστε:

$g'(x)=-f(x)g^2(x)$ **και** $f'(x)=-g(x)f^2(x)$ **και** $g(0)=1$ **και** $f(0)=2$.

α. Δείξτε ότι $f(x)=2g(x)$ για κάθε $x\geq 0$.

β. Βρείτε τους τύπους των f, g.

Λύση

α. Για $x\geq 0$, ισχύουν: $\begin{cases} g'(x)=-f(x)g^2(x) \\ f'(x)=-g(x)f^2(x) \end{cases}$, με διαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{-g(x)f^2(x)}{-f(x)g^2(x)} \quad ή \quad \frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f(x)}{g(x)} \quad ή \quad f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=0$$

$$\frac{f'(x)g(x)-g'(x)-f(x)}{g^2(x)}=0 \quad ή \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0\,.$$

Άρα υπάρχει $c\in R$ ώστε $\frac{f(x)}{g(x)}=c \Leftrightarrow f(x)=cg(x)$ για κάθε $x\geq 0$.

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=cg(0)\Leftrightarrow c=2$. Άρα τελικά $f(x)=2g(x)$ για κάθε $x\geq 0$.

β. Για $x \geq 0$ ισχύει:

$$g'(x) = -f(x)g^2(x) \quad \text{ή} \quad g'(x) = -2g(x)g^2(x) \quad \text{ή} \quad \frac{-g'(x)}{g^3(x)} = 2 \quad \text{ή} \quad \frac{-2g'(x)g(x)}{g^4(x)} = 4$$

$\left(\dfrac{1}{g^2(x)}\right)' = (4x)'$, άρα υπάρχει $c \in R$ ώστε να ισχύει :

$\dfrac{1}{g^2(x)} = 4x + c \Leftrightarrow g^2(x) = \dfrac{1}{4x+c} \Leftrightarrow g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x+c}}$ με $x \geq 0$ (διότι $g(x) > 0$ για $x \geq 0$)

Όμως $g(0) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{c}} = 1 \Leftrightarrow c = 1$. Άρα τελικά $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x+1}}$ και $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}$ με $x \geq 0$.

6. Δίνεται συνάρτηση $f:[1,2] \to R$ για την οποία ισχύουν :

- $f''(x) > 0$ **για κάθε** $x \in [1,2]$
- $f(2) = 2f(1)$

α. Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

β. Για $x \in (1,2)$ δείξτε ότι: $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} < \dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}$.

Λύση:

α. • Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ στο $[1,2]$.

• η g είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ (άρα και συνεχής) με $g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

• $g(2) = \dfrac{f(2)}{2} = \dfrac{2f(1)}{2} = f(1) = g(1)$

Άρα σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = 0$$

Δηλαδή: $\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi f'(\xi) = f(\xi) \Leftrightarrow f'(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $h(x)=xf'(x)-f(x)$ στο $[1,2]$.

Για $x\in[1,2]$ ισχύει $h'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)>0$,δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο [1,2] οπότε και "1–1" ,άρα θα έχει το πολύ μια ρίζα στο $[1,2]$.Έτσι το ξ ,που προκύπτει απο το θ.Rolle ,είναι μοναδικό στο διάστημα $(1,2)$

β. Θεωρούμε τυχαίο $x\in(1,2)$.

- Από Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1,x]$, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi_1\in(1,x)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

- Από Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x,2]$, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi_2\in(x,2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(x)}{2-x}$$

Επειδή $1<\xi_1<\xi_2<2$ και η f' είναι γν. αύξουσα στο $[1,2]$, (αφού $f''(x)>0$ στο $[1,2]$), ισχύει : $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$ δηλαδή $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}<\dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}$

7. α. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,2]\to R$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi)=\dfrac{2f(0)+3f(2)}{5}$, αν $f(0)<f(2)$.

β. Αν ξ = 1 δείξτε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,2)$ με $x_1<x_2$ ώστε $2f'(x_1)=3f'(x_2)$

γ. Αν για την $g(x)=f(x)+\alpha x^2+\beta x$ εφαρμόζεται το Θ. Rolle στα διαστήματα [0,1] και [1,2] βρείτε τα α, β (Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,2))

δ. Δείξτε ότι υπάρχει $p\in(0,2)$ ώστε $5f''(p)=f(0)-f(2)$

(Η f΄ είναι παραγωγίσιμη στο (0,2))

Λύση

α. Θεωρούμε την $h(x)=5f(x)-2f(0)-3f(2)$ στο $[0,2]$

Η h είναι συνεχής στο $[0,2]$

- $h(0)=5f(0)-2f(0)-3f(2)=3(f(0)-f(2))<0$

$h(2)=5f(2)-2f(0)-3f(2)=2(f(2)-f(0))>0$

δηλαδή $h(0)\cdot h(2)<0$. Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(0,2)$ ώστε $h(\xi)=0$ ή

$$5f(\xi)-2f(0)-3f(2)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=\frac{2f(0)+3f(2)}{5}$$

β. • Από το Θ.Μ.Τ για την f στο $[0,1]$ υπάρχει $x_1\in(0,1)$ ώστε

$$f'(x_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{2f(0)+3f(2)}{5}-f(0)=\frac{3(f(2)-f(0))}{5}$$

• Από το Θ.Μ.Τ για την f στο $[1,2]$ υπάρχει $x_2\in(1,2)$ τότε

$$f'(x_2)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-\frac{2f(0)+3f(2)}{5}=\frac{2(f(2)-f(0))}{5}$$ οπότε

$2f'(x_1)=\dfrac{6(f(2)-f(0))}{5}$ και $3f'(x_2)=\dfrac{6(f(2)-f(0))}{5}$, άρα $2f'(x_1)=3f'(x_2)$.

γ. Η g είναι $\left\langle\begin{array}{l}\text{συνεχής στο } [0,2]\\ \text{παραγωγίσιμη στο } (0,2)\end{array}\right.$ και επειδή ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στα διαστήματα $[0,1]$ και $[1,2]$ θα ισχύει:

$$\begin{cases}g(0)=g(1)\\ g(2)=g(1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(0)=f(1)+\alpha+\beta\\ f(2)+4\alpha+2\beta=f(1)+\alpha+\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=f(0)-f(1)\\ 3\alpha+\beta=f(1)-f(2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\alpha-\beta=f(1)-f(0)\\ 3\alpha+\beta=f(1)-f(2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{2f(1)-f(0)-f(2)}{2}\\ \beta=\dfrac{3f(0)+f(2)-4f(1)}{2}\end{cases}$$

δ. Ισχύουν $g'(x)=f'(x)+2\alpha x$ και $g''(x)=f''(x)+2\alpha$

• Από Θ. Rolle για την g στο $[0,1]$ υπάρχει $\xi_1\in(0,1)$ ώστε $g'(\xi_1)=0$

• Από Θ. Rolle για την g στο $[1,2]$ υπάρχει $\xi_2\in(0,1)$ ώστε $g'(\xi_2)=0$

• Από Θ. Rolle για την g΄ στο $[\xi_1,\xi_2]$ υπάρχει $p\in(\xi_1,\xi_2)$ δηλαδή $p\in(0,2)$ ώστε

$g''(p)=0$ ή $f''(p)+2\alpha=0\Leftrightarrow f''(p)=f(2)+f(0)-2f(1)\Leftrightarrow$

$$f''(p)=f(2)+f(0)-\frac{2f(0)+3f(2)}{5}\Leftrightarrow f''(p)=\frac{f(0)-f(2)}{5}$$

8.α. Δίνεται $f:(0,+\infty)\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη ώστε $xf''(x)-f'(x)=1$ για κάθε $x>0$. Αν η ευθεία $y=x+2$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της A(1,f(1)) δείξτε ότι $f(x)=x^2-x+3$

β. Δίνεται $g:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-\sqrt{f(x)}\right)=4$. Βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g στο $+\infty$.

Λύση:

α. • Η εφαπτομένη της c_f στο σημείο $A(1,f(1))$ έχει εξίσωση:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow\ y=f'(1)x+f(1)-f'(1)$$

όμως μας δίνεται ότι η εφαπτομένη είναι η $y=x+2$,άρα πρέπει

$$\begin{cases}f'(1)=1\\ \text{και}\\ f(1)-f'(1)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f'(1)=1\\ \text{και}\\ f(1)=3\end{cases}$$

• Για $x>0$ ισχύει : $xf''(x)-f'(x)=1\Leftrightarrow\dfrac{xf''(x)-f'(x)}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow\left(\dfrac{f'(x)}{x}\right)'=\left(\dfrac{-1}{x}\right)'$

Άρα υπάρχει $c\in R$ τέτοιος ώστε: $\dfrac{f'(x)}{x}=\dfrac{-1}{x}+c\Leftrightarrow f'(x)=cx-1$ για $x>0$.

Όμως $f'(1)=1\Leftrightarrow c-1=1\Leftrightarrow c=2$. Άρα για $x>0$ είναι $f'(x)=2x-1$.

$f'(x)=\left(x^2-x\right)'$, άρα υπάρχει $k\in R$ ώστε $f(x)=x^2-x+k$ με $x>0$.

Όμως $f(1)=3\Leftrightarrow k=3$, άρα τελικά $f(x)=x^2-x+3$ με $x>0$.

β. • Η $y=\lambda x+\mu$ είναι ασύμπτωτη της c_g στο $+\infty$ οπότε:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}\ \text{ και }\ \mu=\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\lambda x\right)$$

• Θέτουμε $h(x)=g(x)-\sqrt{f(x)}$ στο $(0,+\infty)$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=4$

Ισχύει $g(x)=h(x)+\sqrt{f(x)}$. Άρα:

$$\frac{g(x)}{x}=h(x)\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x^2-x+3}{x^2}}\ \Leftrightarrow\ \frac{g(x)}{x}=h(x)\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

Άρα $\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[h(x)\dfrac{1}{x} + \sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}\right] = 4\cdot 0 + 1 = 1$.

• Επίσης, $\mu = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-\lambda x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)+\sqrt{f(x)}-x\right) =$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(h(x)+\sqrt{x^2-x+3}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(h(x)+\frac{-x+3}{\sqrt{x^2-x+3}+x}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(h(x)+\frac{-1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x}}+1}\right) = 4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}.$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y = x + \dfrac{7}{2}$ είναι η ασύμπτωτη της c_g στο $+\infty$.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (0,+\infty) \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμες για τις οποίες ισχύουν:

- $f(1) = g(1) = \sqrt{e}$
- $f'(x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g'(x) = \ell nx - \dfrac{1}{x}$ **για** $x > 0$

α. Δείξτε ότι $f(x)g(x) = e^x - \ell nx$ για $x > 0$.

β. Αν τα $A(2, f(2))$ και $B(2, g(2))$ είναι σημεία καμπής των γραφικών παραστάσεων των f, g αντίστοιχα και οι εφαπτόμενες σ'αυτα είναι παράλληλες βρείτε τα $f'(2)$ και $g'(2)$.

