3.5
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 338 - 340

Α΄ Ομάδας

1.

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)\, dx$ **ii)** $\int_1^e \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}}\, dx$

iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{συν}x - 2\,\text{ημ}x)\, dx$ **iv)** $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

Λύση

i)

$$\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)\, dx = [x^3 - x^2 + x]_0^2 = (2^3 - 2^2 + 2) - (0 - 0 + 0) = 8 - 4 + 2 = 6$$

ii)

$$\int_1^e \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}}\, dx = \int_1^e \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right) dx$$

$$= \int_1^e \left(\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} + x^{-\frac{3}{2}}\right) dx$$

$$= \int_1^e \left(\frac{1}{x} + x^{-\frac{3}{2}}\right) dx = \left[\ln x + \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right]_1^e$$

$$= \left[\ln x - 2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^e$$

$$= \left(\ln e - 2e^{-\frac{1}{2}}\right) - (\ln 1 - 2)$$

$$= 1 - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{e}} + 2 = \;= 3 - \frac{2}{\sqrt{e}}$$

iii)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sigma\upsilon\nu x - 2\ \eta\mu x)\,dx = [\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\eta\mu\frac{\pi}{2} + 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right) - (\eta\mu 0 + 2\sigma\upsilon\nu 0)$$

$$= 1 + 0 - 0 - 2 = -1$$

iv)

$$\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_1^2\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{2^3}{3}+2\cdot 2-\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{1^3}{3}+2\cdot 1-\frac{1}{1}\right]$$

$$= \frac{8}{3}+4-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-2+1 = \frac{29}{6}$$

2.

Να αποδείξετε ότι $\int_1^2\frac{x^3+7x}{x^2+5}dx + 2\int_2^1\frac{x}{x^2+5}dx = \frac{3}{2}$

Λύση

$$\int_1^2\frac{x^3+7x}{x^2+5}\,dx + 2\int_2^1\frac{x}{x^2+5}\,dx = \int_1^2\frac{x^3+7x}{x^2+5}\,dx - 2\int_1^2\frac{x}{x^2+5}\,dx$$

$$= \int_1^2\left(\frac{x^3+7x}{x^2+5} - \frac{2x}{x^2+5}\right)dx$$

$$= \int_1^2\frac{x^3+7x-2x}{x^2+5}\,dx$$

$$= \int_1^2\frac{x^3+5x}{x^2+5}\,dx$$

$$= \int_1^2\frac{x(x^2+5)}{x^2+5}\,dx$$

$$= \int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{4}{2}-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

3.

Να αποδείξετε ότι $2\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, f\,'(x)\, dx = (f(\beta))^2 - (f(\alpha))^2$

Λύση

$$2\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, f\,'(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} 2\, f(x)\, f\,'(x)\, dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left((f(x))^2\right)'\, dx$$

$$= \left[\left(f(x)\right)^2\right]_{\alpha}^{\beta} = (f(\beta))^2 - (f(\alpha))^2$$

4.

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία A(0, 0) και B(1, 1), να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_{0}^{1} f\,'(x)\, dx$, εφόσον η $f\,'$ είναι συνεχής στο $[0\,,\,1]$.

Λύση

Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία A(0, 0) και B(1, 1) ισχύουν $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$

Επίσης $\int_{0}^{1} f\,'(x)\, dx = \left[f(x)\right]_{0}^{1} = f(1) - f(0) = 1 - 0 = 1$

5.

Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων

i) $F(x) = \int_1^{\sigma\upsilon\nu x} \sqrt{1-t^2}\, dt$ **ii)** $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{1} \dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\theta}\, d\theta$

Λύση

i)

$$F'(x)=\left(\int_1^{\sigma\upsilon\nu x}\sqrt{1-t^2}dt\right)' = \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'$$

$$= \sqrt{\eta\mu^2 x}\cdot(-\eta\mu x)$$

$$= -\eta\mu x\,|\eta\mu x|$$

ii)

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{1}\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\theta}\,d\theta = -\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\theta}\,d\theta \Rightarrow F'(x) = \left(-\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\theta}\,d\theta\right)'$$

$$= -\frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x})'$$

$$= -\frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{2\,x}$$

6.

i) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

ii) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

Λύση

i)

$$f'(x)=\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

ii) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \overset{(i)}{=} \int_0^1 f'(x)dx = f(1)-f(0) = \ln(1+\sqrt{2})-\ln 1=\ln(1+\sqrt{2})$

Β΄ ομάδας

1.

