1.1 – 1.2
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 145 – 148

Α΄ Ομάδας

1.i)

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$

Λύση

Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$ είναι 1 και 2.

Πρέπει $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \iff x \neq 1$ και $x \neq 2$

Άρα $D_f = (-\infty,\ 1) \cup (1,\ 2) \cup (2,\ +\infty)$

1.ii)

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt{2-x}$

Λύση

Πρέπει $x - 1 \geq 0$ και $2 - x \geq 0 \iff x \geq 1$ και $x \leq 2 \iff 1 \leq x \leq 2$

Άρα $D_f = [1,\ 2]$

1.iii)

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

Λύση

Πρέπει $x \neq 0$ και $1 - x^2 \geq 0$

$1 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 1 \iff |x| \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1$

Άρα $D_f = [-1,\ 0) \cup (0,\ 1]$

1.iv)

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln(1 - e^x)$

Λύση

Πρέπει $1 - e^x > 0 \iff e^x < 1 \iff e^x < e^0 \iff x < 0$

Άρα $D_f = (-\infty,\ 0)$

2.i)

Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x + 3$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

Πρέπει $f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow$
ο x εκτός των ριζών του τριωνύμου,
δηλαδή $x < 1$ ή $3 < x$
$x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

2.ii)

Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

Πρέπει $f(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1-x} > 0$
$(1 + x)(1 - x) > 0$
$-1 < x < 1$

2.iii)

Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x - 1$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

Πρέπει $f(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$
$e^x > 1$
$e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

3.i)

Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 + 2x + 1$ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x + 1$.

Λύση

Πρέπει $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + 2x + 1 > x + 1$.
$x^3 + x > 0$
$x(x^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

3.ii)

Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 + x - 2$ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 + x - 2$.

Λύση

Πρέπει $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + x - 2 > x^2 + x - 2.$

$$x^3 - x^2 > 0$$
$$x^2(x-1) > 0$$
$$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

4.

Οι ανθρωπολόγοι εκτιμούν ότι το ύψος του ανθρώπου δίνεται από τις συναρτήσεις :

$A(x) = 2{,}89x + 70{,}64$ (για τους άνδρες) και

$\Gamma(x) = 2{,}75x + 71{,}48$ (για τις γυναίκες)

όπου x σε εκατοστά το μήκος του βραχίονα. Σε μία ανασκαφή βρέθηκε ένα οστό από βραχίονα μήκους 0,45 m.

α) Αν προέρχεται από άνδρα, ποιο ήταν το ύψος του;

β) Αν προέρχεται από γυναίκα, ποιο ήταν το ύψος της;

Λύση

α) $A(45) = 2{,}89 \cdot 45 + 70{,}6 = 200{,}69$ cm

β) $\Gamma(45) = 2{,}75 \cdot 45 + 71{,}48 = 195{,}23$ cm.

5.

Σύρμα μήκους $\ell = 20$ cm κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη x και $(20 - x)$ cm. Με το πρώτο κομμάτι σχηματίζουμε τετράγωνο και με το δεύτερο ισόπλευρο τρίγωνο. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων.

Λύση

Η πλευρά του τετραγώνου είναι $\frac{x}{4}$, άρα το εμβαδόν του είναι $\frac{x^2}{16}$.

Η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου είναι $\frac{20-x}{3}$, άρα, από τον τύπο $E = \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha^2$,

το εμβαδόν του είναι $\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{(20-x)^2}{9} = \frac{(20-x)^2\sqrt{3}}{36}$

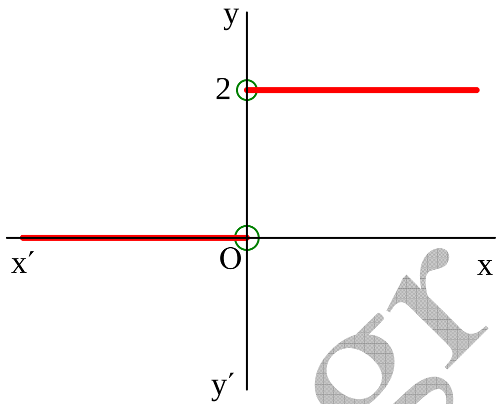
Επομένως το άθροισμά τους είναι $\Sigma(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(20-x)^2\sqrt{3}}{36}$ με $0 < x < 20$.

