1.6
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 181 – 182

Α΄ Ομάδας

1.

Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_o όταν:

i) $f(x)=\dfrac{x+5}{x^4+3x^2}$, $x_o=0$ **ii)** $f(x)=\dfrac{2x-3}{4(x-1)^4}$, $x_o=1$

iii) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}$, $x_o=0$

Λύση

i)

Για κάθε x κοντά στο 0 είναι $f(x)=(x+5)\dfrac{1}{x^4+3x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}(x+5)=5>0$ **(1)**

$\lim\limits_{x\to 0}(x^4+3x^2)=0$ με $x^4+3x^2>0$ κοντά στο $x_o=0$ $\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4+3x^2}=+\infty$ **(2)**

Από (1), (2) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$

ii)

Για κάθε x κοντά στο 1 είναι $f(x)=(2x-3)\dfrac{1}{4(x-1)^4}$

$\lim\limits_{x\to 1}(2x-3)=2\cdot 1-3=-1<0$ **(1)**

$\lim\limits_{x\to 1}[4(x-1)^4]=0$ με $4(x-1)^4>0$ κοντά στο $x_o=1$ $\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{4(x-1)^4}=+\infty$ **(2)**

Από (1), (2) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-\infty$

iii)

Για $x>0$ είναι $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}=0$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$ **(1)**

Για $x<0$ είναι $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty$ **(2)**

Από (1), (2) $\Rightarrow$ δεν υπάρχει το όριο της f στο 0.

2.

Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_o όταν:

i) $f(x)=\dfrac{3}{1-x}-\dfrac{4}{1-x^2}$, $x_o=1$ **ii)** $f(x)=\dfrac{x^2+3x-2}{x|x|}$, $x_o=0$

iii) $f(x)=x^2\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)$, $x_o=0$

Λύση

i)

Για κάθε x κοντά στο 1 είναι

$$f(x)=\frac{3}{1-x}-\frac{4}{(1-x)(1+x)}=\frac{3(1+x)-4}{(1-x)(1+x)}$$

$$=\frac{3+3x-4}{(1-x)(1+x)}$$

$$=\frac{3x-1}{1+x}\,\frac{1}{1-x}$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3x-1}{1+x}=\dfrac{3\cdot1-1}{1+1}=2>0$ **(1)**

$\lim\limits_{x\to1^+}(1-x)=0$ με $1-x<0$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{1-x}=-\infty$ **(2)**

Από (1), (2) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$

Ομοίως $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=+\infty$

Άρα δεν υπάρχει το όριο της f στο 1

ii)

Για $x>0$ είναι $f(x)=\dfrac{x^2+3x-2}{xx}=(x^2+3x-2)\,\dfrac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+3x-2)=-2<0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$ **(1)**

Για $x<0$ είναι $f(x)=\dfrac{x^2+3x-2}{x(-x)}=(x^2+3x-2)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$$=(-x^2-3x+2)\frac{1}{x^2}$$

$\lim\limits_{x\to0^-}(-x^2-3x+2)=2>0$ και $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=+\infty$ **(2)**

Από (1), (2) δεν υπάρχει το όριο της f στο 0

iii)

Για κάθε x κοντά στο 0 είναι $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^3+1}{x}=(x^3+1)\dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to0^+}(x^3+1)=1>0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-}(x^3+1)=1>0$ και $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$

Άρα δεν υπάρχει το όριο της f στο 0.

Β΄ Ομάδας

1.

Να βρείτε (εφόσον υπάρχει) το $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-9}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}$

Λύση

$$f(x)=\frac{-9}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}=\frac{-9}{\sqrt{x}(x-4)-2(x-4)}$$

$$=\frac{-9}{(x-4)(\sqrt{x}-2)}$$

$$=\frac{-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$=\frac{-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}=\frac{-9}{\sqrt{x}+2}\,\frac{1}{(\sqrt{x}-2)^2}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{-9}{\sqrt{x}+2}=\frac{-9}{\sqrt{4}+2}=\frac{-9}{4}<0$$

$\lim\limits_{x\to 4}(\sqrt{x}-2)^2=0$ με $(\sqrt{x}-2)^2>0$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{(\sqrt{x}-2)^2}=+\infty$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 4}f(x)=-\infty$

2.

Να αποδείξετε ότι :

i) Η συνάρτηση $f(x) = εφx$ δεν έχει όριο στο $\frac{\pi}{2}$

ii) Η συνάρτηση $f(x) = σφx$ δεν έχει όριο στο 0.