Αν $\int_0^x t\,g(t)\,dt=x^4+x^6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε το $g(1)$

Λύση

$\int_0^x t\,g(t)\,dt=x^4+x^6 \quad\Rightarrow\quad \left(\int_0^x t\,g(t)\,dt\right)'=(x^4+x^6)'$

$x\cdot g(x)=4x^3+6x^5\ ,\quad x\in\mathbb{R}$

Για $x=1$ έχουμε $\quad g(1)=4+6=10$

2.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\int_x^{x+1} e^{συν2πt}\,dt$, είναι σταθερή

Λύση

Πεδίο ορισμού : $D_f=\mathbb{R}$

$$f(x)=\int_x^{1} e^{συν2πt}dt+\int_1^{x+1} e^{συν2πt}dt = -\int_1^{x} e^{συν2πt}dt+\int_1^{x+1} e^{συν2πt}dt$$

Άρα $f\,'(x) = \left(-\int_1^{x} e^{συν2πt}dt+\int_1^{x+1} e^{συν2πt}dt\right)'$

$$= -e^{συν2πx}+e^{συν2π(x+1)}(x+1)'$$

$$= -e^{συν2πx}+e^{συν(2πx+2π)}$$

$$= -e^{συν2πx}+e^{συν2πx} = 0$$

Επομένως η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

3.

Αν $f(x)=\int_0^{x-2}\frac{t}{e^t}\,dt$, να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f .

Λύση

Πεδίο ορισμού : $D_f=\mathbb{R}$

$f\,'(x)=\frac{x-2}{e^{x-2}}$, $f\,'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

Πρόσημο της f ΄ και μονοτονία της f

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f΄		–	0	+	
f		↘	|	↗	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty , 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2 , +\infty)$

Παρουσιάζει ελάχιστο για $x=2$, το $f(2)=\int_0^{0}\frac{t}{e^t}\,dt=0$

4.

Αν $F(x) = \int_0^x x\, f(t)\, dt$, να βρείτε την $F'(x)$

Λύση

$$F(x) = \int_0^x x\, f(t)\, dt \quad \Rightarrow \quad F(x) = x \int_0^x f(t)\, dt$$

$$F'(x) = x' \int_0^x f(t)\, dt + x \left(\int_0^x f(t)dt\right)'$$

$$= \int_0^x f(t)dt + x\, f(x)$$

5.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\, dt + \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t^2+1}\, dt$ είναι σταθερή

στο $(0 , +\infty)$ και να βρείτε τον τύπο της .

Λύση

Για κάθε $x \in (0 ,+\infty)$ έχουμε $F'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right)'$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Άρα $F(x) = c$.

Η δοσμένη ισότητα για $x = 1$ δίνει $F(1) = \int_1^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt + \int_1^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = 0 + 0 = 0$

Οπότε $F(x) = 0$ για κάθε $x \in (0 , +\infty)$

6.

Να βρείτε το $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{5+t^2}\, dt$

Λύση

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{5+t^2}\, dt = \lim_{h\to 0} \frac{\int_2^{2+h} \sqrt{5+t^2}dt}{h} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\int_2^{2+h} \sqrt{5+t^2}dt\right)'}{h'}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5+(2+h)^2}}{1} = \sqrt{9} = 3$$

7.

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$ **ii)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x + x)\eta\mu x \;-\; \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x + x)]\,dx$

Λύση

i)

$I = \int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

Θέτουμε $x^2 - 4 = u \;\Rightarrow\; 2x\,dx = du \;\Rightarrow\; xdx = \frac{1}{2}du$

Για $x = 4 \;\Rightarrow\; u = 4^2 - 4 = 12$

Για $x = 6 \;\Rightarrow\; u = 6^2 - 4 = 32$

Οπότε το Ι γράφεται $I = \int_{12}^{32} \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \left[\sqrt{u}\right]_{12}^{32} = \sqrt{32} - \sqrt{12} = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

ii)

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x + x)\eta\mu x \;-\; \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x + x)]\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x + x)(\eta\mu x \;-1\;)]\,dx$

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x + x = u \;\Rightarrow\; (-\eta\mu x + 1)dx = du \;\Rightarrow\; (\eta\mu x - 1)dx = -du$

Για $x = 0 \;\Rightarrow\; u = \sigma\upsilon\nu 0 + 0 = 1$

Για $x = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; u = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

Οπότε $I = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu u\,(-du) = \int_1^{\frac{\pi}{2}} -\eta\mu u\,du = [\sigma\upsilon\nu u]_1^{\frac{\pi}{2}} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \;-\; \sigma\upsilon\nu 1 = -\sigma\upsilon\nu 1$