6.i)

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $\quad f(x) = \frac{|x|}{x} + 1$

Λύση

$D_f = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} + 1, & \text{όταν } x > 0 \\ \frac{-x}{x} + 1, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1+1, & \text{όταν } x > 0 \\ -1+1, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2, & \text{όταν } x > 0 \\ 0, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

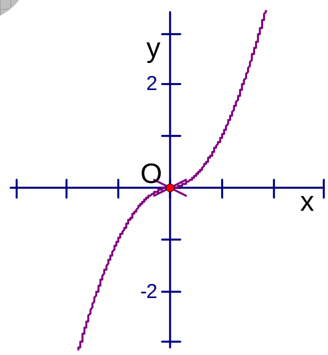
το σύνολο τιμών είναι το $f(A) = \{0,\ 2\}$

6.ii)

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $\quad f(x) = x|x|$

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$



$$f(x) = \begin{cases} x.x, & \text{όταν } x \geq 0 \\ x(-x), & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

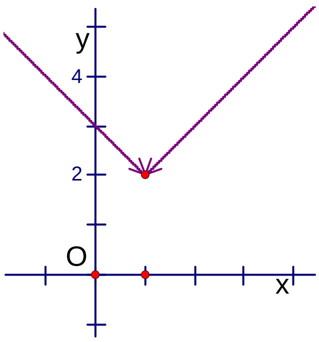
$$= \begin{cases} x^2, & \text{όταν } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

Σύνολο τιμών είναι το $f(A) = \mathbb{R}$

6.iii)

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $\quad f(x) = \begin{cases} -x+3, & \text{όταν } x < 1 \\ x+1, & \text{όταν } x \geq 1 \end{cases}$

Λύση



Σύνολο τιμών είναι το $f(A) = [2\ ,\ +\infty)$

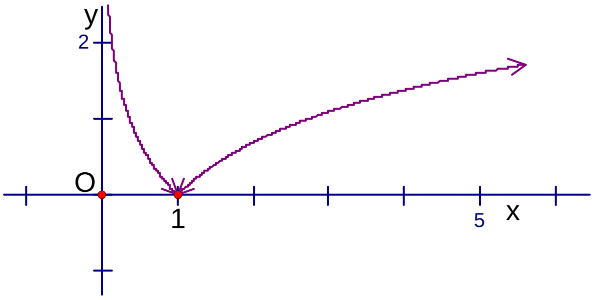
6.iv)

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = |\ln x|$

Λύση

$D_f = (0, +\infty)$

$$f(x) = \begin{cases} -\ln x, & \text{όταν } x < 1 \\ \ln x, & \text{όταν } x \geq 1 \end{cases}$$



Σύνολο τιμών είναι το $f(A) = [0, +\infty)$

7.

Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f = g$. Στις περιπτώσεις που είναι $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

i) $f(x) = \sqrt{x^2}$ και $g(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$

ii) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+|x|}$ και $g(x) = 1 - \dfrac{1}{|x|}$

iii) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ και $g(x) = \sqrt{x} + 1$

Λύση

i)

$D_f = \mathbb{R}$, $D_g = [0, +\infty)$ Άρα $f \neq g$

Το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$ είναι το $[0, +\infty)$, αφού για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει

$$f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = x = \left(\sqrt{x}\right)^2 = g(x)$$

ii)

Για το D_f: Πρέπει $x^2 + |x| \neq 0 \Leftrightarrow |x|^2 + |x| \neq 0$

$|x|\,(|x| + 1) \neq 0$

$|x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Για το D_g: Πρέπει $|x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Άρα $D_f = D_g$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+|x|} = \frac{|x|^2-1}{|x|^2+|x|} = \frac{(|x|-1)(|x|+1)}{|x|(|x|+1)}$$

$$= \frac{|x|-1}{|x|} = 1 - \frac{1}{|x|} = g(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

iii)

Για το D_f: Πρέπει $x \geq 0$ και $\sqrt{x} - 1 \neq 0$

$x \geq 0$ και $\sqrt{x} \neq 1$

$x \geq 0$ και $x \neq 1$ Άρα $D_f = [0, 1) \cup (1, +\infty)$

$D_g = [0, +\infty)$

Άρα $f \neq g$

Για κάθε $x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$ είναι

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x} + 1 = g(x).$$

Επομένως, το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$ είναι το $[0, 1) \cup (1, +\infty)$.

