Γενικές ασκήσεις σχ. Βιβλίου σελίδας 123 – 124

1.

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(z) = \dfrac{(z-1)(\overline{z}+1)}{z+\overline{z}}$ με $z \in \mathbb{C}$ και $\text{Re}(z) \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(-\dfrac{1}{\overline{z}}\right) = f(z)$.

β) Έστω α, β δύο (σταθεροί) πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί από το 0. Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία M(x, y), με $x \neq 0$, για τα οποία οι μιγαδικοί αριθμοί z = αx + βyi ικανοποιούν τη σχέση $\text{Re}\left(f(z)\right) = 0$.

Λύση

α)

$$f\left(-\frac{1}{\overline{z}}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{\overline{z}}-1\right)\left(-\frac{1}{z}+1\right)}{-\frac{1}{\overline{z}}-\frac{1}{z}} = \frac{\frac{-1-\overline{z}}{\overline{z}}\;\frac{-1+z}{z}}{-\frac{z+\overline{z}}{\overline{z}z}} = \frac{(1+\overline{z})(z-1)}{z+\overline{z}} = f(z).$$

β)

$$f(z) = \frac{(z-1)(\overline{z}+1)}{z+\overline{z}} = \frac{z\overline{z}+z-\overline{z}-1}{2\alpha x}$$

$$= \frac{\left|z^2\right|+2\beta yi-1}{2\alpha x}$$

$$= \frac{(\alpha x)^2+(\beta y)^2+2\beta yi-1}{2\alpha x}$$

$$= \frac{(\alpha x)^2+(\beta y)^2-1}{2\alpha x} + \frac{2\beta y}{2\alpha x}i$$

$$\text{Re}\left(f(z)\right) = 0 \iff \frac{(\alpha x)^2+(\beta y)^2-1}{2\alpha x} = 0$$

$$\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 - 1 = 0$$

$$\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\beta}\right)^2} = 1$$ που είναι έλλειψη.

2.

Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w και w_1, για τους οποίους ισχύουν :
$w = z - zi$ και $w_1 = \frac{1}{\alpha} + \alpha i$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι, αν το α μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $w = \overline{w}_1$, τότε η εικόνα P του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε μια υπερβολή.

Λύση

Έστω $z = x + yi$

$w = z - zi \Rightarrow w = x + yi - (x + yi)i$
$= x + yi - xi + y = (x + y) + (y - x)i$

$w = \overline{w}_1 \Rightarrow w_1 = \overline{w} = (x + y) - (y - x)i$, αλλά $w_1 = \frac{1}{\alpha} + \alpha i$,

άρα $\frac{1}{\alpha} + \alpha i = (x + y) - (y - x)i \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = x + y$ και $\alpha = x - y \Rightarrow$
$\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = (x + y)(x - y) \Rightarrow$
$1 = x^2 - y^2$ που είναι υπερβολή.

3.

Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z = \lambda + 2 + (3\lambda - 1)i, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού w, για τον οποίο ισχύει $w = z + (1 + i)$.

γ) Να βρείτε το μιγαδικό z που έχει την πλησιέστερη εικόνα στην αρχή $O(0, 0)$.

Λύση

α)

Έστω $z = x + yi$

$$\begin{aligned} z = \lambda + 2 + (3\lambda - 1)i \quad \Leftrightarrow \quad & x + yi = \lambda + 2 + (3\lambda - 1)i \\ & x = \lambda + 2 \quad \text{και} \quad y = 3\lambda - 1 \\ & \lambda = x - 2 \quad \text{και} \quad y = 3(x - 2) - 1 \\ & y = 3x - 6 - 1 \\ & y = 3x - 7 \quad \mathbf{(1)} \end{aligned}$$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $\varepsilon: \; y = 3x - 7$

β)

$$\begin{aligned} \text{Είναι} \quad w &= z + (1 + i) \\ &= \lambda + 2 + (3\lambda - 1)i + 1 + i \\ &= \lambda + 3 + (3\lambda - 1 + 1)i \\ &= \lambda + 3 + 3\lambda i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Έστω} \quad w = x + yi \quad \Leftrightarrow \quad & \lambda + 3 + 3\lambda i = x + yi \\ & x = \lambda + 3 \quad \text{και} \quad y = 3\lambda \\ & \lambda = x - 3 \quad \text{και} \quad y = 3(x - 3) \\ & y = 3x - 9 \end{aligned}$$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι η ευθεία $\theta: \; y = 3x - 9$

γ)

Φέρνουμε $OK \perp \varepsilon$ και έστω M η εικόνα του τυχαίου z.

Τότε $(OK) \leq (OM)$, δηλαδή το σημείο της (ε), που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το O είναι το K.

$$\lambda_\varepsilon = 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{OK} = -\frac{1}{3}$$

Εξίσωση της ευθείας OK: $\quad y - 0 = -\frac{1}{3}(x - 0) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x \quad \mathbf{(2)}$

Σύστημα των (1), (2) για να βρούμε τις συντεταγμένες του K:

$$(1), (2) \quad \Rightarrow \quad 3x - 7 = -\frac{1}{3}x \quad \Rightarrow \quad 9x - 21 = -x \quad \Rightarrow \quad 10x = 21 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{21}{10}$$

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{3} \cdot \frac{21}{10} = -\frac{7}{10}$$

Άρα $K\left(\frac{21}{10}, \; -\frac{7}{10}\right)$

4.