γ. Βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)g(x)}{x}$.

Λύση:

α. Για $x>0$ ισχύει: $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)+\dfrac{1}{x} = f(x)g(x)+\ell nx$

$$\left(f(x)g(x)+\ell nx\right)' = f(x)g(x)+\ell nx.$$

Άρα υπάρχει $c\in R$ ώστε $f(x)g(x)+\ell nx = ce^x$ ή $f(x)g(x) = ce^x - \ell nx$ με $x>0$.

Για $x=1$ έχουμε: $f(1)\cdot g(1) = c\cdot e \Leftrightarrow \sqrt{e}\cdot\sqrt{e} = c\cdot e \Leftrightarrow c=1$

Άρα: $f(x)\cdot g(x) = e^x - \ell nx$

β. Τα $A(2,f(2))$, $B(2,g(2))$ είναι σημεία καμπής των c_f, c_g αντίστοιχα.

Άρα $f''(2)=g''(2)=0$. Τώρα για $x>0$ ισχύουν:

$f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$ και

$f''(x)g(x)+f'(x)g'(x)+g''(x)f(x)+g'(x)f'(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}$ οπότε για $x=2$ έχουμε

$$f''(2)g(2)+2f'(2)g'(2)+g''(2)f(2)=\frac{4e^2+1}{4}$$

$f'(2)g'(2)=\dfrac{4e^2+1}{8}$ $(f'(2)=g'(2)$ διότι οι εφαπτομένες είναι παράλληλες)

$(f'(2))^2=\dfrac{4e^2+1}{8}$,άρα $f'(2)=g'(2)=\pm\sqrt{\dfrac{4e^2+1}{8}}$

γ. Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ell nx}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ell nx)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-\ell nx}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{\ell nx}{x}\right)=+\infty$.

10. Έστω $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$. Να βρεθούν τα α, β, γ, δ ώστε η f να παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο με τετμημένη 1, καμπή στο σημείο με τετμημένη –1 και η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο με τετμημένη 0 να είναι η $y=2x+5$.

Λύση:

Είναι $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$ και $f''(x)=6\alpha x+2\beta$. Πρέπει $f'(1)=0$, δηλ.

$3\alpha+2\beta+\gamma=0$ (1) και $f''(-1)=0$, δηλ. $-6\alpha+2\beta=0\Leftrightarrow-3\alpha+\beta=0$ (2)

Πρέπει επίσης $f'(0)=2$ και $f(0)=5$,απο όπου παίρνουμε $\gamma=2$ (3) και $\delta=5$ (4).

Άρα: $(1)\overset{(3)}{\Leftrightarrow}3\alpha+2\beta=-2\overset{(2)}{\Leftrightarrow}3\alpha+2\cdot3\alpha=-2\Leftrightarrow9\alpha=-2\Leftrightarrow\alpha=-\dfrac{2}{9}$.

Επομένως από τη (2) προκύπτει : $\beta = -\dfrac{2}{3}$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \pi \ell n x,\ x > 0$.

i. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να δείξετε ότι $e^e \cdot \pi^\pi > e^{2\pi}$.

Λύση:

i. $f'(x) = 1 - \pi\dfrac{1}{x}$. Είναι $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-\pi}{x} > 0 \Leftrightarrow x - \pi > 0 \Leftrightarrow x > \pi$.

Σχηματίζουμε τον επόμενο πίνακα :

x	0		π	
f'		-	0	+
f		↘	ελαχ.	↗

$f(\pi) = \pi - \pi \ell n \pi$ είναι η ελάχιστη τιμή της f.

ii. Επειδή $e < \pi$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \pi]$ έχουμε:

$$f(e) > f(\pi) \Leftrightarrow e - \pi \ell n e > \pi - \pi \ell n \pi \Leftrightarrow$$

$$e - \ell n e^\pi > \pi - \ell n \pi^\pi \Leftrightarrow \ell n \pi^\pi - \ell n e^\pi > \pi - e \Leftrightarrow$$

$$\ell n\left(\frac{\pi^\pi}{e^\pi}\right) > \pi - e \Leftrightarrow \frac{\pi^\pi}{e^\pi} > e^{\pi - e} \Leftrightarrow \frac{\pi^\pi}{e^\pi} > \frac{e^\pi}{e^e} \Leftrightarrow e^e \cdot \pi^\pi > (e^\pi)^2$$

Άρα $e^e \cdot \pi^\pi > e^{2\pi}$.

Σημειώσεις: (1): Το ακρότατο είναι ολικό διότι: $\ell im_{x \to 0^+} (x) = +\infty$ και $\ell im_{x \to +\infty} (x) = +\infty$.

12. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \dfrac{\ell n x^2}{x^2},\ x \neq 0$.

i. Να βρεθούν τα ακρότατα της f(x) και το σύνολο τιμών της.

ii. Να δειχθεί ότι $x^{2e} \leq e^{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

iii. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\ell n x^2 = \dfrac{x^2}{4}$.

Λύση:

i. Είναι $f'(x)=\dfrac{\dfrac{2x}{x^2}\cdot x^2-\ell nx^2\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{2x\left(1-\ell nx^2\right)}{x^4}$ για $x\neq 0$.

Έχουμε $f'(x)>0\Leftrightarrow 2x\left(1-\ell nx^2\right)>0$. Για το πρόσημο της f' σχηματίζουμε τον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$	$-\sqrt{e}$		0		$\sqrt{e}$	
$2x$	$-$		$-$	‖	$+$		$+$
$1-\ell nx^2$	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$
f'	$+$		$-$	‖	$+$		$-$
f	$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	‖	$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ell nx^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\ell nx^2\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}2x}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

Όμοια βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2}\lim\limits_{x\to0^+}\ell nx^2=(+\infty)(-\infty)=-\infty$ και όμοια $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

Ακόμη είναι $f\left(\sqrt{e}\right)=\dfrac{\ell n\left(\sqrt{e}\right)^2}{\sqrt{e}^{\,2}}=\dfrac{1}{e}$ και $f\left(-\sqrt{e}\right)=\dfrac{1}{e}$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right]$.

ii. Επειδή η συνάρτηση ℓnx είναι γνησίως αύξουσα,έχουμε :

$$x^{2e}\le e^{x^2}\Leftrightarrow \ell nx^{2e}\le e^{x^2}\Leftrightarrow \ell n\left(x^2\right)^e\le \ell ne^{x^2}\Leftrightarrow e\ell nx^2\le x^2\Leftrightarrow \frac{\ell nx^2}{x^2}\le\frac{1}{e}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f(x)\le\dfrac{1}{e}$, που ισχύει διότι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right]$.

iii. $\ell nx^2=\dfrac{x^2}{4}\Leftrightarrow\dfrac{\ell nx^2}{x^2}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{e}$

Όμως όταν $x \in (0, \sqrt{e})$ η f είναι γνησίως αύξουσα με σύνολο τιμών $\left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$ και επειδή $\frac{1}{4} \in \left(-\infty, \frac{1}{e}\right)$ υπάρχει $\xi_1 \in (0, \sqrt{e})$ τέτοιο ώστε $f(\xi_1) = \frac{1}{4}$.

Όταν $x \in \left[\sqrt{e}, +\infty\right)$ η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα με σύνολο τιμών $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ και επειδή $\frac{1}{4} \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ υπάρχει μοναδικό ξ_2, $\xi_2 \in (\sqrt{e}, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_2) = \frac{1}{4}$.

Άρα, στο $(0, +\infty)$ η $f(x) = \frac{1}{4}$ έχει δύο ακριβώς λύσεις. Επειδή η f είναι άρτια, η εξίσωση θα έχει δύο ακριβώς λύσεις και στο $(-\infty, 0)$. Άρα, συνολικά η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{4}$ θα έχει ακριβώς τέσσερις λύσεις.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - \alpha^2}{2\alpha x} - \ell n x + \ell n \alpha$, $\alpha > 0$, $x > 0$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - \alpha^2 = 2\alpha x(\ell n x - \ell n \alpha)$.

iii. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

iv. Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί ώστε α<β, να δείξετε ότι:

$$\ell n \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta}$$

Λύση:

i. Έχουμε $f'(x) = \dfrac{(x^2 - \alpha^2)' \cdot 2\alpha x - (x^2 - \alpha^2)(2\alpha x)'}{(2\alpha x)^2} - \dfrac{1}{x} =$

$$= \frac{2x 2\alpha x - 2\alpha(x^2 - \alpha^2)}{4\alpha^2 x^2} - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x^2 + \alpha^2}{2\alpha x^2} - \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{x^2 + \alpha^2 - 2\alpha x}{2\alpha x^2} = \frac{(x - \alpha)^2}{2\alpha x^2} \geq 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

x	0		α	
f'		+	0	+
f		↗		↗

ii. $x^2-\alpha^2=2\alpha x(\ell nx-\ell n\alpha)\Leftrightarrow \dfrac{x^2-\alpha^2}{2\alpha x}-\ell nx+\ell n\alpha=0\Leftrightarrow f(x)=0$

Όμως $f(\alpha)=0$ (προφανής λύση). Επειδή f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ το είναι η μοναδική της ρίζα.

iii.α. *Έλεγχος για κατακόρυφη ασύμπτωτη*

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{x^2-\alpha^2}{2\alpha x}-\ell nx+\ell n\alpha\right]=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{x^2-\alpha^2-2\alpha x\cdot\ell nx}{2\alpha x}+\ell n\alpha\right]=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{2\alpha x}(x^2-\alpha^2-2\alpha x\cdot\ell nx)\right]+\ell n\alpha$$

Έχουμε: $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2\alpha x}=+\infty$ (1)

$$\lim_{x\to0^+} x\ell nx=\lim_{x\to0^+}\frac{\ell nx}{\frac{1}{x}}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

Άρα $\displaystyle\lim_{x\to0^+}(x^2-\alpha^2-2\alpha x\cdot\ell nx)=-\alpha^2$ (2). Από τις (1) και (2) έχουμε

$\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$. Άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

β. *Έλεγχος για οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-\alpha^2}{2\alpha x}-\ell nx+\ell n\alpha\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\alpha^2-2\alpha x\ell nx+2\alpha x\ell n\alpha}{2\alpha x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{\alpha^2}{x^2}+2\alpha\frac{\ell nx}{x}+2\alpha\frac{\ell n\alpha}{x}\right)}{2\alpha}=+\infty,\ \text{διότι}:$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\alpha\ell n\alpha}{x}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ell nx}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Άρα η δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\alpha^2}{2\alpha x}-\frac{\ell nx}{x}-\frac{\ell n\alpha}{x}=\frac{1}{2\alpha}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2\alpha}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\alpha^2}{2\alpha x}-\ell nx+\ell n\alpha-\frac{1}{2\alpha}x=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\alpha^2-2\alpha x\ell nx+x^2}{2\alpha x}+\ell n\alpha=+\infty$$

Άρα δεν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη.

iv. $\ell n\frac{\alpha}{\beta}>\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}\Leftrightarrow \ell n\alpha-\ell n\beta>\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}\Leftrightarrow \frac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha\beta}-\ell n\beta+\ell n\alpha>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(\beta)>0\Leftrightarrow f(\beta)>f(\alpha)$, που ισχύει διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και $\beta>\alpha$.

14. Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x)=\frac{\ell nx+1}{x}$$

Λύση:

Πρέπει $x\neq 0,\ x>0\Leftrightarrow x\in(0,+\infty)$,άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $(0,+\infty)$.Η f είναι συνεχής ,ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων ,στο πεδίο ορισμού της και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο: $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ell nx-1}{x^2}=-\frac{\ell nx}{x^2}$

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow -\frac{\ell nx}{x^2}=0\Leftrightarrow \ell nx=0\Leftrightarrow x=1$ (πιθανό ακρότατο)

$$f'(x)>0\Leftrightarrow -\frac{\ell nx}{x^2}>0\Leftrightarrow \ell nx<0\Leftrightarrow x<1$$

x	0		1		$+\infty$
f'		+	0	−	
f		↗		↘	

Απο τα παραπάνω προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.Παρουσιάζει μέγιστο για $x=1$ το $f(1)=1$.

Έχουμε: $$f''(x)=\frac{\frac{1}{x}x^2+\ell nx2x}{x^4}=\frac{2x\ell nx-x}{x^4}=\frac{2\ell nx-1}{x^3}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2\ell nx-1}{x^3}=0 \Leftrightarrow \ell nx=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\sqrt{e}$ (πιθανό σημείο καμπής)

$f''(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{2\ell nx-1}{x^3}>0 \Leftrightarrow \ell nx>\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x>\sqrt{e}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\frown$		$\smile$	

Άρα στη θέση $x=\sqrt{e}$ η f παρουσιάζει σημείο καμπής το $A\left(\sqrt{e}, f\left(\sqrt{e}\right)\right)=\left(\sqrt{e}, \dfrac{3}{2\sqrt{e}}\right)$

δ. $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\ell nx+1}{x}=0 \Leftrightarrow x=e^{-1} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}$. Άρα τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $A\left(\dfrac{1}{e},0\right)$. Τον άξονα y΄y δεν τον τέμνει διότι $x \neq 0$.

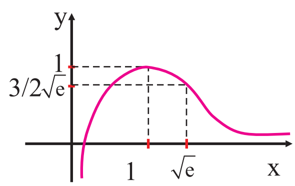
ε. Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ell nx+1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{1}{x}(\ell nx+1)\right]=(+\infty)(-\infty)=-\infty$, άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ell nx+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0=\lambda$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ell nx+1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0=\beta$$

Άρα η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γρ. παράστασης της f στο $+\infty$.

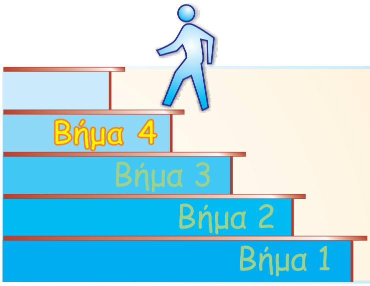
στ. **Γραφική παράσταση**



Πίνακας μεταβολών

x	0		1		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$		$-$	
f''		$-$		$-$	0	$+$	
f							

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ell nx+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ και επειδή η f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση x = 1 το f(1) = 1 το πεδίο τιμών της είναι το $(-\infty,1]$.



Λύνουμε μόνοι μας

1. Αν $f'(x)=3x^2\eta\mu x+x^3\sigma\upsilon\nu x$ και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(0,4)$, να βρείτε τον τύπο της f.

2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ώστε η συνάρτηση:

$f(x)=\begin{cases}\alpha x^2-\beta x+2, & -1\le x\le 0\\ x^2+x-\gamma, & 0<x\le 1\end{cases}$, να ικανοποιεί της υποθέσεις του θ.Rolle στο διάστημα [–1,1].

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

4. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [0,α] με $|f''(x)|\le m$ για κάθε $x\in(0,\alpha)$. Αν υπάρχει $\gamma\in(0,\alpha)$ τέτοιο ώστε $f'(\gamma)=0$, δείξτε ότι:

$$|f'(0)|+|f'(\alpha)|\le \alpha\cdot m$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5. Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x)+xf''(x)=0, \text{ για κάθε } x\in R \text{ και } f(0)=1$$

Δείξτε ότι $f(x)=1$, για κάθε $x\in R$

....

6. Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσημη στο $[\alpha,\beta]$ με $\alpha<0<\beta$ και $f(0)=\dfrac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{\beta-\alpha}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

7. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(xy)=xf(y)+yf(x)(1)$, $x,y\in(0,\infty)$ και $f'(1)=2$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

....

....

....

8. **Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσημη στο R με**

$$2f(x) \geq f(\alpha) + f(\beta),\ x \in R$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta):\ f''(x_0) = 0$

....

....

....

....

....

....

....

9. **Αν η συνάρτηση f είναι 2 φορές παρ/μη στο** $[-1,1]$ **με** $f(0)=0$ **και** $g(x)=f(x)(x^2-1)$, **να δείξετε ότι υπάρχει** $\xi \in (-1,1)$ **τέτοιος ώστε** $g''(\xi)=0$.

....

....

....

....

....

....

....

10.α. **Έστω η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με** $f''(x) \neq 0$, **για κάθε** $x \in R$. **Να δείξετε ότι η εξίσωση** $f'(x)=0$ **έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.**

β. Να λύσετε την εξίσωση: $e^x = (e-1)x+1$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

11. $f:[0,1]\to[0,1]$ **παραγωγίσιμη με** $f(0)=0,\ f(1)=1$.

i. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ **ώστε** $f(x_0)=1-x_0$

ii. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\,(0,1)$ **με** $\xi_1\neq\xi_2$ **ώστε** $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

12. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R* και ισχύει για κάθε $x\in R^*$

$xf'(x)=(x+1)f(x)$ **(1) και** $f(1)=e,\ f(-1)=\dfrac{1}{e}$. **Να βρείτε το τύπο της f.**

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

13. **Αν f συνεχής στο** $[-4,4]$, $f(-4)=20$, $f(4)=22$ **και παραγωγίσιμη στο (–4,4), τότε υπάρχουν** ξ_1,ξ_2 **στο** $(-4,4)$ **:** $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=8$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

14. **Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f τέμνει τις ευθείες** $y=1$ **και** $y=-4$ **σε σημεία με τετμημένες** $x=1$ και $x=5$, **να δείξετε ότι υπάρχουν** ξ_1,ξ_2 **στο** $(1,5)$**:** $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{4}{f'(\xi_2)}=-4$.

....
....
....

....

....

....

....

15. **Έστω ότι η ευθεία $y = x - 3$ είναι ασύμπτωτη της γρ. παράστασης της f στο $+\infty$.**

i. **Να βρεθούν τα όρια** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$.

ii. **Να βρεθεί ο πραγματικός λ αν :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lambda f(x) - 4\eta\mu x}{xf(x) - x^2 + 4x} = 2$

....

....

....

....

....

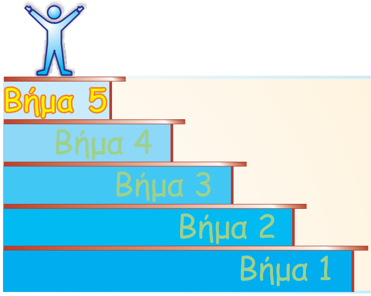
....

....

....

....

....



Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

Α.α. Έστω f, g συναρτήσεις τέτοιες ώστε:

- να είναι συνεχείς σε διάστημα Δ.
- $f'(x)=g'(x)$, για κάθε σημείο x εσωτερικό του Δ.

Αποδείξτε τότε, ότι οι συναρτήσεις f, g διαφέρουν κατά κάποια σταθερά c, δηλαδή $f(x)=g(x)+c$.

(Μονάδες 4)

β. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, για κάθε $x\geq 0$ και η γραφική της παράσταση, διέρχεται από σημείο (4,6).

(Μονάδες 2)

Β1. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος).

α. Αν η f έχει 4 ρίζες τότε η f' έχει τουλάχιστον 3 ρίζες.

(Μονάδες 3)

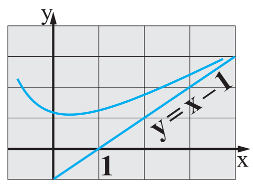
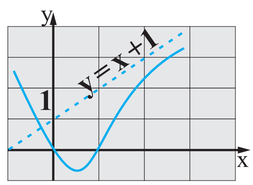
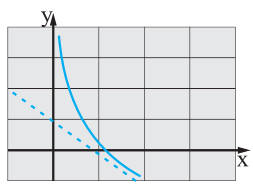
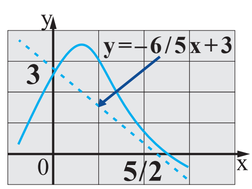
β.Αν η f' έχει 2 ρίζες τότε η f έχει το πολύ 2 ρίζες

(Μονάδες 3)

γ.Κάθε πολυώνυμο τρίτου βαθμού έχει πάντα σημείο καμπής.

(Μονάδες 3)

Β2.Αντιστοιχίστε σε καθένα από τα γράμματα Α,Β,Γ,Δ έναν αριθμό από το 1 έως το 4, ώστε κάθε όριο της πρώτης στήλης να ταιριάξει με το κατάλληλο σχήμα.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
Α. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{6}{5}x\right)=3$	**1.** 
Β. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-1$	**2.** 
Γ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=1$	**3.** 
Δ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)=1$	**4.** 

Α	Β	Γ	Δ

(Μονάδες 10)

Θέμα 2^0

Α.Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν ίσες παραγώγους στο διάστημα [2,20] και οι καμπύλες $\psi=f(x)$, $\psi=g(x)$ διέρχονται από τα σημεία (4,10), (4,7) αντιστοίχως, τότε $f(10)-g(10)=$

Α. 17 **Β.** -3 **Γ.** 3 **Δ.** -17 **Ε.** 0

(Μονάδες 10)

Β.Αποδείξτε ότι $\ell n(1+x)\le x$, για $x\ge 0$.

(Μονάδες 15)

....

....

....

....

....

....

....

....

Θέμα 3ο

Η συνάρτηση θέσης ενός σωματιδίου που κινείται πάνω στον άξονα $x'x$ είναι: $S(t)=t^3-9t^2+24t$

Να βρείτε:

α.Τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το σωματίδιο κινείται προς τα δεξιά.

β.Τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το σωματίδιο κινείται προς τα δεξιά και επιταχύνει.

γ.Τις χρονικές στιγμές t_1,t_2 κατά τις οποίες η ταχύτητα του σωματιδίου είναι ίση με το μηδέν.

δ.Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία η επιτάχυνση του σωματιδίου είναι ίση με το μηδέν.