8.

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{x}{1-x}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f + g$, $f - g$, $f\,g$ και $\frac{f}{g}$

Λύση

$D_f = \mathbb{R}^*$ και $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

Κοινό πεδίο ορισμού το $D = \mathbb{R} - \{0,1\}$

Για κάθε $x \in D$ είναι $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$$= 1 + \frac{1}{x} + \frac{x}{1-x}$$

$$= \frac{x(1-x) + 1 - x + x^2}{x(1-x)}$$

$$= \frac{x - x^2 + 1 - x + x^2}{x(1-x)} = \frac{1}{x(1-x)}$$

Για κάθε $x \in D$ είναι $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$$= 1 + \frac{1}{x} - \frac{x}{1-x}$$

$$= \frac{x(1-x) + 1 - x - x^2}{x(1-x)}$$

$$= \frac{x - x^2 + 1 - x - x^2}{x(1-x)} = \frac{-2x^2 + 1}{x(1-x)}$$

Για κάθε $x \in D$ είναι $(f\,.g)(x) = f(x)\cdot g(x)$

$$= \left(1 + \frac{1}{x}\right)\frac{x}{1-x}$$

$$= \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{1-x} = \frac{x+1}{1-x}$$

Για κάθε $x \in D$ είναι $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{x}{1-x}} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x}{1-x}} = \frac{1-x^2}{x^2}$

Αφού για κάθε $x \in D$ είναι $g(x) \neq 0$

9.

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f + g$, $f - g$, $f\,g$ και $\dfrac{f}{g}$

Λύση

$D_f = D_g = (0, +\infty) = D$, $\quad f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$, $\quad g(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$

Για κάθε $x \in D$ είναι $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$$

Για κάθε $x \in D$ είναι $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Για κάθε $x \in D$ είναι $(f \cdot g)(x) = f(x) . g(x)$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \frac{x^2-1}{x}$$

Για να ορίζεται η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ πρέπει $g(x) \neq 0$ $\quad \dfrac{x-1}{\sqrt{x}} \neq 0 \quad x \neq 1.$

Για κάθε $x \in D - \{1\}$ είναι $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x+1}{x-1}$

10.i)

Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση gof, αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sqrt{x}$

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$, $\quad D_g = [0, +\infty)$

$D_{gof} = \{x \in D_f \text{ με } f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ με } x^2 \in [0, +\infty)\} = \mathbb{R}$

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$

10.ii)

Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση gof, αν $f(x) = ημx$ και $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$

Για το D_g, πρέπει $1 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 1$

$|x| \leq 1$

$-1 \leq x \leq 1$

Άρα $D_g = [-1, 1]$

$D_{gof} = \{x \in D_f \;\; με \;\; f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \;\; με \;\; ημx \in [-1, 1]\} = \mathbb{R}$

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(ημx) = \sqrt{1-ημ^2x} = \sqrt{συν^2x} = |συνx|$

10.iii)

Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση gof, αν $f(x) = \frac{\pi}{4}$ και $g(x) = εφx$.

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2},\; k \in \mathbb{Z}\right\}$

$D_{gof} = \{x \in D_f \;\; με \;\; f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} \;\; με \;\; \frac{\pi}{4} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\} = \mathbb{R}$

$(gof)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = εφ\frac{\pi}{4} = 1$

11.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις gof και fog.

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$, $D_g = [2, +\infty)$

$D_{gof} = \{x \in D_f \;\; με \;\; f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \;\; με \;\; x^2 + 1 \geq 2\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \;\; με \;\; x^2 \geq 1\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \;\; με \;\; x \leq -1 \;\; ή \;\; x \geq 1\}$

$= (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1 - 2} = \sqrt{x^2 - 1}$

$D_{fog} = \{x \in D_g \;\; με \;\; g(x) \in D_f\}$

$= \{x \in [2, +\infty) \;\; με \;\; \sqrt{x-2} \in \mathbb{R}\} = [2, +\infty)$

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-2}) = \sqrt{x-2}^{\,2} + 1 = x - 2 + 1 = x - 1$

12.

Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων, αν

i) $f(x) = ημ(x^2 + 1)$, **ii)** $f(x) = 2ημ^2 3x + 1$

iii) $f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$, **iv)** $f(x) = ημ^2(3x)$

Λύση

i)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2 + 1$ και τη συνάρτηση $h(x) = ημx$.

