1.3

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 156 – 157

Α΄ Ομάδας

1.

Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες γνησίως φθίνουσες.

i) $f(x) = \sqrt{1-x}$ **ii)** $f(x) = 2\ln(x-2) - 1$

iii) $f(x) = 3e^{1-x} + 1$ **iv)** $f(x) = (x-1)^2 - 1, \quad x \le 1$

Λύση

i)

Πρέπει $1 - x \ge 0 \iff x \le 1$. Άρα $D_f = (-\infty, 1]$

Έστω τυχαία $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow$
$$-x_1 > -x_2$$
$$1 - x_1 > 1 - x_2$$
$$\sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2}$$
$$f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα

ii)

Πρέπει $x - 2 > 0 \iff x > 2$. Άρα $D_f = (2, +\infty)$

Έστω τυχαία $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow$
$$x_1 - 2 < x_2 - 2$$
$$\ln(x_1 - 2) < \ln(x_2 - 2)$$
$$2\ln(x_1 - 2) < 2\ln(x_2 - 2)$$
$$2\ln(x_1 - 2) - 1 < 2\ln(x_2 - 2) - 1$$
$$f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα f γνησίως αύξουσα

iii)

$D_f = \mathbb{R}$

Έστω τυχαία $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow$
$$-x_1 > -x_2$$
$$1 - x_1 > 1 - x_2$$
$$e^{1-x_1} > e^{1-x_2}$$
$$3e^{1-x_1} > 3e^{1-x_2}$$
$$3e^{1-x_1} + 1 > 3e^{1-x_2} + 1$$
$$f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα

iv)

Έστω τυχαία x_1, x_2 με $x_1 < x_2 \le 1 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \le 0$

$$(x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2$$

$$(x_1 - 1)^2 - 1 > (x_2 - 1)^2 - 1$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$

2.

Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι “1 – 1 “και για κάθε μια απ’ αυτές να βρείτε την αντίστροφή της.

i) $f(x) = 3x - 2$

ii) $f(x) = x^2 + 1$

iii) $f(x) = (x-1)(x-2) + 1$

iv) $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$

v) $f(x) = \ln(1-x)$

vi) $f(x) = e^{-x} + 1$

vii) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

viii) $f(x) = |x-1|$

Λύση

i)

$D_f = \mathbb{R}$

Θεωρούμε την εξίσωση $y = f(x)$ και τη λύνουμε ως προς x.

$y = 3x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad y + 2 = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{y+2}{3}$ **(1)**

Βλέπουμε ότι για κάθε τιμή του $y \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $\dfrac{y+2}{3}$

Άρα η συνάρτηση f είναι “1 – 1 “ και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Από την (1) έχουμε $f^{-1}(y) = \dfrac{y+2}{3}$.

Ή, αν θέλετε, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ (το σύνολο τιμών της f)

ii)

$1^{ος}$ τρόπος

$D_f = \mathbb{R}$

Θεωρούμε την εξίσωση $y = f(x)$ και τη λύνουμε ως προς x.

$y = x^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 - y = 0$, $2^{ου}$ βαθμού ως προς x, με $\Delta = -4(1-y)$.

Λύνουμε την ανίσωση $\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - y < 0 \quad \Leftrightarrow \quad y > 1$.

Επομένως υπάρχουν τιμές του y (οι μεγαλύτερες του 1), για τις οποίες η διακρίνουσα της εξίσωσης $y = f(x)$ είναι θετική, οπότε η εξίσωση θα έχει δύο λύσεις ως προς x.

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι “1 – 1 “.

$2^{ος}$ τρόπος

$D_f = \mathbb{R}$

Για $x_1 = 1$, είναι $f(x_1) = 1^2 + 1 = 2$

Για $x_2 = -1$, είναι $f(x_2) = (-1)^2 + 1 = 2$

Παρατηρούμε ότι για $x_1 \neq x_2$ έχουμε $f(x_1) = f(x_2)$

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι “1 – 1 “.

iii)

$D_f = \mathbb{R}$

Για $x_1 = 1$, είναι $f(x_1) = 1$

Για $x_2 = 2$, είναι $f(x_2) = 1$

Παρατηρούμε ότι για $x_1 \neq x_2$ έχουμε $f(x_1) = f(x_2)$

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι "1 – 1''.

iv)

Πρέπει $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. Άρα $D_f = (-\infty, 1]$

Θεωρούμε την εξίσωση $y = f(x)$ και τη λύνουμε ως προς x.