ε.Αν σχεδιάσουμε την καμπύλη της συνάρτησης θέσης, τότε ποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά θα είχαν τα σημεία της που αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές t_0,t_1,t_2

(Μονάδες 25)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Θέμα 4^0

Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση f, αν $f(0)=0$ και $f'(x)e^{f(x)}=2x$, για κάθε $x\in\Re$.

(Μονάδες 25)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Κεφάλαιο 4ο

Ολοκληρωτικός λογισμός

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο αυτό θα πρέπει να είναι σε θέση:

1. Να γνωρίζει τις έννοιες παράγουσα ή αρχική συνάρτηση, αόριστο ολοκλήρωμα και να μπορεί να υπολογίζει απλά αόριστα ολοκληρώματα με τη βοήθεια των μεθόδων ολοκλήρωσης.

2. Να επιλύει προβλήματα στα οποία δίνεται ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους ως προς ένα άλλο και ζητείται η συνάρτηση που εκφράζει τη σχέση των δύο μεγεθών.

3. Να γνωρίζει τις στοιχειώδεις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος και να μπορεί να τις εφαρμόζει.

4. Να γνωρίζει το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και να μπορεί να το εφαρμόζει στον υπολογισμό απλών ολοκληρωμάτων.

5. Να υπολογίζει τα εμβαδά επιπέδων χωρίων που ορίζονται από τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ : Τύποι - Βασικές έννοιες

Πίνακας Αόριστων Ολοκληρωμάτων

$\int 0dx = c,\ c\in R$	$\int cdx = cx + c_1$	$\int \frac{1}{x}dx = \ell n\lvert x\rvert + c,\ c\in R$
$\int \alpha x^{\nu}dx = \alpha\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + c,\ c\in R$	$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + c,\ c\in R$	$\int e^x dx = e^x + c,\ c\in R$
$\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c,\ c\in R$	$\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c,\ c\in R$	$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \varepsilon\varphi x + c,\ c\in R$
$\int \frac{1}{\eta\mu^2 x}dx = -\sigma\varphi x + c,\ c\in R$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + c,\ c\in R$	$\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ell n\alpha} + c,\ c\in R$

Θεώρημα: Αν f συνεχής στο Δ και $\alpha, x\in\Delta$ τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ, δηλαδή $F'(x)=f(x) \Leftrightarrow \left[\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right]' = f(x)$.

Η συνάρτηση $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

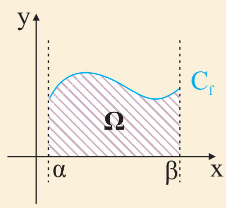
Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού (Θ.Θ.Ο.Λ.)

Αν $F(x)$ μια παράγουσα της f στο Δ και f συνεχής στο Δ και α,β ανήκουν στο Δ τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha) = [F(x)]_{\alpha}^{\beta}$$

1.α. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\ge 0$ τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από την C_f (γραφική παράσταση της f) τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ είναι

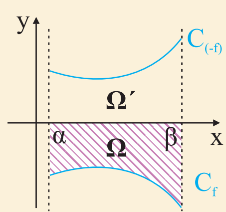
$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$



Παρατήρηση

Το χωρίο Ω ορίζεται και ως το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύουν $\alpha\le x\le\beta$ και $0\le y\le f(x)$.

β. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\le 0$ για τα $x\in[\alpha,\beta]$ τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\alpha$, $x=\beta$ είναι $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}[-f(x)]dx$.

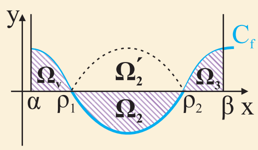


Ισοδύναμη έκφραση του $E(\Omega)$ **:**

Το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύουν $\alpha \le x \le \beta$ και $f(x) \le y \le 0$.

γ. Αν μια συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο τότε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι

$E(\Omega)=\int_\alpha^\beta |f(x)|dx$.



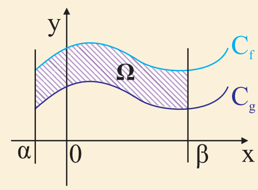
Στο παράδειγμα του σχήματος είναι:

$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)=$

$=\int_\alpha^{\rho_1} f(x)dx+\int_{\rho_1}^{\rho_2}(-f(x))dx+\int_{\rho_2}^{\beta} f(x)dx$

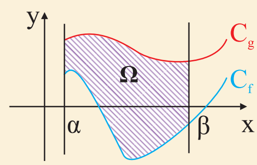
2. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συνεχών συναρτήσεων f, g στο $[\alpha,\beta]$ και από τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|dx$.

Ειδικότερα:



α. Αν $f(x) \ge g(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$ τότε

$E(\Omega)=\int_\alpha^\beta [f(x)-g(x)]dx$

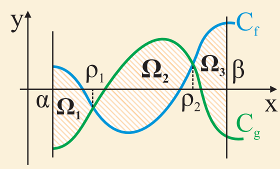


β. Αν $f(x) \le g(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$ τότε

$E(\Omega)=\int_\alpha^\beta [g(x)-f(x)]dx$

γ. Αν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο

τότε $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|dx$.



Στο παράδειγμα του σχήματος είναι:

$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)=$

$\int_\alpha^{\rho_1}(f(x)-g(x))dx+\int_{\rho_1}^{\rho_2}(g(x)-f(x))dx+\int_{\rho_2}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$

ΘΕΩΡΙΑ 1 **Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε:**

- **όλες οι συναρτήσεις της μορφής**

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbf{R},$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- **κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή**

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbf{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, με $c \in$ R, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, διότι :

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

- Έστω G μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε

$$G'(x) = F'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Άρα, σύμφωνα με γνωστό πόρισμα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

ΘΕΩΡΙΑ 2 **Αν $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$ και η f είναι σ υ ν ε χ ή ς σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει:**

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx.$$

Πως ερμηνεύεται γεωμετρικά η παραπάνω ιδιότητα;

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι:

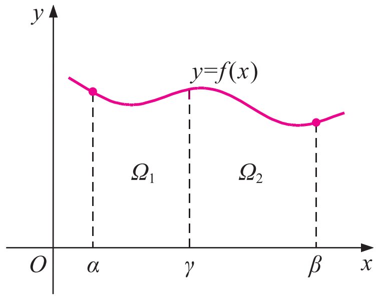
$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$$

αφού

$$E(\Omega_1) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx\,, \quad E(\Omega_2) = \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

και

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\,.$$



ΘΕΩΡΙΑ 3 **Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση**

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt\,, \quad x \in \Delta\,,$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)\,, \quad \textbf{για κάθε} \quad x \in \Delta\,.$$

Δώστε μια εποπτική ερμηνεία του παραπάνω θεωρήματος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει (βλ. σχήμα) ως εξής:

$$F(x+h) - F(x) = \int_{x}^{x+h} f(t)dt$$

$=$ Εμβαδόν του χωρίου Ω.

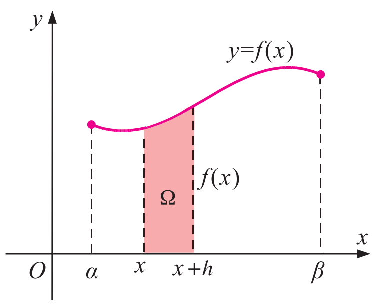
$\approx f(x)\cdot h\,,$ για μικρά $h > 0$.

Άρα, για μικρά $h > 0$ είναι

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x)\,,$$

οπότε

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$



ΘΕΩΡΙΑ 4 **Αποδείξτε ότι $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))\cdot g'(x)$, με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν θέσουμε

$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ τότε $F'(x)=f(x)$ και $\left(F(g(x))\right)'=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$

Δηλαδή:

$$\left(F(g(x))\right)'=\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))\cdot g'(x).$$

ΘΕΩΡΙΑ 5 **Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε να ισχύει :

$$G(x)=F(x)+c \qquad (1)$$

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε :

$G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$. Επομένως,

$$G(x)=F(x)+G(\alpha) \qquad (2)$$

Από την (2), για $x=\beta$, έχουμε :

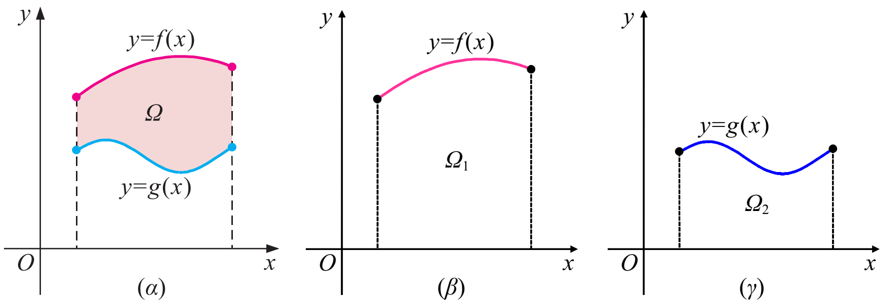
$$G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+G(\alpha)$$

Άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$.

ΘΕΩΡΙΑ 6 **Έστω, τώρα, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.Αποδείξτε ότι**

$$E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx .$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Παρατηρούμε ότι

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)-E(\Omega_2)=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx .$$

Επομένως, $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$.

ΘΕΩΡΙΑ 7 **Έστω, τώρα, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Αποδείξτε ότι**

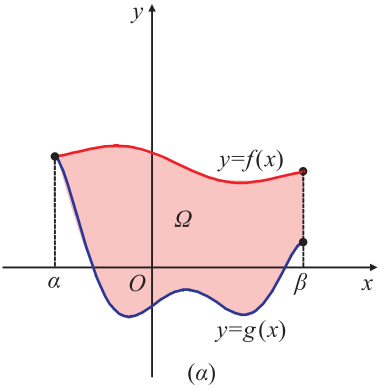
$$E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx .$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

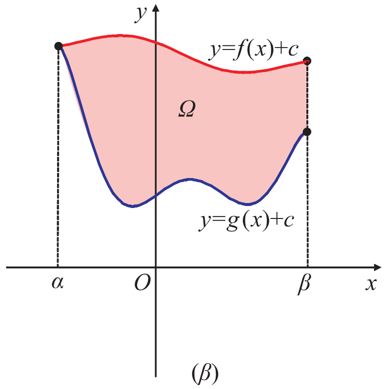
Πράγματι, επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c\in \mathbb{R}^*$ τέτοιος ώστε :

$$f(x)+c\geq g(x)+c\geq 0 \text{, για κάθε } x\in[\alpha,\beta] .$$

Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω'.