Τότε $(hog)(x) = h\left(g\left(x\right)\right) = h(x^2 + 1) = ημ(x^2 + 1) = f(x)$

ii)

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x) = 3x$, $h(x) = ημx$ και $φ(x) = 2x^2 + 1$.

Τότε $(φohog)(x) = φ\left(h\left(g\left(x\right)\right)\right) = φ\left(h\left(3x\right)\right) = φ(ημ3x) = 2ημ^2 3x + 1 = f(x)$

iii)

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x) = 2x$, $h(x) = e^x - 1$ και $φ(x) = \ln x$..

Τότε $(φohog)(x) = φ\left(h\left(g\left(x\right)\right)\right) = φ\left(h\left(2x\right)\right) = φ(e^{2x} - 1) = \ln(e^{2x} - 1)$

Για να ορίζεται ο $\ln(e^{2x} - 1)$ πρέπει
$$e^{2x} - 1 > 0$$
$$e^{2x} > 1$$
$$e^{2x} > e^0$$
$$2x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0$$

iv)

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x) = 3x$, $h(x) = ημx$ και $φ(x) = x^2$

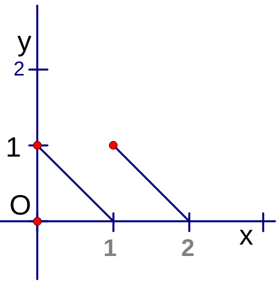
Τότε $(φohog)(x) = φ\left(h\left(g\left(x\right)\right)\right) = φ\left(h\left(3x\right)\right) = φ(ημ3x) = ημ^2 3x = f(x)$

Β΄ Ομάδας

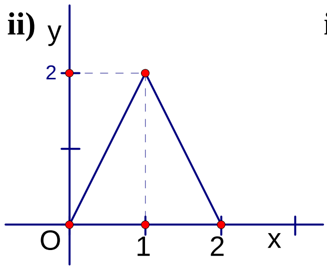
1.

Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση είναι:

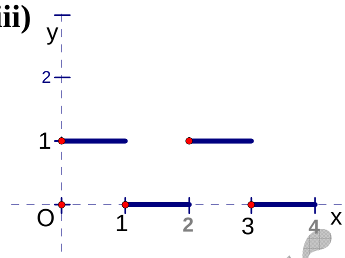
i)



ii)



iii)



Λύση

i)

Έστω τα σημεία Α(0, 1), Β(1, 0), Γ(1, 1) και Δ(2, 0)

Είναι $\lambda_{AB} = \lambda_{\Gamma\Delta} = -1$

Εξίσωση της ευθείας ΑΒ: $y - 1 = -1(x - 0) \Leftrightarrow y = -x + 1$

Εξίσωση της ευθείας ΓΔ: $y - 1 = -1(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \le x < 1 \\ -x+2, & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

ii)

Έστω τα σημεία Ε(1, 2) και Ζ(2, 0)

Είναι $\lambda_{OE} = \dfrac{2}{1} = 2$ και $\lambda_{EZ} = \dfrac{-2}{1} = -2$

Εξίσωση της ευθείας ΟΕ: $y = 2x$

Εξίσωση της ευθείας ΕΖ: $y - 2 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 4$

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ -2x+4, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

iii)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \quad ή \quad 2 \le x < 3 \\ 0, & 1 \le x < 2 \quad ή \quad 3 \le x < 4 \end{cases}$$

2.

Ένα κουτί κυλινδρικού σχήματος έχει ακτίνα βάσης x cm και όγκο 628 cm^3. Το υλικό των βάσεων κοστίζει 4 λεπτά του ευρώ, ανά cm^2, ενώ το υλικό της κυλινδρικής επιφάνειας 1,25 λεπτά του ευρώ, ανά cm^2. Να εκφράσετε το συνολικό κόστος ως συνάρτηση του x. Πόσο κοστίζει ένα κουτί με ακτίνα βάσης 5 cm και ύψος 8 cm;