$y = \sqrt[3]{1-x}$ για να έχουμε λύση πρέπει $y \geq 0$ τότε έχουμε

$y^3 = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - y^3$ **(1)**

Αλλά $x \leq 1 \Leftrightarrow 1 - y^3 \leq 1 \Leftrightarrow -y^3 \leq 0$ που ισχύει για κάθε $y \geq 0$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $[0, +\infty)$

Βλέπουμε ότι για κάθε τιμή του $y \geq 0$ η εξίσωση $y = f(x)$ έχει μοναδική λύση την $1 - y^3$. Άρα η συνάρτηση είναι 1 – 1 ".

Από την (1) έχουμε $f^{-1}(y) = 1 - y^3$

Ή, αν θέλετε, $f^{-1}(x) = 1 - x^3$ με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ (το σύνολο τιμών της f)

v)

Πρέπει $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$. Άρα $D_f = (-\infty, 1)$

Θεωρούμε την εξίσωση $y = f(x)$ και τη λύνουμε ως προς x.

$y = \ln(1 - x) \Leftrightarrow e^y = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - e^y$ **(1)**

Αλλά $x < 1 \Leftrightarrow 1 - e^y < 1 \Leftrightarrow -e^y < 0$ που ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$.

Βλέπουμε ότι για κάθε τιμή του $y \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $y = f(x)$ έχει μοναδική λύση, την $1 - e^y$. Άρα η συνάρτηση είναι 1 – 1 ".

Από την (1) έχουμε $f^{-1}(y) = 1 - e^y$.

Ή, αν θέλετε, $f^{-1}(x) = 1 - e^x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ (το σύνολο τιμών της f)

vi)

$D_f = \mathbb{R}$

Θεωρούμε την εξίσωση $y = f(x)$ και τη λύνουμε ως προς x.

$y = e^{-x} + 1 \Leftrightarrow y - 1 = e^{-x}$

$-x = \ln(y - 1)$ με $y - 1 > 0$

$x = -\ln(y - 1)$ με $y > 1$ **(1)**

Βλέπουμε ότι για κάθε τιμή του $y \in (1, +\infty)$, η εξίσωση $y = f(x)$ έχει μοναδική λύση την $-\ln(y - 1)$. Άρα η συνάρτηση f είναι 1 – 1 " και έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(1, +\infty)$.

Από την (1) έχουμε $f^{-1}(y) = -\ln(y-1)$ με $y > 1$
Ή, αν θέλετε, $f^{-1}(x) = -\ln(x-1)$ με πεδίο ορισμού το $(1, +\infty)$
(το σύνολο τιμών της f)

vii)
$D_f = \mathbb{R}$
Θεωρούμε την εξίσωση $y = f(x)$ και τη λύνουμε ως προς x.

$$y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \Leftrightarrow ye^x + y = e^x - 1$$

$$ye^x - e^x = -y - 1$$

$$(y-1)e^x = -(y+1)$$

$$e^x = \frac{1+y}{1-y} \quad \text{με} \quad 1 - y \neq 0$$

$$x = \ln\frac{1+y}{1-y} \quad \text{με} \quad \frac{1+y}{1-y} > 0$$

$$x = \ln\frac{1+y}{1-y} \quad \text{με} \quad (1+y)(1-y) > 0$$

$$x = \ln\frac{1+y}{1-y} \quad \text{με} \quad -1 < y < 1 \qquad \textbf{(1)}$$

Βλέπουμε ότι για κάθε τιμή του $y \in (-1, 1)$, η εξίσωση $y = f(x)$ έχει μοναδική λύση την $\ln\frac{1+y}{1-y}$. Άρα η συνάρτηση f είναι 1 – 1 " και έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(-1, 1)$.

Από την (1) έχουμε $f^{-1}(y) = \ln\frac{1+y}{1-y}$ με $-1 < y < 1$

Ή, αν θέλετε, $f^{-1}(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$ με πεδίο ορισμού το $(-1, 1)$
(το σύνολο τιμών της f).

vii)
1^{ος} τρόπος
$D_f = \mathbb{R}$
Θεωρούμε την εξίσωση $y = f(x)$ και τη λύνουμε ως προς x.

$$y = |x - 1| \Leftrightarrow x - 1 = y \;\text{ ή }\; x - 1 = -y \quad \text{με} \quad y \geq 0$$

$$x = 1 + y \;\text{ ή }\; x = 1 - y \quad \text{με} \quad y \geq 0$$

Επομένως υπάρχουν τιμές του y (οι μεγαλύτερες του 0), για τις οποίες η εξίσωση $y = f(x)$ θα έχει δύο λύσεις ως προς x.
Άρα η συνάρτηση f δεν είναι "1 – 1 ".

