2.8
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 277 – 279

Α΄ Ομάδας

1.i)

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 2$

είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής

της γραφικής της παράστασης.

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 15x^4 - 20x^3$

$f''(x) = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x-1)$

$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ή $x = 1$

$f''(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f παρουσιάζονται στον πίνακα

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
f(x)		$\frown$		$\frown$		$\smile$	

Σημείο καμπής είναι το $A(1, f(1)) = (1, 0)$, αφού η f'' μηδενίζεται στο 1 και εναλλάσσει πρόσημο εκατέρωθέν του .

1.ii)

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{x^3}$

είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Λύση

$D_g = \mathbb{R}^*$

$$g'(x) = \frac{6x \cdot x^3 - (3x^2 - 2)3x^2}{x^6} = \frac{6x^4 - 9x^4 + 6x^2}{x^6} = \frac{-3x^4 + 6x^2}{x^6} = \frac{-3x^2 + 6}{x^4}$$

$$g''(x) = \frac{-6x \cdot x^4 - (-3x^2 + 6)4x^3}{x^8} = \frac{-6x^5 + 12x^5 - 24x^3}{x^8}$$

$$= \frac{6x^5 - 24x^3}{x^8}$$

$$= 6\,\frac{x^3 - 4x}{x^6}$$

$g''(x) = 0 \iff x^3 - 4x = 0 \iff x^2 - 4 = 0 \iff x = 2$ ή $x = -2$

$g''(x) > 0 \iff x^3 - 4x > 0 \iff x(x^2 - 4) > 0 \iff x(x-2)(x+2) > 0$

Το πρόσημο της g'' και η κυρτότητα της g παρουσιάζονται στον πίνακα

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\frown$		$\smile$	$\Vert$	$\frown$		$\smile$	

Σημεία καμπής είναι τα $A(-2,\ g(-2))$, $B(2,\ g(2))$, αφού η g'' μηδενίζεται σ'αυτά και εναλλάσσει πρόσημο εκατέρωθέν τους.

2.i)

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x) = x e^{1-x}$ είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{1-x} + x e^{1-x}(1-x)' = e^{1-x} - x e^{1-x}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (e^{1-x})' - (x e^{1-x})' \\ &= -e^{1-x} - (e^{1-x} - x e^{1-x}) \\ &= -e^{1-x} - e^{1-x} + x e^{1-x} = e^{1-x}(x-2) \end{aligned}$$

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f παρουσιάζονται στον πίνακα

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$	

Σημείο καμπής είναι το $A(2, f(2)) = (2, \frac{2}{e})$, αφού η f'' μηδενίζεται στο 2 και εναλλάσσει πρόσημο εκατέρωθέν του.

2.ii)

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $g(x) = x^2(2\ln x - 5)$ είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Λύση

$D_f = (0, +\infty)$

$$g'(x) = 2x(2\ln x - 5) + x^2 2\frac{1}{x}$$

$$= 4x\ln x - 10x + 2x = 4x\ln x - 8x$$

$$g''(x) = 4(\ln x + 1) - 8 = 4\ln x + 4 - 8 = 4\ln x - 4 = 4(\ln x - 1)$$

Το πρόσημο της g'' και η κυρτότητα της g παρουσιάζονται στον πίνακα

x	0		e		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		∩		∪	

Σημείο καμπής είναι το $A(e, g(e)) = (e, -3e^2)$, αφού η g'' μηδενίζεται στο e και εναλλάσσει πρόσημο εκατέρωθέν του .

3.iii)

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} -3x^2+1 & , \ x < 0 \\ -x^3+3x^2+1 & , \ x \geq 0 \end{cases}$

είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Λύση

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-3x^2+1-1}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}(-3x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^3+3x^2+1-1}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^3+3x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+}(-x^2+3x) = 0$$

Άρα $h'(0) = 0$, δηλαδή η C_h έχει εφαπτομένη στο σημείο $B(0, h(0)) = (0, 1)$

Είναι $h'(x) = \begin{cases} -6x & , \ x < 0 \\ -3x^2+6x & , \ x > 0 \end{cases}$ και $h''(x) = \begin{cases} -6 & , \ x < 0 \\ -6x+6 & , \ x > 0 \end{cases}$

Το πρόσημο της h'' και η κυρτότητα της h παρουσιάζονται στον πίνακα

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$h''(x)$		$-$	|	$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

Σημείο καμπής είναι το $A(1, h(1)) = (1, 3)$, αφού η h'' μηδενίζεται στο 1 και εναλλάσσει πρόσημο εκατέρωθέν του .

