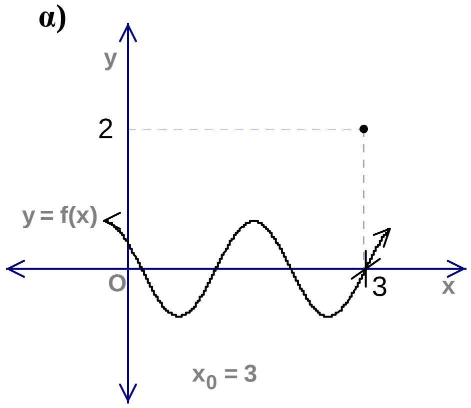
# 1.4
# Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 164 – 165

## Α΄ Ομάδας

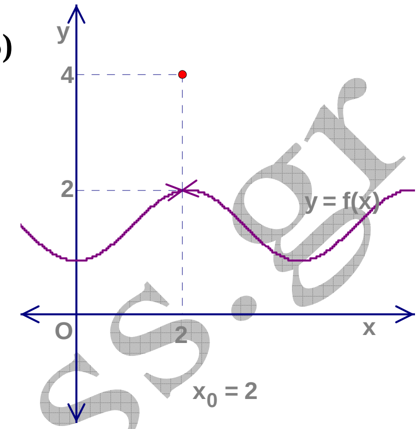
### 1.

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και το $f(x_o)$, εφόσον υπάρχουν, όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι:

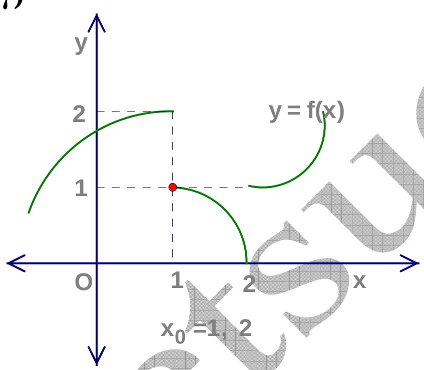
**α)**



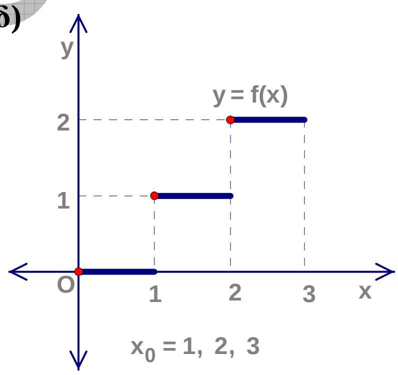

**β)**




**γ)**




**δ)**






**Λύση**

**α)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0$ και $f(3) = 2$

**β)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$ και $f(2) = 4$

**γ)** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$ άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, είναι δε $f(1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$ άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $f(2)$ δεν ορίζεται

**δ)** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$ άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, είναι δε $f(1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2$ άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, είναι δε $f(2) = 2$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$, $f(3)$ δεν ορίζεται

## 2.

Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, όταν:

**i)** $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$ , $x_o = 2$

**ii)** $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$ , $x_o = 1$

**iii)** $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ -x+1, & x > 1 \end{cases}$ , $x_o = 1$

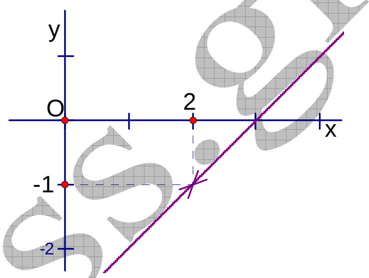
**iv)** $f(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ , $x_o = 0$

**Λύση**

**i)**

$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$, $f(x) = \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x-3$

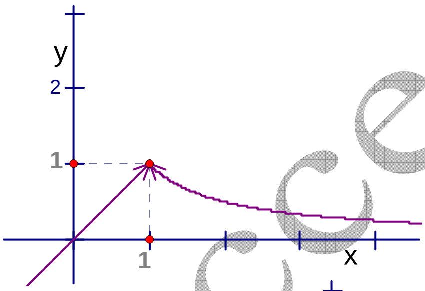
$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -1$




**ii)**

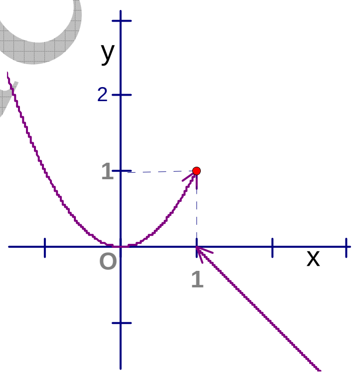
$D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$