8.i

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 \left(x^2 - |x-1| \right) dx$

Λύση

Είναι $|x-1| = x-1$ αν $x \geq 1$ και $|x-1| = -x+1$ αν $x \leq 1$ οπότε

$$I = \int_0^2 \left(x^2 - |x-1| \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 - |x-1| \right) dx + \int_1^2 \left(x^2 - |x-1| \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - (-x+1) \right) dx + \int_1^2 \left(x^2 - (x-1) \right) dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 + x - 1) dx + \int_1^2 (x^2 - x + 1)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1\right) - 0 + \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1\right)$$

$$= \frac{5}{6} - 1 + \frac{4}{6} + 2 + \frac{1}{6} - 1 = \frac{5}{3}$$

8.ii

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$, αν $f(x) = \begin{cases} x & , \quad -\pi \leq x \leq 0 \\ \eta\mu x, & \quad 0 < x \leq \pi \end{cases}$

Λύση

Επειδή $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x = 0 = f(0)$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \eta\mu x = 0 = f(0)$,

η f είναι συνεχής στο $x_o = 0$, άρα συνεχής και στο $[-\pi, \pi]$

Οπότε $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{0} x\, dx + \int_0^{\pi} \eta\mu x\, dx$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} + [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi}$$

$$= \left(0 - \frac{\pi^2}{2}\right) + (-\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0)$$

$$= -\frac{\pi^2}{2} + 1 + 1 = 2 - \frac{\pi^2}{2}$$

8.iii

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 |x^2-3x+2|\, dx$

Λύση

Πρόσημο του τριώνυμου :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	−	0	+	

Οπότε

$$\int_0^3 |x^2-3x+2|\, dx = \int_0^1 (x^2-3x+2)\, dx + \int_1^2 (-x^2+3x-2)\, dx + \int_2^3 (x^2-3x+2)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_2^3$$

$$= \frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2-0+-\frac{8}{3}+\frac{12}{2}-4--\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2+\frac{27}{3}-\frac{27}{2}+6-\frac{8}{3}-\frac{12}{2}+4$$

$$= \frac{11}{6}$$

9.i

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$

Λύση

Παραγοντική

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx = \int_1^{e^2} \ln x \cdot (2\sqrt{x})' dx$$

$$= \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\, dx$$

$$= \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^{e^2} - 2\int_1^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$= \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^{e^2} - 2\left[2\sqrt{x}\right]_1^{e^2}$$

$$= 2\sqrt{e^2}\ \ln e^2 - 2\sqrt{1}\ \ln 1 - 4(\sqrt{e^2}-\sqrt{1})$$

$$= 2e\cdot 2\ln e - 0 - 4e + 4 = 4e - 4e + 4 = 4$$

9.ii

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x\, e^{-x} dx$

Λύση

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{-x}\, dx &= \int_0^1 x\,(-e^{-x})'\, dx\\ &= \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}\, dx\\ &= \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \left[e^{-x}\right]_0^1\\ &= (-1\cdot e^{-1}-0)-(e^{-1}-e^{0})\\ &= -\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1 = 1-\frac{2}{e}\end{aligned}$$

9.iii

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x\ln(9+x^2)\, dx$

Λύση

Θέτουμε $9+x^2=u \Rightarrow 2xdx = du \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}du$

Για $x=0 \Rightarrow u = 9+0^2 = 9$

Για $x=1 \Rightarrow u = 9+1^2 = 10$

Οπότε
$$\begin{aligned}\int_0^1 x\ln(9+x^2)\, dx &= \int_9^{10}\frac{1}{2}\ln u\, du\\ &= \frac{1}{2}\int_9^{10}\ln u\, du\\ &= \frac{1}{2}\int_9^{10} u'\ln u\, du\\ &= \frac{1}{2}\left[u\ln u\right]_9^{10}-\frac{1}{2}\int_9^{10} u\cdot\frac{1}{u}\, du =\\ &= \frac{1}{2}\left[u\ln u\right]_9^{10}-\frac{1}{2}\int_9^{10} du\\ &= \frac{1}{2}\left[u\ln u\right]_9^{10} - \frac{1}{2}\left[u\right]_9^{10}\\ &= \frac{1}{2}(10\cdot\ln 10-9\ln 9)-\frac{1}{2}(10-9)\\ &= 5\ln 10-\frac{9}{2}\ln 9-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

