Γενικές ασκήσεις σχ. Βιβλίου 3ου κεφαλαίου

1.

i) Να χρησιμοποιήσετε την αντικατάσταση $u = \pi - x$ για να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{\pi} x f(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx$$

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}dx$

Λύση

i)

$u = \pi - x \Rightarrow du = -dx$ και $x = \pi - u$

x	0	π
u	π	0

Έστω $I = \int_0^{\pi} x f(\eta\mu x)dx \Rightarrow I = \int_{\pi}^{0} (\pi - u)\, f\left(\eta\mu(\pi - u)\right)(-du)$

Αλλά $\eta\mu(\pi - u) = \eta\mu u$, άρα $I = \int_{\pi}^{0} (\pi - u)\, f(\eta\mu u)(-du)$

$$I = -\int_{\pi}^{0} (\pi - u)\, f(\eta\mu u)du$$

$$I = \int_0^{\pi} (\pi - u)\, f(\eta\mu u)du$$

$$I = \int_0^{\pi} [\pi\, f(\eta\mu u)du - u\, f(\eta\mu u)]du$$

$$I = \int_0^{\pi} \pi\, f(\eta\mu u)du - \int_0^{\pi} u\, f(\eta\mu u)du$$

$$I = \pi\int_0^{\pi} f(\eta\mu u)du - I$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi} f(\eta\mu u)du$$

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu u)du$$

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx$$

ii)

Έστω $A = \int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}dx = \int_0^{\pi} x\frac{\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}dx$ **(1)**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(u) = \frac{u}{3+u^2}$, $u \in \mathbb{R}$, οπότε $f(\eta\mu x) = \frac{\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}$

$$(1) \Rightarrow A = \int_0^{\pi} x\, f(\eta\mu x)dx \overset{(i)}{=} \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx$$

netsuccess.gr

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\eta\mu x}{3+1-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\eta\mu x}{4-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx \qquad \textbf{(2)}$$

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x = u$, οπότε $du = -\eta\mu x dx$,

x	0	π
u	1	−1

(2) $\Rightarrow$ $A = \frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-1}{4-u^2}du = \frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{1}{u^2-4}du$ **(3)**

Αναζητάμε αριθμούς α, β έτσι ώστε να ισχύει

$\frac{1}{u^2-4} = \frac{\alpha}{u-2} + \frac{\beta}{u+2}$ για κάθε $u \neq \pm 2$ $\Leftrightarrow$ $1 = \alpha(2+u) + \beta(u-2)$

$1 = (\alpha+\beta)u + 2\alpha - 2\beta$

$2\alpha - 2\beta = 1$ και $\alpha + \beta = 0$

$\alpha = \frac{1}{4}$ και $\beta = -\frac{1}{4}$

Άρα $\frac{1}{u^2-4} = \frac{1}{4(u-2)} - \frac{1}{4(u+2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2}\right)$

(3) $\Rightarrow$ $A = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{4}\int_1^{-1}\left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2}\right)du = \frac{\pi}{8}\left[\ln|u-2|\right]_1^{-1} - \frac{\pi}{8}\left[\ln|u+2|\right]_1^{-1}$

$$= \frac{\pi}{8}(\ln 3 - \ln 1) - \frac{\pi}{8}(\ln 1 - \ln 3) = \frac{\pi}{4}\ln 3$$

netsuccess.gr

2.

i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}dx$

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x}dx$

Λύση

i)

Αναζητάμε πραγματικούς αριθμούς α , β έτσι ώστε να ισχύει

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} \text{ για κάθε } x \neq \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = (\alpha+\beta)x + \alpha - \beta$$

$$\alpha + \beta = 0 \quad \text{και} \quad \alpha - \beta = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ και } \beta = -\frac{1}{2}$$

Άρα $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|x-1|\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left[\ln|x+1|\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln 1\right) - \frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{2} - \ln 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 1 - \ln 2 - \ln 1 - \ln 3 + \ln 2 + \ln 1) = \frac{1}{2}(-\ln 3) = -\frac{1}{2}\ln 3$$

ii)

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x}dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx \qquad \textbf{(1)}$$

Θέτουμε συνx = u , οπότε du = −ημx dx και

x	π/3	π/2
u	1/2	0

$$(1) \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{-1}{1-u^2}du = \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{u^2-1}du = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2-1}du \overset{(i)}{=} \frac{1}{2}\ln 3$$

netsuccess.gr

3.