Λύση

Εμβαδόν των δύο βάσεων = $2\pi x^2$

Ο όγκος 628 του κυλίνδρου = εμβαδόν βάσης επί ύψος $h \Rightarrow 628 = \pi x^2 h$

$$\Rightarrow h = \frac{628}{\pi x^2} = \frac{200}{x^2}$$

Εμβαδόν της κυλινδρικής επιφάνειας = μήκος κύκλου βάσης επί ύψος

$$= 2\pi x h = 2\pi x \frac{200}{x^2} = \frac{400\pi}{x}$$

Συνολικό κόστος $K(x) = 2\pi x^2 \cdot 4 + \frac{400\pi}{x} \cdot 1{,}25 = 8\pi x^2 + \frac{500\pi}{x}, \quad x > 0$

Για τον κύλινδρο με ακτίνα βάσης 5 cm και ύψος 8 cm, θα έχουμε

Εμβαδόν των δύο βάσεων = $2\pi x^2 = 2\pi 5^2 = 50\pi$

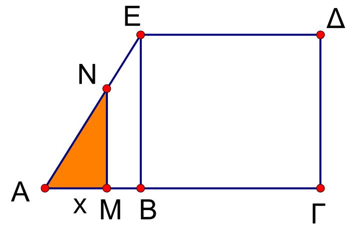
Εμβαδόν της κυλινδρικής επιφάνειας = $2\pi x h = 2\pi \cdot 5 \cdot 8 = 80\pi$

Συνολικό κόστος = $50\pi \cdot 4 + 80\pi \cdot 1{,}25$

$= 200\pi + 100\pi = 300\pi = 942$ λεπτά $= 9{,}42$ ευρώ

3.

Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = 1$, $AΓ = 3$ και $ΓΔ = 2$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του $x = AM$, όταν το M διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα $AΓ$.



Λύση

- Όταν $0 < x \le 1$

  Το τρίγωνο ΑΜΝ είναι όμοιο με το ΑΒΕ $\Rightarrow \frac{MN}{2} = \frac{x}{1} \Rightarrow MN = 2x$

  Τότε $E(x) = \frac{1}{2}(AM)(MN) = \frac{1}{2}x\,2x = x^2$

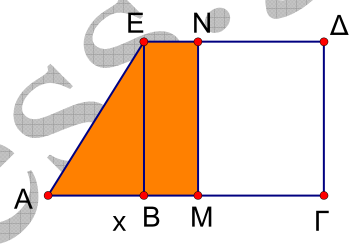
- Όταν $1 < x \le 3$

  $E(x) = (ABE) + (BMNE)$

  $= \frac{1}{2}(AB)(BE) + (BM)(MN)$

  $= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 + (x-1)\cdot 2$

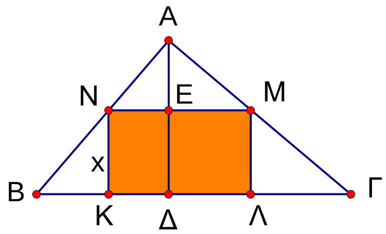
  $= 1 + 2x - 2 = 2x - 1$



$$E(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x \le 1 \\ 2x-1, & 1 < x \le 3 \end{cases}$$

4.

Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ ύψους x cm είναι εγγεγραμμένο σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ βάσης ΒΓ = 10 cm και ύψους ΑΔ = 5 cm. Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε και την περίμετρο Ρ του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.



Λύση

Τρίγωνο ΑΝΜ όμοιο του ΑΒΓ $\Rightarrow$

$\frac{NM}{BΓ} = \frac{AE}{AΔ} \Rightarrow \frac{NM}{10} = \frac{5-x}{5} \Rightarrow 5NM = 10(5-x) \Rightarrow NM = 2(5-x)$

$E(x) = 2(5-x)\cdot x = 10x - 2x^2, \quad 0 < x < AΔ = 5$

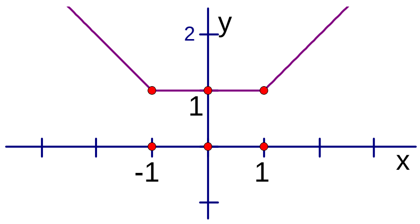
$P(x) = 2\cdot 2(5-x) + 2x = 20 - 4x + 2x = 20 - 2x, \quad 0 < x < AΔ = 5$

5.i)

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{|x+1|+|x-1|}{2}$

Από τη γραφική παράσταση της f, να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της.