(α)



(β)

Επομένως, έχουμε:

$$E(\Omega)=E(\Omega')=\int_\alpha^\beta [(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx\,.$$

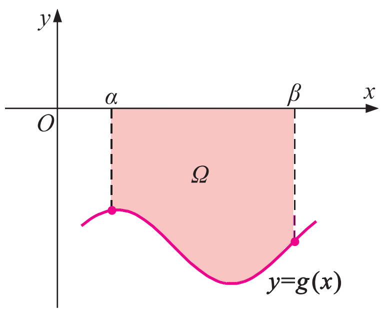
ΘΕΩΡΙΑ 8 **Αποδείξτε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, με $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ δίνεται από τον τύπο $E(\Omega)=-\int_\alpha^\beta g(x)dx$.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0$, έχουμε

$$E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$$

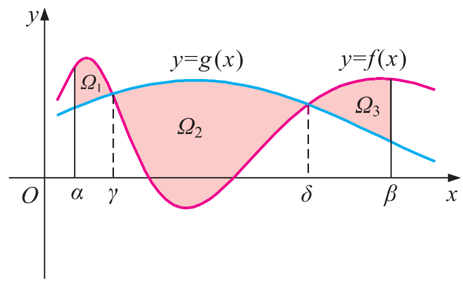
$$=\int_\alpha^\beta [-g(x)]dx=-\int_\alpha^\beta g(x)dx\,.$$



Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε:

$$E(\Omega)=-\int_\alpha^\beta g(x)dx$$

ΘΕΩΡΙΑ 9 **Όταν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, όπως στο επόμενο σχήμα, αποδείξτε ότι το εμβα-**



δόν του χωρίου *Ω* που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|\,dx$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

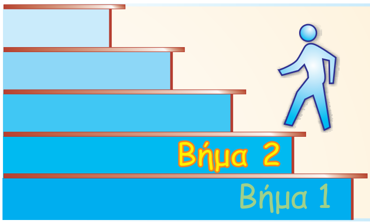
Είναι $E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)=$

$$=\int_\alpha^\gamma (f(x)-g(x))dx+\int_\gamma^\delta (g(x)-f(x))dx+\int_\delta^\beta (f(x)-g(x))dx$$

$$=\int_\alpha^\gamma |f(x)-g(x)|\,dx+\int_\gamma^\delta |f(x)-g(x)|\,dx+\int_\delta^\beta |f(x)-g(x)|\,dx$$

$$=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|\,dx\ .$$

Επομένως , $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|\,dx$.



Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις "κλειδιά"

Α. Από το σχολικό βιβλίο

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

§ 3.1-3.2 Αόριστο ολοκλήρωμα	
-Ασκήσεις υπολογισμού	σελ. 316, ασκήσεις:1iv,vi,vii,2iv,v3 (Α΄ ομάδα)
	σελ. 317 ασκήσεις: 3,4,7
-Προβλήματα	σελ. 308, ασκήσεις:6 (Α΄ ομάδα)
	σελ. 308-309, ασκήσεις: 2,3 (Β΄ ομάδα)
§ 3.4-3.5 Ορισμένο ολοκλήρωμα	
-Ασκήσεις υπολογισμού	σελ. 339, ασκήσεις: 8,9
	σελ. 340, ασκήσεις: 11,12
	σελ. 352, ασκήσεις: 1,4
-Η συνάρτηση $\int_a^x f(t)dt$	σελ. 339, ασκήσεις:3,5,6
§ 3.6 Εμβαδόν επιπέδου χωρίου	σελ. 349, ασκήσεις: 3,4 (Α΄ ομάδα)
	σελ. 349-351, ασκήσεις: 1,2,5,9,12 (Β΄ ομάδα)
	σελ. 352, ασκήσεις: 5,6
	σελ. 353 ασκήσεις: 8,9
-Γενικές ασκήσεις	σελ. 353 άσκηση 10
-Ερωτήσεις κατανόησης	σελ. 354-359

Β. Από τα Βιλιομαθήματα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
εκδόσεις "ΟΡΟΣΗΜΟ"

Βιβλιομάθημα 18ο

Όλα τα παραδείγματα των μεθόδων : 1 - 4

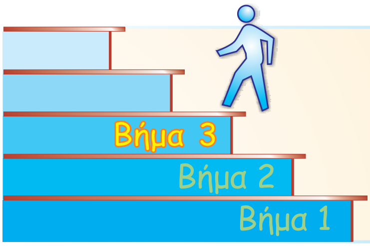
Βιβλιομάθημα 19ο

Όλα τα παραδείγματα των μεθόδων : 1 - 8

Βιβλιομάθημα 20ο

Λυμένες ασκήσεις : 2, 3, 7

Όλα τα παραδείγματα : 1 - 4



Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. Να βρεθεί η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

(1) $f(1)=1$

(2) $f'(x)=\frac{1}{x}$**, για κάθε** $x>0$

Λύση:

Από την (2) έπεται ότι: για κάθε $x>0$, $f(x)=\int \frac{1}{x}dx=\ell nx+c$ (*)

όμως $f(1)=1\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\ell n1+c=1\Leftrightarrow c=1$

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι $f(x)=\ell nx+1,\ \ x>0$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ell nx}{x^2},\ \ x>0$**. Να βρείτε τις τιμές των** $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ **ώστε η συνάρτηση** $g(x)=\frac{\alpha\ell nx+\beta}{x},\ \ x>0$ **να είναι αρχική (παράγουσα) της f στο** $(0,+\infty)$.

Λύση:

Για να είναι η g αρχική της f στο $(0,+\infty)$ πρέπει και αρκεί για κάθε $x>0$,

$$g'(x)=f(x)\Leftrightarrow\frac{\alpha-\alpha\ell nx-\beta}{x^2}=\frac{\ell nx}{x^2}\Leftrightarrow\alpha-\alpha\ell nx-\beta=\ell nx\Leftrightarrow$$

$\alpha-\alpha\ell nx-\beta-\ell nx=0\Leftrightarrow(-\alpha-2)\ell nx+\alpha-\beta=0$ για κάθε $x>0$.

Άρα πρέπει $\begin{cases}-\alpha-1=0\\ \text{και}\\ \alpha-\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\ \text{και}\\ \beta=-1\end{cases}$. Δηλαδή $(\alpha,\beta)=(-1,-1)$

3.α. Να βρείτε τους $A, B \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει η σχέση

$$\frac{2x}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}-\{1,2\}.$$

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{2x}{x^2-3x+2}dx$.

Λύση:

α. $\frac{2x}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1,2\}$

δηλ. $2x=A(x-2)+B(x-1)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1,2\}$

ή $2x=(A+B)x-2A-B$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1,2\}$

οπότε $\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=4 \end{cases}$

β. $\int \frac{2x}{x^2-3x+2}dx \overset{\alpha)}{=} \int\left(\frac{-2}{x-1}+\frac{4}{x-2}\right)dx=-2\int\frac{1}{x-1}dx+4\int\frac{1}{x-2}dx=$

$=-2\ell n|x-1|+4\ell n|x-2|+c$

4. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

(1) $f(1)=2$ **(2)** $xf'(x)+f(x)=2x$, **για κάθε x>0**

α. Βρείτε την f. **β. Υπολογίστε το:** $\int f(x)dx$

Λύση:

α. Για κάθε $x>0$, $xf'(x)+f(x)=2x \Leftrightarrow (f(x)\cdot x)'=2x$ οπότε $f(x)\cdot x=\int 2xdx=x^2+c$,

για κάθε $x>0$ ή $f(x)=\frac{x^2+c}{x}$, $x>0$ (*) όμως $f(1)=2\Leftrightarrow 1+c=2\Leftrightarrow c=1$.

Άρα $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$, $x>0$

β. $\int f(x)dx=\int\frac{x^2+1}{x}dx=\int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+\ell nx+c$

5. **Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και τέτοια ώστε:** $\int f(x)e^x dx = x^x + c,\ c\in\mathbb{R}$

α. Να βρεθεί το: $I=\int e^x\cdot f'(x)dx$

β. Να προσδιορισθεί η f.

Λύση:

α. $I=\int e^x\cdot f'(x)dx = e^x f(x)-\int e^x f(x)dx \overset{\text{υποθ}}{=} e^x f(x)-(x^x+c)=$

$= e^x f(x)-x^x-c$

β. Αφού $\int f(x)e^x dx = x^x + c$, έπεται ότι $f(x)\cdot e^x=(x^x+c)'$, για κάθε $x>0$, δηλ.

$f(x)\cdot e^x = x^x(1+\ell nx)$, για κάθε $x>0$ ή $f(x)=e^{-x}\cdot x^x(1+\ell nx)$, για κάθε $x>0$.

6. **Έστω f συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο R. Αν η F είναι μία αρχική της f στο R, δείξτε ότι:** $\int f(\alpha x+\beta)dx=\frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)+c,\quad \alpha\neq 0$

Λύση:

Αφού F μία αρχική της f στο R έπεται ότι $\int f(x)dx = F(x)+c$ (1) οπότε:

$$\int f(\alpha x+\beta)dx \underset{dx=\frac{1}{\alpha}dt}{\overset{\alpha x+\beta=t}{=}} \int f(t)\frac{1}{\alpha}dt=\frac{1}{\alpha}\int f(t)dt \overset{(1)}{=}\frac{1}{\alpha}F(t)+c=\frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)+c$$

7. **Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη συνθήκη :**

$$f'(\ell nx)=\begin{cases}1, & x\in(0,1]\\ x, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

Λύση:

Θέτοντας $\ell nx=t$ έχουμε: $f'(t)=\begin{cases}1, & t\le 0\\ e^t, & t>0\end{cases}$

και επομένως, ολοκληρώνοντας παίρνουμε: $f(t)=\begin{cases}t+c_1, & t\le 0\\ e^t+c_2, & t>0\end{cases}$

Η απαίτηση όμως της συνέχειας της f δίνει: $\lim\limits_{t\to 0^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$

δηλ. $1 + c_2 = c_1$

Άρα οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι: $f(x) = \begin{cases} x + 1 + c_2, & x \le 0 \\ e^x + c_2, & x > 0 \end{cases}$, που προφανώς επαληθεύουν την αρχική συνθήκη.