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{(u+1)(u+2)}du$$

Και στην συνέχεια τα ολοκληρώματα

i) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{(\eta\mu x+1)(\eta\mu x+2)}dx$, **ii)** $\int \frac{e^x}{(e^x+1)(e^x+2)}dx$

Λύση

Αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς α και β έτσι ώστε να ισχύει

$\frac{1}{(u+1)(u+2)} = \frac{\alpha}{u+1} + \frac{\beta}{u+2}$ για κάθε u, με $u \neq -1, -2$ $\Leftrightarrow$

$1 = \alpha(u + 2) + \beta(u + 1) \Leftrightarrow 1 = (\alpha + \beta)u + 2\alpha + \beta$

$\alpha + \beta = 0$ και $2\alpha + \beta = 1$

$\alpha = 1$ και $\beta = -1$

οπότε

$$\int \frac{1}{(u+1)(u+2)}du = \int \left(\frac{1}{u+1} + \frac{-1}{u+2}\right)du = \ln|u + 1| - \ln|u + 2| + c$$

i)

Για το $I_1 = \int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{(\eta\mu x+1)(\eta\mu x+2)}dx$ θέτω : $\eta\mu x = u$ οπότε $du = \sigma\upsilon\nu x dx$ άρα

$$I_1 = \int \frac{1}{(u+1)(u+2)}du = \ln|u + 1| - \ln|u + 2| + c = \ln|\eta\mu x + 1| - \ln|\eta\mu x + 2| + c$$

ii)

Για το $I_2 = \int \frac{e^x}{(e^x+1)(e^x+2)}dx$ θέτω : $e^x = u$ οπότε $du = e^x dx$ άρα

$$I_2 = \int \frac{1}{(u+1)(u+2)}du = \ln|u + 1| - \ln|u + 2| + c$$

$$= \ln|e^x + 1| - \ln|e^x + 2| + c =$$

$$= \ln(e^x + 1) - \ln(e^x + 2) + c$$

netsuccess.gr

4.

Αν $I_\nu = \int_0^1 \frac{t^{2\nu+1}}{1+t^2}dt$, $\quad \nu \in \mathbb{N}$

i) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $I_\nu + I_{\nu+1}$, $\quad \nu \in \mathbb{N}$

ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: I_o , I_1 , I_2

Λύση

i)

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{t^{2\nu+1}}{1+t^2}\,dt + \int_0^1 \frac{t^{2(\nu+1)+1}}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{t^{2\nu+1}}{1+t^2} + \frac{t^{2\nu+3}}{1+t^2}\right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{t^{2\nu+1} + t^{2\nu+3}}{1+t^2}\right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{t^{2\nu+1}(1+t^2)}{1+t^2}\right) dt$$

$$= \int_0^1 t^{2\nu+1}\,dt = \left[\frac{t^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2}$$

ii)

$$I_o = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

Για $\nu = 0$ (i) $\Rightarrow$ $I_o + I_1 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $I_1 = \frac{1}{2} - I_o$ $\Rightarrow$ $I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

Για $\nu = 1$ (i) $\Rightarrow$ $I_1 + I_2 = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $I_2 = \frac{1}{4} - I_1$

$$I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$$

netsuccess.gr

5 .