Λύση



- Όταν $x < -1$

  $f(x) = \dfrac{-x-1-x+1}{2} = -x$

- Όταν $-1 \le x < 1$

  $f(x) = \dfrac{x+1-x+1}{2} = 1$

- Όταν $x \ge 1$, $f(x) = \dfrac{x+1+x-1}{2} = x$

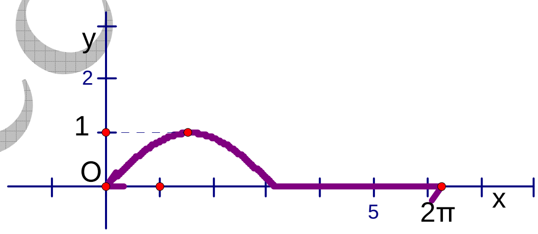
Το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το διάστημα $[1, +\infty)$

5.ii)

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\eta\mu x+|\eta\mu x|}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$

Από τη γραφική παράσταση της f, να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της.

Λύση



- Όταν $0 \le x < \pi$

  $f(x) = \dfrac{\eta\mu x+\eta\mu x}{2} = \eta\mu x$

- Όταν $\pi \le x \le 2\pi$

  $f(x) = \dfrac{\eta\mu x-\eta\mu x}{2} = 0$

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το διάστημα $[0, 1]$

6.

Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια ώστε :

i) $(fog)(x) = x^2 + 2x + 2$, αν $g(x) = x + 1$

ii) $(fog)(x) = \sqrt{1+x^2}$, αν $g(x) = -x^2$

iii) $(gof)(x) = |συνx|$, αν $g(x) = \sqrt{1-x^2}$

Λύση

i)

$D_{fog} = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$

Θέτουμε $y = g(x) = x + 1$, οπότε $x = y - 1$ με $y \in \mathbb{R}$.

$(fog)(x) = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow f(g(x)) = (y-1)^2 + 2(y-1) + 2$

$f(y) = y^2 - 2y + 1 + 2y - 2 + 2$

$f(y) = y^2 + 1$, $y \in \mathbb{R}$

ii)

$D_{fog} = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$

Θέτουμε $y = g(x) = -x^2 \le 0$, οπότε $x^2 = -y$ με $y \in (-\infty, 0]$.

$(fog)(x) = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow f(g(x)) = \sqrt{1-y}$

$f(y) = \sqrt{1-y}$, με $y \in (-\infty, 0]$

iii)

$D_{gof} = \mathbb{R}$, $D_g = [-1, 1]$ αφού πρέπει $1 - x^2 \ge 0$

Στον τύπο $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ θέτουμε όπου x, f(x) με $x \in \mathbb{R}$ και βέβαια με $f(x) \in [-1, 1]$.

$g(f(x)) = \sqrt{1-f(x)^2}$, αλλά δίνεται $(gof)(x) = |συνx|$, άρα

$|συνx| = \sqrt{1-[f(x)]^2} \Rightarrow συν^2x = 1 - [f(x)]^2$

$[f(x)]^2 = 1 - συν^2x$

$[f(x)]^2 = ημ^2x$

$f(x) = |ημx|$, $x \in \mathbb{R}$ αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιείται ο περιορισμός $f(x) \in [-1, 1]$.

7.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + 1$ και $g(x) = \alpha x + 2$. Για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $fog = gof$.

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$

$$D_{fog} = \left\{x \in D_g \quad \text{με} \quad g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad g(x) \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}$$

$$D_{gof} = \left\{x \in D_f \quad \text{με} \quad g(x) \in D_g\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad g(x) \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}$$

$$fog = gof \quad \Leftrightarrow \quad f(g(x)) = g(f(x)) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$f(\alpha x + 2) = g(x + 1)$$

$$\alpha x + 2 + 1 = \alpha(x + 1) + 2$$

$$\alpha x + 3 = \alpha x + \alpha + 2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 1$$

8.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}$, με $\beta \neq -\alpha^2$ και $g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$.