8.α. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int (1-x)\cdot e^{-x}dx$

β. Βρείτε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **για την οποία ισχύει:**

$$f'(x) = \frac{1-x}{e^x}, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και της οποίας η γραφική παράσταση έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ **την ευθεία** $y=2$

Λύση:

α. $\int (1-x)e^{-x}dx = \int (x-1)\cdot\left(e^{-x}\right)'dx = (x-1)e^{-x} - \int e^{-x}dx =$

$= (x-1)e^{-x} + e^{-x} + c = xe^{-x} + c,\ c\in\mathbb{R}$

β. $f'(x) = \frac{1-x}{e^x} = (1-x)e^{-x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $f(x) = \int (1-x)e^{-x}dx = x\cdot e^{-x} + c$,

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (*)

Όμως η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$. Επομένως θα

ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-x} + c\right) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right) + c = 2 \overset{\text{L'Hospital}}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} + c = 2 \Leftrightarrow 0 + c = 2 \Leftrightarrow c = 2$

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $f(x) = x\cdot e^{-x} + 2,\ x\in\mathbb{R}$

9. Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{\pi/6}\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu 2x}dx - \int_0^{\pi/6}\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu 2x}dx = \frac{\pi}{6}$

Λύση:

Είναι: $\int_0^{\pi/6}\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu 2x}dx - \int_0^{\pi/6}\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu 2x}dx = \int_0^{\pi/6}\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu 2x}dx =$

$$=\int_0^{\pi/6}\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}dx=\int_0^{\pi/6}dx=\frac{\pi}{6}$$

10. α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,α] (α>0) δείξτε ότι:

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx=\int_0^{\alpha} f(\alpha-x)dx$$

β. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx$

Λύση:

α. Είναι: $\int_0^{\alpha} f(\alpha-x)dx \overset{\alpha-x=t}{=} \int_{\alpha}^{0} f(t)(-dt)=-\int_{\alpha}^{0} f(t)dt=\int_{0}^{\alpha} f(t)dt$

β. Είναι: $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx\overset{\alpha)}{=}\int_0^{\pi/2}\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}dx=I\quad(1)$$

Έχουμε: $2I=I+I\overset{(1)}{=}\int_0^{\pi/2}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx+\int_0^{\pi/2}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

11. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο [1,2]. Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) και Β(2,1) να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος: $\int_1^2 x\left(2f(x)+xf'(x)\right)dx$

Λύση:

Επειδή $A(1,2)\in c_f \Leftrightarrow f(1)=2$, και $B(2,1)\in c_f \Leftrightarrow f(2)=1$

οπότε $\int_1^2 x\left(2f(x)+xf'(x)\right)dx=\int_1^2\left(2xf(x)+x^2f'(x)\right)dx$

$$=\int_1^2\left(x^2f(x)\right)'dx=\left[x^2f(x)\right]_1^2=$$

$$=2^2 f(2)-1^2 f(1)=4f(2)-f(1)=4\cdot 1-2=2$$

12. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και έστω F μία παράγουσα της f στο R. Αν ισχύει: $\int_0^x (x-t)f(t)dt = x-F(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρεθεί ο τύπος της f .

Λύση:

Η δοθείσα σχέση ισοδύναμα γράφεται:

$$x\cdot\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t\cdot f(t)dt = x-F(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Με παραγώγιση παίρνουμε:

$$\int_0^x f(t)dt + x\cdot f(x)-xf(x)=1-f(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

δηλ. $$\int_0^x f(t)dt = 1-f(x)\quad (1),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Με νέα παραγωγιση έχουμε:

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=-f'(x)\Leftrightarrow f'(x)+f(x)=0$

$$\Leftrightarrow e^x\left(f'(x)+f(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left(e^x f(x)\right)'=0$$

$$\Leftrightarrow e^x f(x)=c \Leftrightarrow f(x)=\frac{c}{e^x}\qquad (2)$$

Η σχέση (1) για $x=0$ δίνει: $f(0)=1\overset{(2)}{\Leftrightarrow} c=1$

Δηλ. τελικά λόγω της (2) ο ζητούμενος τύπος της f είναι: $f(x)=\frac{1}{e^x}=e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$

13. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R και τέτοια ώστε:

(1) $f'(x)\ge 0\quad ,x\in\mathbb{R}$ **(2)** $f(0)=0$

Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_0^{f(x)} u^2du+e^x-1=0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα.

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_0^{f(x)} u^2du+e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$

Με απλή επαλήθευση διαπιστώνουμε ότι: $g(0)=\int_0^{f(0)} u^2 du \overset{(2)}{=} \int_0^0 u^2 du = 0$

δηλ. ότι η g έχει ρίζα τον αριθμό 0.

Όμως για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g'(x)=\underbrace{f^2(x)}_{\geq 0}\cdot\underbrace{f'(x)}_{\geq 0}+\underbrace{e^x}_{>0}>0$

Άρα η g είναι γν. αύξουσα και επομένως ο αριθμός 0 θα είναι η μοναδική πραγματική ρίζα της g και κατ' επέκταση της δοσμένης εξίσωσης.

14. **Έστω $\alpha<\beta$ και $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής με την ιδιότητα**

$I=\int_\alpha^\beta f(x)dx \neq 0$. **Δείξτε ότι: υπάρχει** $\xi \in (\alpha,\beta) = \int_\alpha^\xi f(x)dx = \frac{I}{\nu}\cdot I$ **όπου**

$\nu \in N^* - \{1\}$

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_\alpha^x f(t)dt - \frac{1}{\nu}I$, $x\in[\alpha,\beta]$ για την οποία παρατηρούμε ότι:

- g συνεχής στο $[\alpha,\beta]$
- $g(\alpha)=-\frac{1}{\nu}I$
- $g(\beta)=\int_\alpha^\beta f(t)dt-\frac{1}{\nu}I \overset{\text{υποθ.}}{=} I-\frac{1}{\nu}I$

Οπότε $g(\alpha)\cdot g(\beta)=-\frac{1}{\nu}I\left(I-\frac{1}{\nu}I\right)=-\frac{1}{\nu}I^2+\frac{1}{\nu^2}I^2=-\frac{1}{\nu}I^2\underbrace{\left(\frac{1}{\nu}-1\right)}_{<0}<0$

Άρα σύμφωνα με το θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta):g(\xi)=0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\xi f(t)dt=\frac{1}{\nu}I$

15. **Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και αντιστρέψιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο [α,β].**

Να δείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} \frac{tdt}{f'(f^{-1}(t))}$

Λύση:

Εκτελώντας το μετ/μό $f^{-1}(t)=u$ έπεται ότι $t=f(u)$ και άρα $dt=f'(u)du$.

Έτσι $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}\frac{tdt}{f'\left(f^{-1}(t)\right)}=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(u)}{f'(u)}f'(u)du=\int_{\alpha}^{\beta}f(u)du$

16. Βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία: για κάθε

$x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\int_0^x e^{-t}\cdot f(x-t)dt$.

Λύση:

Με την αντ/ση $x-t=u$ έχουμε $du=-dt$ οπότε η δοθείσα σχέση ισοδύναμα γράφεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\int_x^0 e^{u-x}\cdot f(u)du$

ή για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+e^{-x}\int_0^x e^u\cdot f(u)du$

δηλ. για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $e^x f(x)=e^x\cdot x^2+\int_0^x e^u\cdot f(u)du$

Παραγωγίζοντας τώρα την τελευταία σχέση, έχουμε:

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $e^x f(x)+e^x f'(x)=2xe^x+x^2e^x+e^x f(x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^x f'(x)=e^x\left(x^2+2x\right)\Leftrightarrow f'(x)=\left(x^2+2x\right)$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+c \qquad \text{(I)}$$

Όμως από τη σχέση της υπόθεσης προκυπτει ότι $f(0)=0$ και έτσι από την (Ι) κατ' ανάγκη θα είναι $c=0$. Επομένως $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2$, $x\in\mathbb{R}$

17.α. Αν η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη και παραγωγίσιμη με την f' συνεχή, δείξτε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}f^{-1}(x)dx=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)$$

β. Έστω η συνάρτηση: $f(x)=\eta\mu x+2x,\quad 0\le x\le\pi$

i. Δείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

ii. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int_0^{2\pi} f^{-1}(x)dx$

Λύση:

α. Θέτοντας $f^{-1}(x)=t$ έχουμε $x=f(t)$ άρα $dx=f'(t)dt$ οπότε:

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx=\int_\alpha^\beta tf'(t)dt=\left[tf(t)\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f(t)dt=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)-\int_\alpha^\beta f(t)dt$$

και άρα $\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)$

β.i. Για κάθε $x\in[0,\pi]$, $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x+2>0$ δηλ. η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\pi]$ και άρα αντιστρέψιμη σ' αυτό.

ii. Λόγω του (α) ερωτήματος και επειδή η $f(x)=\eta\mu x+2x$ αντιστρέψιμη, έχουμε:

$$\int_0^\pi f(x)dx+\int_0^{2\pi} f^{-1}(x)dx=2\pi^2 \quad \text{ή} \quad \int_0^\pi(\eta\mu x+2x)dx+\int_0^{2\pi} f^{-1}(x)dx=2\pi^2$$

δηλαδή $\left[-\sigma\upsilon\nu x+x^2\right]_0^\pi+\int_0^{2\pi} f^{-1}(x)dx=2\pi^2$,

επομένως $-\sigma\upsilon\nu\pi+\pi^2+1+\int_0^{2\pi} f^{-1}(x)dx=2\pi^2$ και άρα $\int_0^{2\pi} f^{-1}(x)dx=\pi^2-2$

18. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$\left|\int_x^{nx} f(t)dt\right|\le x^{2n}, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ όπου η } n\in N^*-\{1\}$$

Να αποδείξετε ότι: $f(0)=0$

Λύση:

Εξ' υποθέσεως έπεται ότι: για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $-x^{2n}\le\int_x^{nx} f(t)dt\le x^{2n}$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x)=\int_x^{nx} f(t)dt-x^{2n}$, $x\in\mathbb{R}$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο R και μάλιστα για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

$$g'(x) = -f(x) + n \cdot f(nx) - 2nx^{2n-1}$$

Όμως η σχέση (1) δίνει ότι: για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) \leq 0 = g(0)$ δηλαδή ο αριθμός 0 είναι (εσωτερική) θέση τοπικού μεγίστου της g, και επομένως (θ. Fermat)

$g'(0) = 0 \Leftrightarrow -f(0) + nf(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) \cdot (n-1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$, (αφού $n \neq 1$).

19. **Έστω συνάρτηση $f:[0,c] \to \mathbb{R} (c > 0)$ με την f'' συνεχή και τέτοια ώστε:**

$$\textbf{για κάθε } x \in [0,c], x \cdot f''(x) = f'(c)$$

Δείξτε ότι υπάρχει: $\xi \in (0,c) : f'(\xi) = 0$

Λύση:

Από τη δοθείσα σχέση με ολοκλήρωση παίρνουμε: $\int_0^c x \cdot f''(x)dx = c \cdot f'(c)$

δηλ. $\left[x \cdot f'(x)\right]_0^c - \int_0^c f'(x)dx = c \cdot f'(c)$ ή $cf'(c) - \left[f(x)\right]_0^c = c \cdot f'(c)$ οπότε $f(c) = f(0)$

Για την f λοιπόν παρατηρούμε ότι:
- f συνεχής στο $[0,c]$
- f παραγωγίσιμη στο $(0,c)$
- $f(0) = f(c)$

Άρα σύμφωνα με το θ. Rolle υπάρχει: $\xi \in (0,c) : f'(\xi) = 0$

20. **Έστω $f:[0,\alpha] \to \mathbb{R}, (\alpha > 0)$ κυρτή συνάρτηση με $f(0) = f'(0) = 1$**

α. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τεταγμένη 0.

β. Αποδείξτε ότι: $f(x) \geq x+1$, για κάθε $x \in [0,\alpha]$.