9.iv

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \;\text{συν}2x\, dx$

Λύση

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \;\text{συν}2x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)'\text{συν}2x\, dx$$

$$= \left[e^x\text{συν}2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(-2\text{ημ}2x)\, dx$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}}\text{συν}2\frac{\pi}{2} - e^0\text{συν}0 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \;\text{ημ}2x\, dx$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}}(-1) - 1 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)' \;\text{ημ}2x\, dx$$

$$= -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + 2\left[e^x\text{ημ}2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\text{ημ}2x)'\, dx$$

$$= -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + 2\left[e^{\frac{\pi}{2}}\text{ημ}2\frac{\pi}{2} - e^0\text{ημ}0\right] - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\text{συν}2x\, dx$$

$$= -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + 2[0-0] - 4I$$

$$= -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - 4I$$

Αποδείξαμε ότι $I = -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - 4I \Rightarrow 5I = -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \Rightarrow I = \frac{1}{5}\left(-e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$

10.

Αν $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\eta\mu^2 x\,dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\sigma\upsilon\nu^2 x\,dx$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$I + J$, $I - J$, I , J

Λύση

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\eta\mu^2 x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\sigma\upsilon\nu^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\,\eta\mu^2 x + x\sigma\upsilon\nu^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \textbf{(1)}$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\eta\mu^2 x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\sigma\upsilon\nu^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\,\eta\mu^2 x - x\,\sigma\upsilon\nu^2 x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,(\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\sigma\upsilon\nu 2x)\,dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\sigma\upsilon\nu 2x\,dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\eta\mu 2x}{2}\right)'dx$$

$$= -\left[x\frac{\eta\mu 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu 2x}{2}\,dx$$

$$= -\left[\frac{\pi}{2}\frac{\eta\mu\pi}{2} - \frac{0}{2}\frac{\eta\mu 0}{2}\right] + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu 2x\,dx$$

$$= -0 - \frac{1}{4}\left[\sigma\upsilon\nu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu 0\right]$$

$$= -\frac{1}{4}(-1-1) = \frac{1}{2} \qquad \textbf{(2)}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2I = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 2I = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$$

11.

Έστω μία συνάρτηση f με συνεχή την f'' και για την οποία ισχύει

$$\int_0^{\pi}(f(x) + f''(x))\,\eta\mu x\,dx = 2\,.$$

Αν $f(\pi) = 1$, με την βοήθεια της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, να υπολογίσετε το f(0)

Λύση

$$\int_0^{\pi}(f(x) + f''(x))\,\eta\mu x\,dx = 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x\,dx + \int_0^{\pi} f''(x)\,\eta\mu x\,dx = 2$$

$$\int_0^{\pi} f(x)(-\sigma\upsilon\nu x)'\,dx + \int_0^{\pi}(f'(x))'\,\eta\mu x\,dx = 2$$

$$[-\sigma\upsilon\nu x\, f(x)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f'(x)\,\sigma\upsilon\nu x\,dx + [f'(x)\eta\mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)\,\sigma\upsilon\nu x\,dx = 2$$

$$(-\sigma\upsilon\nu\pi\, f(\pi) + \sigma\upsilon\nu 0\, f(0)) + (f'(\pi)\,\eta\mu\pi - f'(0)\,\eta\mu 0) = 2$$

$$1\cdot 1 + 1\cdot f(0) + 0 = 2$$

$$f(0) = 1$$

12.

Έστω οι συναρτήσεις f , g με f'', g'' συνεχείς στο $[\alpha , \beta]$. Αν $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ και $f'(\beta) = g'(\beta)$, να αποδείξετε ότι

$$I = \int_{\alpha}^{\beta}(f(x)\,g''(x) - f''(x)\,g(x))\,dx = g'(\beta)\,(f(\beta) - g(\beta))$$

Λύση

$$I = \int_{\alpha}^{\beta}(f(x)\,g''(x) - f''(x)\,g(x))\,dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g''(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} f''(x)g(x)dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(x)(g'(x))'dx - \int_{\alpha}^{\beta}(f'(x))'g(x))dx$$

$$= [f(x)\,g'(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g'(x)\,dx - [f'(x)\,g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\,g'(x)dx$$

$$= (f(\beta)g'(\beta) - f(\alpha)g'(\alpha)) - (f'(\beta)g(\beta) - f'(\alpha)g(\alpha)) =$$

$$= f(\beta)g'(\beta) - 0 - f'(\beta)g(\beta) + 0$$

$$= f(\beta)g'(\beta) - g'(\beta)g(\beta) =$$

$$= g'(\beta)\,(f(\beta) - g(\beta))$$