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt\right)du$$

Λύση

Θέτουμε $g(x) = \int_0^x f(u)(x-u)du$, $x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt\right)$, $x \in \mathbb{R}$

Θα αποδείξουμε ότι $g(x) = h(x)$

$$g(x) = \int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x [xf(u) - uf(u)]\, du$$

$$= \int_0^x xf(u)du - \int_0^x uf(u)du$$

$$= x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du \quad \Rightarrow$$

$$g'(x) = \int_0^x f(u)du + x\left(\int_0^x f(u)du\right)' - \left(\int_0^x uf(u)du\right)'$$

$$g'(x) = \int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x)$$

$$g'(x) = \int_0^x f(u)du \qquad \textbf{(1)}$$

$$h'(x) = \int_0^x f(u)du \qquad \textbf{(2)}$$

Από (1), (2) $\Rightarrow$ $g'(x) = h'(x)$ $\Rightarrow$ $g(x) = h(x) + c$ **(3)**

Αλλά $g(0) = \int_0^0 f(u)(x-u)du = 0$ και $h(0) = \int_0^0 \left(\int_0^u f(t)dt\right) = 0$

Η (3) για $x = 0$ $\Rightarrow$ $g(0) = h(0) + c$ $\Rightarrow$ $0 = 0 + c$ $\Rightarrow$ $c = 0$

Η (3) $\Rightarrow$ $g(x) = h(x)$

netsuccess.gr

6.

Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=\int_1^x f(t)dt$, όπου $f(t)=\int_1^t \sqrt{u^2-1}du$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και F.

ii) Να αποδείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.

Λύση

i)

Η συνάρτηση $g(u)=\sqrt{u^2-1}$, $u\in\Delta=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ είναι συνεχής στο Δ.

Για να ορίζεται η f, θα πρέπει τα άκρα 1 και t να βρίσκονται στο ίδιο διάστημα.

Και επειδή $1\in[1,+\infty)$, θα πρέπει και $t\in[1,+\infty)$. Άρα $D_f=[1,+\infty)$.

Ομοίως $D_F=[1,+\infty)$.

ii)

$$F'(x)=\left(\int_1^x f(t)dt\right)'=f(x)=\int_1^x \sqrt{u^2-1}\,du \qquad \textbf{(1)}$$

$$F''(x)=f'(x)=\sqrt{x^2-1}>0 \quad \text{για κάθε} \quad x\in(1,+\infty) \qquad \textbf{(2)}$$

Οπότε η F' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Και επειδή $1<x \Rightarrow F'(1)<F'(x)$ **(3)**

Η (1) για $x=1 \Rightarrow F'(1)=\int_1^1 \sqrt{u^2-1}\,du=0$

Η (3) $\Rightarrow 0<F'(x) \Rightarrow$ F γνησίως αύξουσα

Η (2) $\Rightarrow F''(x)>0$ στο $(1,+\infty) \Rightarrow$ F κυρτή στο $[1,+\infty)$

netsuccess.gr

7.

Δίνονται τα ολοκληρώματα

$$F(x) = \int_0^x e^t \sigma\upsilon\nu^2 t\, dt \quad \text{και} \quad G(x) = \int_0^x e^t \eta\mu^2 t\, dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

i) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$F(x) + G(x) \quad \text{και} \quad F(x) - G(x)$$

και στην συνέχεια τα ολοκληρώματα $F(x)$ και $G(x)$

ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$I = \int_\pi^{2\pi} e^t \sigma\upsilon\nu^2 t dt \quad \text{και} \quad J = \int_\pi^{2\pi} e^t \eta\mu^2 t dt$$

Λύση

i)