Να αποδείξετε ότι

α) $f(f(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\alpha\}$ και

β) $g(g(x)) = x$, για κάθε $x \in [0, 1]$

Λύση

α)

$D_f = \mathbb{R} - \{\alpha\}$,

$$\begin{aligned} D_{fof} = \{x \in D_f \ \text{ με } \ f(x) \in D_f\} &= \left\{x \neq \alpha \ \text{ με } \ \frac{\alpha x+\beta}{x-\alpha} \neq \alpha\right\} \\ &= \{x \neq \alpha \ \text{ με } \ \alpha x+\beta \neq \alpha x - \alpha^2\} \\ &= \{x \neq \alpha \ \text{ με } \ \beta \neq -\alpha^2\} \\ &= \mathbb{R} - \{\alpha\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(f(x)) = \frac{\alpha f(x)+\beta}{f(x)-\alpha} &= \frac{\alpha\dfrac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}+\beta}{\dfrac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}-\alpha} = \frac{\alpha^2 x+\alpha\beta+\beta x-\alpha\beta}{\alpha x+\beta-\alpha x+\alpha^2} \\ &= \frac{\alpha^2 x+\beta x}{\beta+\alpha^2} = \frac{x(\alpha^2+\beta)}{\beta+\alpha^2} = x \end{aligned}$$

β)

$D_g = [0, +\infty)$ και $g(x) = (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + 1 = (1 - \sqrt{x})^2$

$$\begin{aligned} D_{gog} = \{x \in D_g \ \text{ με } \ g(x) \in D_g\} &= \{x \in [0, +\infty) \ \text{ με } \ x - 2\sqrt{x} + 1 \in [0, +\infty)\} \\ &= \{x \geq 0 \ \text{ με } \ x - 2\sqrt{x} + 1 \geq 0\} \\ &= \{x \geq 0 \ \text{ με } \ (\sqrt{x}-1)^2 \geq 0\} \\ &= [0, +\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(g(x)) = (1 - \sqrt{g(x)})^2 &= (1 - \sqrt{(1-\sqrt{x})^2})^2 \\ &= (1 - |1-\sqrt{x}|)^2 \\ &\overset{*}{=} [1 - (1 - \sqrt{x})]^2 = (1 - 1 + \sqrt{x})^2 = x \end{aligned}$$

* αφού $x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$

$0 \leq \sqrt{x} \leq 1$

$1 - \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow |1-\sqrt{x}| = 1 - \sqrt{x}$

9.
Οι πολεοδόμοι μιας πόλης εκτιμούν ότι, όταν ο πληθυσμός P της πόλης είναι x εκατοντάδες χιλιάδες άτομα, θα υπάρχουν στην πόλη $N = 10\sqrt{2(x^2+x)}$ χιλιάδες αυτοκίνητα. Έρευνες δείχνουν ότι σε t έτη από σήμερα ο πληθυσμός της πόλης θα είναι $\sqrt{t}+4$ εκατοντάδες χιλιάδες άτομα.

i) Να εκφράσετε τον αριθμό N των αυτοκινήτων της πόλης ως συνάρτηση του t.

ii) Πότε θα υπάρχουν στην πόλη 120 χιλιάδες αυτοκίνητα;

Λύση

i)
Έστω $N = N(x) = 10\sqrt{2(x^2+x)} = 10\sqrt{2}\,\sqrt{x^2+x}$, $x \geq 0$
και $x = x(t) = \sqrt{t} + 4$, $t \geq 0$.
Η σύνθεση $N(t) = N(x(t)) = 10\sqrt{2}\,\sqrt{(\sqrt{t}+4)^2+\sqrt{t}+4}$

$$= 10\sqrt{2}\,\sqrt{t+8\sqrt{t}+16+\sqrt{t}+4}$$

$$= 10\sqrt{2}\,\sqrt{t+9\sqrt{t}+20}$$ εκφράζει αριθμό N των αυτοκινήτων της πόλης ως συνάρτηση του t.

ii)
Θα λύσουμε την εξίσωση $N(t) = 120$

$$10\sqrt{2}\,\sqrt{t+9\sqrt{t}+20} = 120$$

$$\sqrt{2}\,\sqrt{t+9\sqrt{t}+20} = 12$$

$$2(t + 9\sqrt{t} + 20) = 144$$

$$t + 9\sqrt{t} + 20 = 72$$

$$(\sqrt{t}\,)^2 + 9\sqrt{t} - 52 = 0$$

$\Delta = 81 + 208 = 289$, $\sqrt{t} = \dfrac{-9\pm\sqrt{289}}{2} = \dfrac{-9\pm17}{2} = 4$ ή -13 απορρίπτεται.

Άρα $t = 16$.