γ. Δείξτε ότι: $\int_0^\alpha f(x)dx > \alpha$

Λύση:

α. Η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι: $y - f(0) = f'(0)(x-0)$ δηλ. λόγω των υποθέσων $y = x+1$.

β. Λόγω της κυρτότητας της f στο $[0,\alpha]$ και του ερωτήματος **α.** έπεται ότι: για κάθε $x \in [0,\alpha]$, $f(x) \geq x+1$

γ. Από το β) έπεται ότι: $\int_0^\alpha f(x)dx \geq \int_0^\alpha (x+1)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^\alpha = \frac{\alpha^2}{2} + \alpha > \alpha$

21. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ τέτοια ώστε:

$$f(x)=2+\int_1^x \frac{t}{f(t)}dt\text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση:

i. Από την υπόθεση διαπιστώνουμε ότι: $\begin{cases} f \quad \text{συνεχής στο } \mathbb{R} \\ \quad\quad \text{και} \\ f(x)\neq 0, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\end{cases}$

Άρα η f διατηρεί πρόσημο στο R και επειδή $f(1)=2+\int_1^1\frac{t}{f(t)}dt=2+0=2>0$,

έπεται ότι: $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii. Από την υπόθεση με παραγώγιση προκύπτει: Για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=\frac{x}{f(x)}\Leftrightarrow f'(x)f(x)=x\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)'=\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\Leftrightarrow\frac{1}{2}f^2(x)=\frac{1}{2}x^2+c \quad \text{(I)}$$

Όμως από την (I) για $x=1$ έχουμε: $\frac{1}{2}f^2(1)=\frac{1}{2}\cdot 1+c\overset{\text{i)}}{\Leftrightarrow}\frac{1}{2}2^2=\frac{1}{2}+c\Leftrightarrow c=\frac{3}{2}$

άρα από την (I) έπεται ότι: για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $\frac{1}{2}f^2(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}\Leftrightarrow f^2(x)=x^2+3$

και επειδή $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

22.α. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] και τέτοια ώστε:

$$f(x)\geq 0\text{, για κάθε } x\in[\alpha,\beta]$$

Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ να αποδείξετε ότι: $f(x)=0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

β. Αν για τη συνεχή στο R συνάρτηση f ισχύει:

$$\int_0^1 f^2(x)dx+\frac{1}{3}=\int_0^1 2xf(x)dx$$

να αποδείξετε ότι: $f(x)=x$, για κάθε $x\in[0,1]$

Λύση:

α. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι παντού μηδέν στο [α,β]. Τότε επειδή $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ θα ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$ άτοπο λόγω της υπόθεσης. Άρα $f(x)=0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

β. $\int_0^1 f^2(x)dx+\frac{1}{3}=\int_0^1 2xf(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1(f(x)-x)^2dx=0$. $\left(\text{διότι } \frac{1}{3}=\int_0^1 x^2dx\right)$

Όμως $(f(x)-x)^2\geq 0$, για κάθε $x\in[0,1]$ οπότε λόγω του α) θα είναι: $f(x)-x=0$, για κάθε $x\in[0,1]$ δηλ. $f(x)=x$, για κάθε $x\in[0,1]$.

23. **Δίνεται η συνάρτηση** $f(x)=-3x^2+6x$ **και η ευθεία** $(\varepsilon): y=(6-3\alpha)x$ **,** $\alpha\in(0,2)$

α. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζουν η C_f και ο άξονας των x.

β. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η ευθεία (ε) χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Λύση:

α. $f(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+6x=0 \Leftrightarrow -3x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$

Δηλαδή οι αριθμοί 0 και 2 είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα των x . Το πρόσημο της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	-∞		0		2		+∞
f		−	0	+	0	−	

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(\Omega)=\int_0^2|f(x)|dx=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(-3x^2+6x)dx=\left[-x^3+3x^2\right]_0^2=4\text{ τ.μ.}$$

β. $f(x)=(6-3\alpha)x \Leftrightarrow -3x^2+3\alpha x=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\alpha$

Δηλαδή οι αριθμοί 0 και α είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με την ευθεία (ε). Το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-(6-3\alpha)x=-3x^2+3\alpha x$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x		0		α	
$-3x^2+3\alpha x$	−	0	+	0	−

Επομένως το εμβαδόν του χωρίου Ω_1 που περικλείεται από την C_f και την (ε) είναι:

$$E(\Omega_1)=\int_0^\alpha |f(x)-(6-3\alpha)x|dx=\int_0^\alpha(-3x^2+3\alpha x)dx=\left[-x^3+\frac{3\alpha x^2}{2}\right]_0^\alpha=\frac{\alpha^3}{2}$$

Επομένως η (ε) χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία αν και μόνο αν ισχύει :

$$E(\Omega_1)=\frac{1}{2}E(\Omega)\Leftrightarrow\frac{\alpha^3}{2}=\frac{1}{2}4\Leftrightarrow\alpha=\sqrt[3]{4}$$

24. **Έστω η συνάρτηση** $f(x)=xe^{-x^2}$ **.**

α. Να υπολογίσετε το εμβαδό Ε(λ), του χωρίου που περικλείεται από τη C_f**, τις ευθείες** $x=1, x=\lambda, (\lambda>1)$ **και τον άξονα των x.**

β. Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to\infty}E(\lambda)$**.**

Λύση:

α. Παρατηρούμε οτι η f είναι συνεχής στο [1,λ] και ισχύει: $f(x)>0$, για κάθε $x\in[1,\lambda]$. Επομένως :

$$E(\lambda)=\int_1^\lambda f(x)dx=\int_1^\lambda xe^{-x^2}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_1^\lambda=-\frac{1}{2}e^{-\lambda^2}+\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{1}{2e}-\frac{1}{2e^{\lambda^2}}$$

β. $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{2e}-\frac{1}{2e^{\lambda^2}}\right)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2e}-\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2e^{\lambda^2}}=\frac{1}{2e}-0=\frac{1}{2e}$

25. **Έστω η συνάρτηση** $f(x)=9x^2\ell nx$

α. Να βρεθεί το εμβαδό Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη C_f**, τον άξονα των x και τις ευθείες** $x=1$ **και** $x=\lambda$**,** $(\lambda>1)$

β. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $\lambda\in(1,e)$ **τέτοιος ώστε:** $E(\lambda)=17$

Λύση:

α. Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο [1,λ] και επίσης $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[1,\lambda]$.

Επομένως: $E(\lambda)=\int_1^\lambda f(x)dx=\int_1^\lambda 9x^2\ell nxdx=\int_1^\lambda(3x^3)'\ell nxdx=$

$$=\left[3x^3\ell nx\right]_1^\lambda-\int_1^\lambda 3x^3\frac{1}{x}dx=3\lambda^3\ell n\lambda-\int_1^\lambda 3x^2dx=$$

$$=3\lambda^3\ell n\lambda-\left[x^3\right]_1^\lambda=3\lambda^3\ell n\lambda-\lambda^3+1$$

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(\lambda)=E(\lambda)-17=3\lambda^3\ell n\lambda-\lambda^3-16,\quad \lambda\in[1,e]$

Για τη g παρατηρούμε ότι :

- g συνεχής στο $[1,e]$,
- $g(1)g(e)=(-1-16)(3e^3-e^3-16)=-17(2e^3-16)<0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η g έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,e)$ (1)

Όμως για κάθε $\lambda\in(1,e)$, $g'(\lambda)=9\lambda^2\ell n\lambda+3\lambda^3\frac{1}{\lambda}-3\lambda^2=9\lambda^2\ell n\lambda>0$

Άρα $g\uparrow(1,e)$ (2). Από τις (1) και (2)συμπεραίνουμε ότι:

υπάρχει μοναδικό $\lambda\in(1,e):g(\lambda)=0\Leftrightarrow E(\lambda)-17=0\Leftrightarrow E(\lambda)=17$

26. Δίνεται η συνάρτηση: $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ **με** $f(x)=\eta\mu x+x,\ x\in[0,\pi]$

α. Δείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη .

β. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Λύση:

α. Για κάθε $x\in(0,\pi)$ είναι $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x+1>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0,π] (αφού είναι συνεχής στο [0,π]) και συνεπώς είναι “ 1-1 ” δηλαδή αντιστρέψιμη.

β. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα , έπεται ότι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} (αν βέβαια υπάρχουν) θα βρίσκονται επί της ευθείας με εξίσωση $y=x$, ουσιαστικά δηλαδή θα προέρχονται από τη λύση της εξίσωσης $f(x)=x$ στο [0,π].

Έτσι λοιπόν: $f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow \eta\mu x=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=\pi$

(αφού $x\in[0,\pi]$) και επομένως, λόγω συμμετρίας των διαγραμμάτων των f και f^{-1}, ως προς την ευθεία $y=x$, το ζητούμενο εμβαδό θα είναι:

$$E=2\int_0^\pi|f(x)-x|dx=2\int_0^\pi|\eta\mu x|dx=2\int_0^\pi\eta\mu x dx\ \ (\text{αφού για κάθε } x\in[0,\pi],\ \eta\mu x\geq 0)$$

$= 2(-\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0) = 4$

27. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο R και η συνάρτηση:

$$F(x) = \int_1^x xf(t)dt,\ x \in R$$

α. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $F'(\xi) = 0$.

β. $\int_1^\xi f(t)dt = -\xi f(\xi)$

Λύση:

α. Είναι $F(x) = x\int_1^x f(t)dt,\ x \in R$. Η F είναι παραγωγίσιμη στο R ως γινόμενο των παραγωγίσιμων στο R συναρτήσεων $f_1(x) = x$ και $f_2(x) = \int_1^x f(t)dt$.

Άρα είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και επειδή $F(0) = 0,\ F(1) = 1 \cdot \int_1^1 f(t)dt = 0$ ισχύει το θεώρημα Rolle στο $[0,1]$. Άρα υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε :

$$F'(\xi) = 0.$$

β. Για κάθε $x \in R$ είναι : $F'(x) = \int_1^x f(t)dt + xf(x)$ και με $x = \xi$, παίρνουμε:

$$F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \int_1^\xi f(t)dt + \xi f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \int_1^\xi f(t)dt = -\xi f(\xi)$$

28. Έστω f συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{tf(t)}{x^2}dt,\ x > 0$

Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση:

Είναι:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\int_1^x tf(t)dt \Leftrightarrow \frac{x^2 f(x) - \int_1^x tf(t)dt}{x^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\int_1^x tf(t)dt}{x}\right)' = (\ell nx)' \Leftrightarrow \frac{\int_1^x tf(t)dt}{x} = \ell nx + c$$

Για $x=1: 0=c$,άρα $\int_1^x tf(t)dt = x\ell nx$. Από (1) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}x\ell nx=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\ell nx$

29. **Αν ισχύει $\int_x^{x^2} f(t)dt \ge x^2 - x$, για κάθε $x\in R$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο R. Να δείξετε ότι υπάρχει: $\xi\in(0,1): f'(\xi)=0$.**

Λύση:

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει για την f το θεώρημα Rolle στο $[0,1]$ και συγκεκριμένα αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(0)=f(1)$ (αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο R).