2^{ος} τρόπος
$D_f = \mathbb{R}$

Για $x_1 = 0$, είναι $f(x_1) = f(0) = |0-1| = 1$

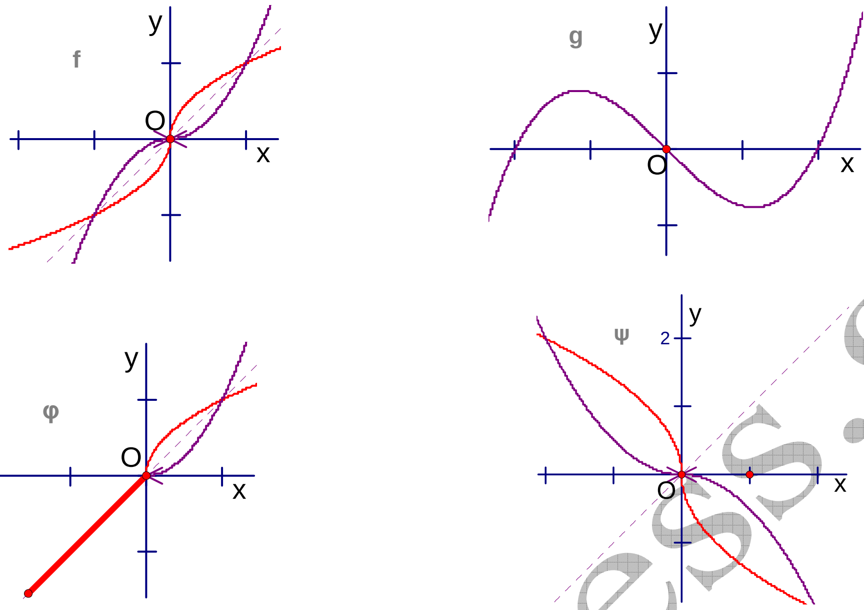
Για $x_2 = 2$, είναι $f(x_2) = f(2) = |2-1| = 1$

Παρατηρούμε ότι για $x_1 \neq x_2$ έχουμε $f(x_1) = f(x_2)$

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι “1 – 1 “.

3.

Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, φ και ψ.



Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις f, g, φ, ψ έχουν αντίστροφη και για καθεμία απ’ αυτές να χαράξετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της.

Λύση

Η οποιαδήποτε ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ τέμνει τις C_f, C_φ, C_ψ το πολύ σε ένα σημείο.

Άρα οι συναρτήσεις f, φ, ψ είναι “1 – 1 “ και επομένως αντιστρέφονται.

Οι γραφική παράσταση των συναρτήσεων f^{-1}, φ^{-1}, ψ^{-1} είναι συμμετρική των C_f, C_φ, C_ψ αντίστοιχα, ως προς τη διχοτόμο $y = x$.

Για τη συνάρτηση g, υπάρχει ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$, που τέμνει τη C_g σε τουλάχιστον δύο σημεία.

Άρα η συνάρτηση g δεν είναι “1 – 1 “ και επομένως δεν αντιστρέφεται.

4.

Να δείξετε ότι :

i) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

ii) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

iii) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) \geq 0$ και $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση fg είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Ανάλογα συμπεράσματα διατυπώνονται, αν οι f, g είναι γνησίως φθίνουσες σε ένα διάστημα Δ.

Λύση

i)

Έστω τυχαία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.

f γνησίως αύξουσα στο Δ $\Rightarrow$ $f(x_1) < f(x_2)$

$-f(x_1) > -f(x_2)$

$(-f)(x_1) > (-f)(x_2)$ $\Rightarrow$ $-f$ γν. φθίνουσα στο Δ.

ii)

Έστω τυχαία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.

f γνησίως αύξουσα στο Δ $\Rightarrow$ $f(x_1) < f(x_2)$ **(1)**

g γνησίως αύξουσα στο Δ $\Rightarrow$ $g(x_1) < g(x_2)$ **(2)**

$(1)+(2)$ $\Rightarrow$ $f(x_1)+g(x_1) < f(x_2)+g(x_2)$

$(f+g)(x_1) < (f+g)(x_2)$ $\Rightarrow$ $f+g$ γνησίως αύξουσα στο Δ.

iii)

Έστω τυχαία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.

f γνησίως αύξουσα στο Δ $\Rightarrow$ $0 \leq f(x_1) < f(x_2)$ **(1)**

g γνησίως αύξουσα στο Δ $\Rightarrow$ $0 \leq g(x_1) < g(x_2)$ **(2)**

$(1).(2)$ $\Rightarrow$ $f(x_1) \cdot g(x_1) < f(x_2) \cdot g(x_2)$

$(fg)(x_1) < (fg)(x_2)$ $\Rightarrow$ fg γνησίως αύξουσα στο Δ.