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) &= \int_0^x e^t \sigma\upsilon\nu^2 t\, dt + \int_0^x e^t \eta\mu^2 t\, dt \\ &= \int_0^x (e^t \sigma\upsilon\nu^2 t + e^t \eta\mu^2 t) dt \\ &= \int_0^x e^t (\sigma\upsilon\nu^2 t + \eta\mu^2 t) dt \\ &= \int_0^x e^t dt = e^x - 1 \qquad \textbf{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) - G(x) &= \int_0^x e^t \sigma\upsilon\nu^2 t dt - \int_0^x e^t \eta\mu^2 t dt = \\ &= \int_0^x e^t (\sigma\upsilon\nu^2 t - \eta\mu^2 t) dt = \\ &= \int_0^x e^t \sigma\upsilon\nu 2t\, dt \qquad \textbf{(2)} \end{aligned}$$

Έστω $A(x) = \int_0^x e^t \sigma\upsilon\nu 2t\, dt$ τότε

$$\begin{aligned} A(x) = \int_0^x (e^t)' \sigma\upsilon\nu 2t\, dt &= \left[e^t \sigma\upsilon\nu 2t\right]_0^x - \int_0^x -2e^t \eta\mu 2t\, dt \\ &= e^x \sigma\upsilon\nu 2x - 1 + 2\int_0^x (e^t)' \eta\mu 2t\, dt \\ &= e^x \sigma\upsilon\nu 2x - 1 + 2\left[e^t \eta\mu 2t\right]_0^x - 2\int_0^x 2e^t \sigma\upsilon\nu 2t\, dt \\ &= e^x \sigma\upsilon\nu 2x - 1 + 2e^x \eta\mu 2x - 4\int_0^x e^t \sigma\upsilon\nu 2t\, dt \\ &= e^x \sigma\upsilon\nu 2x - 1 + 2e^x \eta\mu 2x - 4A(x) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$A(x) = e^x \sigma\upsilon\nu 2x - 1 + 2e^x \eta\mu 2x - 4A(x)$$

$$5A(x) = e^x \sigma\upsilon\nu 2x + 2e^x \eta\mu 2x - 1$$

$$A(x) = \frac{1}{5}(e^x \sigma\upsilon\nu 2x + 2e^x \eta\mu 2x - 1) \text{ δηλαδή}$$

$$(2) \Rightarrow F(x) - G(x) = \frac{1}{5}(e^x \sigma\upsilon\nu 2x + 2e^x \eta\mu 2x - 1) \qquad \textbf{(3)}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2F(x) = \frac{1}{5}(e^x \sigma\upsilon\nu 2x + 2e^x \eta\mu 2x - 1) + e^x - 1$$

netsuccess.gr

$$F(x) = \frac{1}{10}(e^x \sigma\upsilon\nu 2x + 2e^x \eta\mu 2x) + \frac{e^x}{2} - \frac{3}{5} \qquad \textbf{(4)}$$

$$(1)-(2) \quad \Rightarrow \quad 2G(x) = e^x - 1 - \frac{1}{5}(e^x \sigma\upsilon\nu 2x + 2e^x \eta\mu 2x - 1)$$

$$G(x) = \frac{e^x}{2} - \frac{1}{10}(e^x \sigma\upsilon\nu 2x + 2e^x \eta\mu 2x) - \frac{2}{5}$$

ii)

$$F(x) = \int_0^x e^t \sigma\upsilon\nu^2 t\, dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \left(\int_0^x e^t \sigma\upsilon\nu^2 t dt\right)' = e^x \sigma\upsilon\nu^2 x$$

Άρα $I = \int_\pi^{2\pi} e^t \sigma\upsilon\nu^2 t dt = \int_\pi^{2\pi} F'(t)dt$

$$= \left[F(t)\right]_\pi^{2\pi} = F(2\pi) - F(\pi) \overset{(4)}{=} \text{πράξεις} = \frac{3}{5}e^\pi(e^\pi - 1)$$

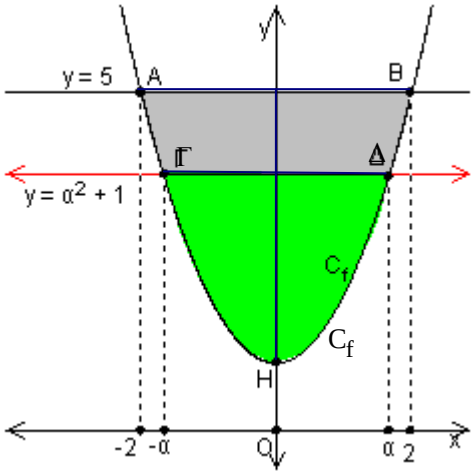
Ομοίως $J = \frac{2}{5}e^\pi(e^\pi - 1)$

netsuccess.gr

8.