**iii)**

Η $f$ δεν έχει όριο στο $x_o = 1$

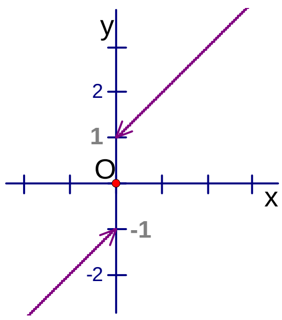



**iv)**

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$f(x) = x + \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} x+\dfrac{-x}{x}, & x < 0 \\ x+\dfrac{x}{x}, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$

Η $f$ δεν έχει όριο στο $x_o = 0$



**3.**

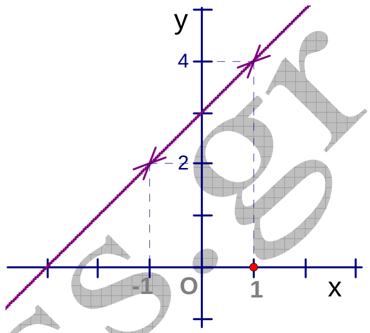
Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$, όταν:

**i)** $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$, $x_o = 1$ ή $-1$

**ii)** $f(x) = \dfrac{(x+1)\sqrt{9x^2-6x+1}}{3x-1}$, $x_o = \dfrac{1}{3}$

**Λύση**

**i)**

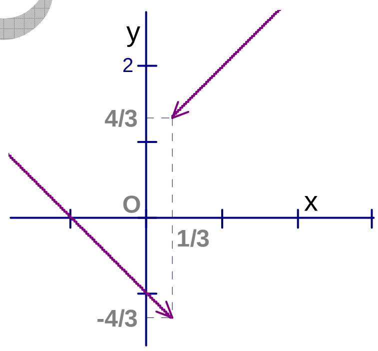



$D_f = \mathbb{R} - \{-1,\ 1\}$

$$f(x) = \frac{x^2(x+3)-(x+3)}{x^2-1} = \frac{(x+3)(x^2-1)}{x^2-1} = x+3$$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$ και $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 4$

**ii)**




$$f(x) = \frac{(x+1)\sqrt{(3x-1)}}{3x-1}$$

$$= \frac{(x+1)|3x-1|}{3x-1}$$

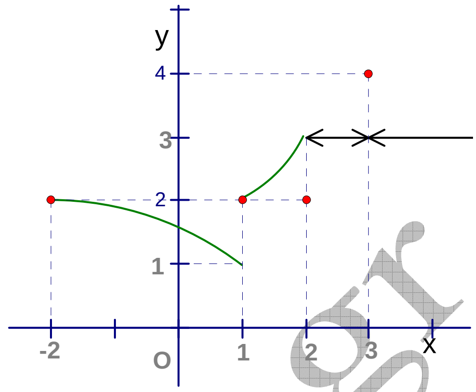
$$= \begin{cases} \dfrac{(x+1)[-(3x-1)]}{3x-1}, & 3x-1<0 \\[2ex] \dfrac{(x+1)(3x-1)}{3x-1}, & 3x-1>0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x-1, & x<\dfrac{1}{3} \\[2ex] x+1, & x>\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}^-} f(x) = -\dfrac{4}{3}$ και $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}^+} f(x) = \dfrac{4}{3}$, άρα η f δεν έχει όριο στο $x_o = \dfrac{1}{3}$

## 4.

Δίνεται η συνάρτηση $f$ που είναι ορισμένη στο $[2, +\infty)$ και έχει γραφική παράσταση, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς.




**i)** $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 2$

**ii)** $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$

**iii)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$

**iv)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$

**v)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4$

**vi)** $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 3$

**Λύση**

**i)** Αληθής **ii)** Ψευδής **iii)** Ψευδής

**iv)** Αληθής **v)** Ψευδής **vi)** Αληθής

## 5.

Δίνεται μια συνάρτηση $f$ ορισμένη στο $(\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta)$, με

$\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) = \lambda^2 - 6$ και $\lim\limits_{x\to x_o^+} f(x) = \lambda$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$,

για τις οποίες υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$.

**Λύση**

Πρέπει και αρκεί $\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o^+} f(x)$

$\lambda^2 - 6 = \lambda$

$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -2$ ή $\lambda = 3$