Να γραμμοσκιάσετε το τμήμα του μιγαδικού επιπέδου που ορίζουν οι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει :

α) $|2z+1| < |z+i|$ **β)** $|z-1| = 1 + \text{Re}(z)$

Λύση

α)

Έστω $z = x + yi$

$$|2z+1| < |z+i| \Leftrightarrow |2(x+yi)+1| < |x+yi+i|$$

$$|(2x+1)+2yi| < |x+(y+1)i|$$

$$\sqrt{(2x+1)^2+(2y)^2} < \sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 < x^2 + y^2 + 2y + 1$$

$$3x^2 + 3y^2 + 4x - 2y < 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y < 0$$

$$x^2 + 2.\frac{2}{3}x + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + y^2 - 2.\frac{1}{3}y + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 < 0$$

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} + \left(y-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} < 0$$

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{3}\right)^2 < \frac{5}{9}$$

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{3}\right)^2 < \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών z είναι τα εσωτερικά σημεία του κυκλικού δίσκου με κέντρο $K\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{5}}{3}$

β)

Έστω $z = x + yi$

$$|z-1| = 1 + \text{Re}(z) \Leftrightarrow |x+yi-1| = 1 + \text{Re}(z)$$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 1 + x$$

$$(x-1)^2 + y^2 = (1+x)^2 \quad \text{και} \quad 1 + x \geq 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 + 2x + x^2 \quad \text{και} \quad x \geq -1$$

$$y^2 = 4x \quad \text{και} \quad x \geq -1$$

$$y^2 = 4x$$

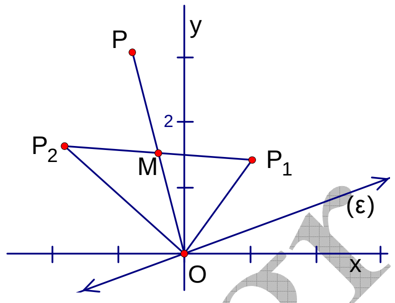
Άρα οι εικόνες των μιγαδικών z είναι τα σημεία της παραβολής $y^2 = 4x$.

5.

Να αποδείξετε ότι αν οι μιγαδικοί $z_1, z_2, \ldots, z_\kappa$ έχουν τις εικόνες τους στο ίδιο ημιεπίπεδο μιας ευθείας που διέρχεται από την αρχή O(0, 0), τότε ισχύει $z_1 + z_2 + \ldots + z_\kappa \neq 0$.

Λύση

Ας δούμε το πρόβλημα για δύο μιγαδικούς z_1, z_2 των οποίων οι εικόνες P_1, P_2 βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ευθείας (ε) που διέρχεται από την αρχή O(0, 0).



Το άθροισμά τους $z_1 + z_2$ έχει διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OM}$, όπου M το μέσο του τμήματος P_1P_2, οπότε το πέρας P βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο.

Άρα $z_1 + z_2 \neq 0$, αφού $P \neq O$

Με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ και ……………

$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_\kappa \neq 0$.

6.

Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των λύσεων της εξίσωσης $(1-z)^\nu = z^\nu$ είναι σημεία της ευθείας $x = \frac{1}{2}$.

Λύση

$$(1-z)^\nu = z^\nu \Rightarrow \left|(1-z)^\nu\right| = \left|z^\nu\right|$$

$$|1-z|^\nu = |z|^\nu$$

$$|1-z| = |z|$$

$$|1-z|^2 = |z|^2$$

$$(1-z)(1-\overline{z}) = z\overline{z}$$

$$1-\overline{z} - z + z\overline{z} = z\overline{z}$$

$$z + \overline{z} = 1 \qquad \textbf{(1)}$$

Έστω $z = x + yi$. (1) $\Rightarrow$ $2x = 1$ $\Rightarrow$ $x = \frac{1}{2}$.

7.

Αν το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με πραγματικούς συντελεστές και $\alpha \neq 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, να αποδείξετε ότι :

α) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς κ και λ ισχύει

$$(\alpha \kappa^2 + \beta\kappa + \gamma)(\alpha \lambda^2 + \beta\lambda + \gamma) > 0.$$

β) Για οποιουσδήποτε συζυγείς μιγαδικούς z_1 και z_2 διαφορετικούς από τις ρίζες του τριωνύμου ισχύει επίσης

$$(\alpha z_1^2 + \beta z_1 + \gamma)(\alpha z_2^2 + \beta z_2 + \gamma) > 0.$$

Λύση

Θέτουμε $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

α)

Αφού το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες, είναι $\Delta < 0$,

άρα $f(x)$ ομόσημο του α για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

άρα $f(\kappa)$, $f(\lambda)$ ομόσημοι,

άρα $f(\kappa) \cdot f(\lambda) > 0$

β)

$$\begin{aligned}(\alpha z_1^2 + \beta z_1 + \gamma)(\alpha z_2^2 + \beta z_2 + \gamma) &= (\alpha z_1^2 + \beta z_1 + \gamma)(\alpha \overline{z}_1^2 + \beta \overline{z}_1 + \gamma) \\ &= (\alpha z_1^2 + \beta z_1 + \gamma)(\alpha \overline{z_1^2} + \beta \overline{z}_1 + \gamma) \\ &= (\alpha z_1^2 + \beta z_1 + \gamma)\overline{(\alpha z_1^2 + \beta z_1 + \gamma)} \\ &= \left|\alpha z_1^2 + \beta z_1 + \gamma\right|^2 > 0\end{aligned}$$