Έχουμε: $\int_x^{x^2} f(t)dt - x^2 + x \ge 0 \Leftrightarrow \int_x^0 f(t)dt + \int_0^{x^2} f(t)dt - x^2 + x \ge 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-\int_0^x f(t)dt + \int_0^{x^2} f(t)dt - x^2 + x}_{g(x)} \ge 0, \quad x\in R$$

Θέτουμε: $g(x) = -\int_0^x f(t)dt + \int_0^{x^2} f(t)dt - x^2 + x \ge 0,\ x\in R$ (1)

Παρατηρούμε ότι $g(0)=0$ και $g(1)=0$. Τότε η σχέση (1) γράφεται:

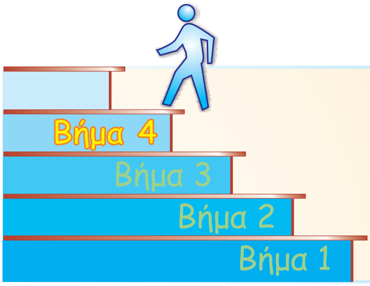
$$\begin{cases} g(x)\ge g(0) \\ \text{και} \\ g(x)\ge g(1) \end{cases}, \text{ για κάθε } x\in R$$

Άρα η g παρουσιάζει στις θέσεις $x_1=0$ και $x_2=0$ τοπικά ελάχιστα και σύμφωνα με το θ. Fermat είναι $g'(0)=0$ και $g'(1)=0$.

Όμως $g'(x) = -f(x) + 2xf(x^2) - 2x + 1$, για κάθε $x\in R$. Οπότε έχουμε :

$$\begin{cases} g'(0)=0 \\ \text{και} \\ g'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -f(0)+1=0 \Leftrightarrow f(0)=1 \\ \text{και} \\ -f(1)+2f(1)-1=0 \Leftrightarrow f(1)=1 \end{cases}$$

Δηλαδή $f(0)=f(1)$,οπότε ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο $[0,1]$ και συνεπώς υπάρχει $\xi\in(0,1): f'(\xi)=0$.



Λύνουμε μόνοι μας

1. **Έστω η συνάρτηση f με** $f(x)=\int_1^x \frac{\ell nt}{t+1}dt,\ x>0$. **Να δείξετε ότι:**

$$2\left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=(\ell nx)^2,\ x>0$$

2. **Αν f συνεχής στο R με** $f(x)>0$ **και** $f(x)+\int_0^x tf(t)dt=1$ **(1) :**

i. **Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R.** **ii.** **Να βρείτε την f.**

iii. **Να δείξετε ότι:** $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x te^{-t^2/2}dt=1$

....

....

....

3. **Έστω f συνεχής** $[0,3]$, $f([0,3])=[1,3]$ **και η εξίσωση** $\int_0^x f(t)dt = 4x-3$ **(1)**

Να αποδείξετε πως η (1) έχει μία ρίζα στο διάστημα (0,3).

....

....

....

....

....

....

....

....

4. **Έστω συνάρτηση** $g(x)=\int_x^{x+1} f(t)dt$ **όπου f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο** $(0,+\infty)$**. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο** $(0,+\infty)$**.**

....

....

....

....

....

....

....

....

5. **Δίνεται η συνάρτηση:** $\mathbf{f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}}$

Να δειχθεί ότι ο άξονας x΄x είναι η μοναδική ασύμπτωτη της C_f **. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από την** C_f **, την**

ασύμπτωτη, τον άξονα y΄y και την ευθεία $x=\lambda, \lambda>0$. Να βρείτε το όριο του παραπάνω εμβαδού καθώς $\lambda \to +\infty$.

....

....

....

....

....

....

....

6. **Δίνεται συνάρτηση $f: R \to R$, της οποίας η κλίση στο τυχαίο σημείο $(x, f(x))$ είναι $2x-4$ και η C_f τέμνει τον y΄y στο σημείο 3. Να βρεθούν:**

α. Οι εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία που η C_f τέμνει τον x΄x.

β. Το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f και της προηγούμενες εφαπτόμενες.

....

....

....

....

....

....

....

7. **Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς στο [α,β]. Αν $f(x)<g(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ και $f(\alpha)=g(\alpha)$, $f(\beta)=g(\beta)$, να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδική ευθεία $x=x_0$ με $x_0 \in (\alpha, \beta)$, η οποία να χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από την C_f και τη C_g σε δύο ισοδύναμα μέρη (σε δύο εμβαδικά χωρία).**

....

....

....

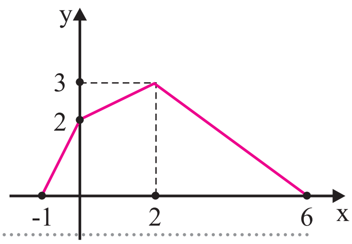
....

....

....

....

8. **Το διπλανό διάγραμμα είναι μιας συνάρτησης f. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$ και να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.**



....

....

....

....

....

....

....

9. **Αν f συνεχής στο [0,1], να δειχθεί ότι:**

α. $\int_0^1 2xf(x^2)dx=\int_0^1 f(x)dx$

β. **Υπάρχει** $\xi\in(0,1)$ **τέτοιο ώστε:** $2\xi f(\xi^2)=f(\xi)$

....

....

....

....

....

....

....

....

10. **Αν f συνεχής στο [0,1] και** $\int_0^1 f(x)dx=1$**. Να δειχθεί ότι η εξίσωση**

$f(x)=x+\frac{1}{2}$ έχει λύση στο [0,1].

....

....

....

....

....

....

....

11. Έστω f συνεχής στο R και $e^x+\int_0^x f(t)dt-\lambda^2 x\geq 1$ για κάθε $x\in R$. Να βρεθεί ο λ αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

....

....

....

....

....

....

....

12. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}-1$

α. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να υπολογιστεί το: $\lim_{x\to+\infty}\int_{x+\kappa}^{x+\kappa+1} f(t)dt,\ \kappa>0$

....

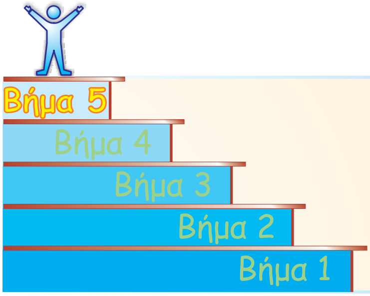
....

....

....

....

....



Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

Α. Αν G είναι μια παράγουσα της συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα [α,β], αποδείξτε ότι:

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

(Μονάδες 6)

Β1. Να αντιστοιχίσετε σε καθένα από τα γράμματα Α, Β, Γ, Δ έναν αριθμό από το 1 έως το 6 ώστε κάθε συνάρτηση της πρώτης στήλης να ταιριάζει με την παράγωγό της στη δεύτερη στήλη.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\int_{1}^{x} xf(t)dt$	**1.** $xf(x)$
Β. $\int_{x^2}^{0} \eta\mu(t+1)dt$	**2.** $\int_{1}^{x} f(t)dt + xf(x)$
Γ. $\int_{1}^{1/x} \frac{1}{t^2}dt$	**3.** $2x\eta\mu(x^2+1)$
Δ. $\int_{2}^{x^2} \frac{1}{2t}dt$	**4.** $-2x\eta\mu(x^2+1)$
	5. -1
	6. x

Α	Β	Γ	Δ

(Μονάδες 10)

Β2. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος).

α. Αν $f(x) \leq g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx \geq \int_{\beta}^{\alpha} g(x)dx$

(Μονάδες 4)

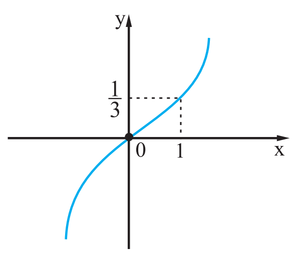
β. Αν $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = 0$, τότε α=β

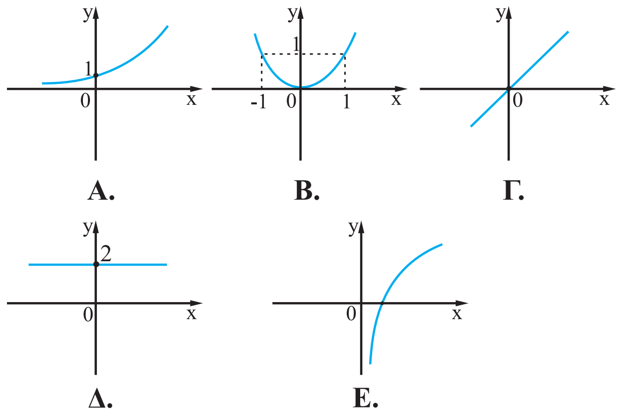
(Μονάδες 5)

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Θέμα 2ο

Α. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η παράγουσα μιας συνάρτησης f, ποια από τις επόμενες γραφικές παραστάσεις μπορεί να παριστάνει την f ;





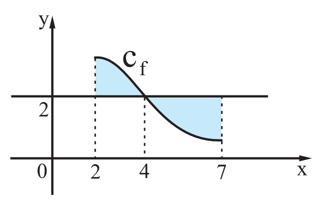
(Μονάδες 12)

B. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{\varepsilon\varphi^4 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$ *(Μονάδες 13)*

Θέμα 3^0

A. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}\frac{\ell nt}{t}dt$ *(Μονάδες 10)*

B. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος είναι ίσο με:



A. $\int_2^7 f(x)dx$ **B.** $\int_2^7 -f(x)dx$

Γ. $\int_2^7 (f(x)-2)dx$ **Δ.** $\int_2^4 (f(x)-2)dx+\int_4^7 (2-f(x))dx$ **Ε.** $\left|\int_2^7 (f(x)-2)dx\right|$

(Μονάδες 15)

....

....

....

....

....

....

....

....

Θέμα 4ο

Αντλία της πυροσβεστικής αντλεί ποσότητα νερού από πλημμυρισμένο υπόγειο με ρυθμό μεταβολής $N'(t)=20+\dfrac{20(t+1)}{t^2+2t+2}$ σε λίτρα ανά λεπτό, όπου $t\geq 0$ τα λεπτά λειτουργίας της αντλίας.

1. Να βρεθεί η ποσότητα του νερού που αντλήθηκε από το υπόγειο τα 6 τελευταία λεπτά της λειτουργίας της, αν είναι γνωστό ότι η αντλία λειτουργεί επί 10 λεπτά.

(Μονάδες 10)

2. Να προσδιοριστεί η ποσότητα του νερού που μπορεί να αντλήσει η αντλία αν λειτουργήσει επί 3 ώρες.

(Μονάδες 15)

....

....

....

....

....

....

....