Λύση

i)

$f(x) = εφx = \frac{ημx}{συνx} = ημx\,\frac{1}{συνx}$

Για $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ είναι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} συνx = 0$ με $συνx < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{συνx} = -\infty$

αλλά $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} ημx = 1 > 0$, άρα $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$ **(1)**

Για $0 < x < \frac{\pi}{2}$ είναι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} συνx = 0$ με $συνx > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{συνx} = +\infty$

αλλά $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} ημx = 1 > 0$, άρα $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$ **(2)**

Από (1), (2) $\Rightarrow$ η $f(x) = εφx$ δεν έχει όριο στο $\frac{\pi}{2}$

ii)

$f(x) = σφx = \frac{συνx}{ημx} = συνx\,\frac{1}{ημx}$

Για $0 < x < \frac{\pi}{2}$ είναι $\lim\limits_{x\to0^+} ημx = 0$ με $ημx > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{ημx} = +\infty$

αλλά $\lim\limits_{x\to0^+} συνx = 1 > 0$, άρα $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ **(3)**

Για $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ είναι $\lim\limits_{x\to0^-} ημx = 0$ με $ημx < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{ημx} = -\infty$

και $\lim\limits_{x\to0^-} συνx = 1 > 0$, άρα $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ **(4)**

Από (3), (4) $\Rightarrow$ η $f(x) = σφx$ δεν έχει όριο στο 0

3.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}$ και $g(x) = \dfrac{x^2+2x+\mu}{x}$

Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια

$$\lim_{x\to 1} f(x) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0} g(x).$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε τα παραπάνω όρια.

Λύση

Έστω $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Κοντά στο 1 είναι $f(x) = \dfrac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}$

$$f(x)(x^2-1) = (\lambda-1)x^2+x-2$$

$$\lim_{x\to 1}[f(x)(x^2-1)] = \lim_{x\to 1}[(\lambda-1)x^2+x-2]$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)\cdot\lim_{x\to 1}(x^2-1) = (\lambda-1)1^2+1-2$$

$$\ell\cdot 0 = \lambda-1+1-2$$

$$0 = \lambda-2 \quad\Rightarrow\quad \lambda = 2$$

Για $\lambda = 2$ έχουμε $f(x) = \dfrac{(2-1)x^2+x-2}{x^2-1}$

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1} = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$$

Έστω $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$.

Κοντά στο 0 είναι $g(x) = \dfrac{x^2+2x+\mu}{x}$

$$g(x)\cdot x = x^2+2x+\mu$$

$$\lim_{x\to 0}[g(x)\cdot x] = \lim_{x\to 0}(x^2+2x+\mu)$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)\cdot\lim_{x\to 0} x = 0^2+2\cdot 0+\mu$$

$$\ell'\cdot 0 = \mu \quad\Rightarrow\quad \mu = 0$$

Για $\mu = 0$ έχουμε $g(x) = \dfrac{x^2+2x}{x} = x+2$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(x+2) = 0+2 = 2$$

4.

Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, όταν:

i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-4}{f(x)} = +\infty$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x+2} = -\infty$ **iii)** $\lim\limits_{x\to 1} [f(x)(3x^2-2)] = +\infty$

Λύση

i)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{x-4}{f(x)}$ κοντά στο 1.

Τότε $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty$ και $g(x)\, f(x) = x - 4 \Rightarrow$

$g(x) > 0$ κοντά στο 1 και $f(x) = \dfrac{x-4}{g(x)} = (x-4)\,\dfrac{1}{g(x)}$ **(1)**

$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{g(x)} = 0$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 1} (x-4) = 1-4 = -3$,

η (1) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = -3\cdot 0 = 0$

ii)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \dfrac{f(x)}{x+2}$ κοντά στο 1.

Τότε $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = -\infty$ και $h(x)\,(x+2) = f(x)$ **(2)**

και επειδή $\lim\limits_{x\to 1} (x+2) = 1+2 = 3 > 0$,

η (2) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} [\, h(x)\,(x+2] = -\infty$

iii)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\omega(x) = f(x)(3x^2-2)$ κοντά στο 1. **(3)**

Τότε $\lim\limits_{x\to 1} \omega(x) = +\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1} (3x^2-2) = 3\cdot 1 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow$

$3x^2 - 2 \neq 0$ κοντά στο 1 και $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{3x^2-2} = \dfrac{1}{1} = 1 > 0$

(3) $\Rightarrow f(x) = \dfrac{\omega(x)}{3x^2-2} = \omega(x)\,\dfrac{1}{3x^2-2} \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \left[\omega(x)\dfrac{1}{3x^2-1}\right] = +\infty$