Το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ και την ευθεία $y = 5$ χωρίζεται από την ευθεία $y = \alpha^2 + 1$, $\alpha > 0$ σε δύο ισεμβαδικά χωρία . Να βρείτε την τιμή του α

Λύση



Τα σημεία Α και Β έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 1 = 5$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \quad ή \quad x = -2$$

Άρα $A(-2, 5)$ και $B(2, 5)$

Τα σημεία Γ και Δ έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 1 = \alpha^2 + 1$

$$x^2 = \alpha^2$$

$$x = \alpha \quad ή \quad x = -\alpha$$

Άρα $\Gamma(-\alpha, \alpha^2+1)$ και $\Delta(\alpha, \alpha^2+1)$

Η γκρίζα περιοχή έχει ίσο εμβαδόν με την πράσινη

$$E_{\Gamma\Delta H} = E_{AB\Gamma\Delta} \Leftrightarrow E_{\Gamma\Delta H} = \frac{1}{2} E_{ABH}$$

$$2E_{\Gamma\Delta H} = E_{ABH}$$

$$2\int_{-\alpha}^{\alpha}[\alpha^2+1-(x^2+1)]dx = \int_{-2}^{2}[5-(x^2+1)]dx$$

$$2\int_{-\alpha}^{\alpha}[\alpha^2+1-x^2-1]dx = \int_{-2}^{2}[5-x^2-1]dx$$

$$2\int_{-\alpha}^{\alpha}[\alpha^2-x^2]dx = \int_{-2}^{2}[4-x^2]dx$$

$$2\left[\alpha^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-\alpha}^{\alpha} = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$$

$$2\left[\alpha^2\alpha - \frac{\alpha^3}{3}\right] - 2\left[\alpha^2(-\alpha) - \frac{(-\alpha)^3}{3}\right] = \left[4.2 - \frac{2^3}{3}\right] - \left[4(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right]$$

$$2\frac{2}{3}\alpha^3 - 2\left(-\alpha^3 + \frac{\alpha^3}{3}\right) = 8 - \frac{8}{3} - \left(-8 + \frac{8}{3}\right)$$

$$\frac{4}{3}\alpha^3 - 2\left(-\frac{2}{3}\alpha^3\right) = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3}$$

$$\frac{4}{3}\alpha^3 + \frac{4}{3}\alpha^3 = 16 - \frac{16}{3}$$

$$4\alpha^3 + 4\alpha^3 = 48 - 16$$

$$8\alpha^3 = 32$$

$$\alpha^3 = 4 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt[3]{4}$$

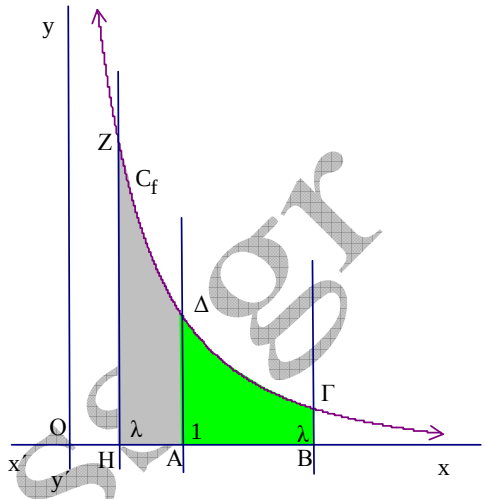
netsuccess

9.

i) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x^2}$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1$, $x = \lambda$, $\lambda > 0$.

ii) Να βρεθούν οι τις τιμές του λ έτσι, ώστε $E(\lambda) = \frac{1}{2}$

iii) Να βρεθούν τα $\lim\limits_{\lambda \to 0} E(\lambda)$ και $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$



Λύση

i)

- Όταν $\lambda > 1$ (πράσινη περιοχή)

  $E(\lambda) = \int_1^{\lambda} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\lambda} = 1 - \frac{1}{\lambda}$

- Όταν $0 < \lambda < 1$ (γκρίζα περιοχή)

  $E(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{\lambda} - 1$

- Όταν $\lambda = 1$ το

  $E(\lambda) = 0$

ii)

$E(\lambda) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$ με $\lambda > 1$ ή $\frac{1}{\lambda} - 1 = \frac{1}{2}$ με $\lambda < 1$

$2\lambda - 2 = \lambda$ ή $2 - 2\lambda = \lambda$

$\lambda = 2$ ή $2 = 3\lambda$

$\lambda = 2$ ή $\lambda = \frac{2}{3}$

iii)

$\lim\limits_{\lambda \to 0} E(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to 0^+} \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) = +\infty$

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = 1$

netsuccess.gr

10.

Έστω f και g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι :

i) Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$

ii) Αν m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$m(\beta-\alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq M(\beta-\alpha)$$

iii) Με την βοήθεια της ανισότητας $\varepsilon\varphi x > x$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ είναι γνησίως φθίνουσα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι :

α) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{3}{\pi}$ για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ και

β) $\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{x} dx \leq \frac{1}{2}$

iv) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ είναι γν. φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και στην συνέχεια με την βοήθεια της ανισότητας $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι :

α) $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και

β) $\frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$

Λύση

i)

$f(x) \geq g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, άρα

$$\int_\alpha^\beta [f(x) - g(x)]dx \geq 0$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)\, dx \geq 0$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

ii)

$m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta \overset{(i)}{\Rightarrow} \int_\alpha^\beta m\, dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \leq \int_\alpha^\beta M\, dx$

$$m(\beta-\alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq M(\beta-\alpha)$$

iii)

$$f'(x) = \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)' = \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\varepsilon\varphi x > x \Rightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} > x \Rightarrow \eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x < 0$$

$(1) \Rightarrow f'(x) < 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$ f γν. φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

α) Είναι $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f\left(\frac{\pi}{6}\right) \geq f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

netsuccess.gr

$$\frac{\eta\mu\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} \geq \frac{\eta\mu x}{x} \geq \frac{\eta\mu\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6}} \geq \frac{\eta\mu x}{x} \geq \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{3}{\pi}$$

β) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{3}{\pi} \overset{(ii)}{\Rightarrow} \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{x}\,dx \leq \frac{3}{\pi}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{x}\,dx \leq \frac{1}{2}$$

ιν)

$f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = -2x\,e^{-x^2} < 0$ στο $x \in (0, +\infty) \Rightarrow$
f γν. φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

α) Έστω τυχαίο $x \in [0, 1]$

$x \geq 0 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x) \leq f(0)$

$e^{-x^2} \leq e^{-0^2}$

$e^{-x^2} \leq 1$ **(2)**

Είναι $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Θέτοντας όπου x το $-x^2$ παίρνουμε $e^{-x^2} \geq -x^2 + 1$

$e^{-x^2} \geq 1 - x^2$ **(3)**

Από τις (2), (3) $\Rightarrow 1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1$

β) $-x^2 + 1 \leq e^{-x^2} \leq 1 \overset{(i)}{\Rightarrow} \int_0^1 (-x^2+1)dx \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq \int_0^1 1dx$

$$\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1 \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq 1$$

$$\frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq 1$$

netsuccess.gr