Επίσης σημείο καμπής είναι το $B(0, h(0)) = (0, 1)$, αφού η C_h έχει εφαπτομένη στο B και η h'' εναλλάσσει πρόσημο εκατέρωθεν του 0.

3.i)

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{-x^2}(-x^2)' = -2x\,e^{-x^2}$

$$f''(x) = -2\left(x\,e^{-x^2}\right)' = -2\left(e^{-x^2} + x\,e^{-x^2}(-x^2)'\right)$$
$$= -2\,e^{-x^2}\left(1 + x(-2x)\right)$$
$$= -2\,e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right) = 2\,e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right)$$

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ \text{ ή } \ x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f παρουσιάζονται στον πίνακα

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\smile$		$\frown$		$\smile$	

Σημείο καμπής είναι τα σημεία $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ f(-\frac{\sqrt{2}}{2})\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ e^{-\frac{1}{2}}\right)$ και

$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ f(\frac{\sqrt{2}}{2})\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ e^{-\frac{1}{2}}\right)$

αφού η f'' μηδενίζεται στις θέσεις $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\frac{\sqrt{2}}{2}$, και εναλλάσσει πρόσημο εκατέρωθέν τους.

3.ii)

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $g(x) = εφx$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$ είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Λύση

$$g'(x) = \frac{1}{συν^2 x}$$

$$g''(x) = -\frac{1}{συν^4 x}(συν^2 x)' = -\frac{1}{συν^4 x}(-2\,συνx\ ημx) = 2\frac{1}{συν^3 x}\,ημx$$

$$g''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ημx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

Το πρόσημο της g'' και η κυρτότητα της g παρουσιάζονται στον πίνακα

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\frown$		$\smile$	

Σημείο καμπής είναι το $A(0,\ g(0)) = (0,\ 0)$, αφού η g'' μηδενίζεται στο 0 και εναλλάσσει πρόσημο εκατέρωθέν του .

3.iii)

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $h(x) = x|x|$ είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Λύση

$$h(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

Άρα $h'(0) = 0$, δηλαδή η C_h έχει εφαπτομένη στο σημείο $B(0, h(0)) = (0, 0)$

$$h'(x) = \begin{cases} -2x, & x < 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad h''(x) = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$$

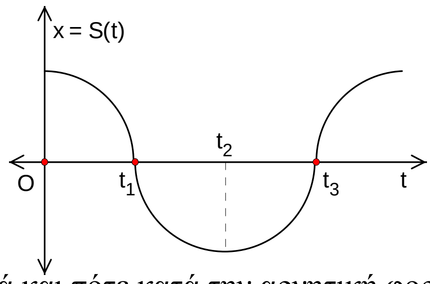
Το πρόσημο της h'' και η κυρτότητα της h παρουσιάζονται στον πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h''(x)$	$-$		$+$
$h(x)$	$\frown$		$\smile$

Σημείο καμπής είναι το $B(0, h(0)) = (0, 0)$, αφού η C_h έχει εφαπτομένη στο B και η h'' εναλλάσσει πρόσημο εκατέρωθεν του 0.

5.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης θέσεως x = S(t) ενός κινητού που κινείται πάνω σε έναν άξονα . αν η C παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_1 και t_3 , να βρείτε :



i) Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά .

ii) Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται.

Λύση

i)

Στο διάστημα $[0,\ t_2]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα , άρα το κινητό κινείται κατά την αρνητική φορά .

Στο διάστημα $[t_2,\ +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα , άρα το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά .

ii)

Στο διάστημα $[0,\ t_1]$ η συνάρτηση S στρέφει τα κοίλα κάτω , άρα η συνάρτηση $S'(t) = \upsilon(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα , επομένως η ταχύτητα του κινητού μειώνεται .

Στο διάστημα $[t_1,\ t_3]$ η συνάρτηση S στρέφει τα κοίλα άνω , άρα η συνάρτηση $S'(t) = \upsilon(t)$ είναι γνησίως αύξουσα , επομένως η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται .

Στο διάστημα $[t_3,\ +\infty)$ η συνάρτηση S στρέφει τα κοίλα κάτω , άρα η συνάρτηση $S'(t) = \upsilon(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα , επομένως η ταχύτητα του κινητού μειώνεται .

Β΄ Ομάδας

1.

Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

και να αποδείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1-x^2)'(x^2+1)^2-(1-x^2)[(x^2+1)^2]'}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{-2x(x^2+1)^2-(1-x^2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{-2x(x^2+1)-(1-x^2)2.\ 2x}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ή $x = \sqrt{3}$ η $x = -\sqrt{3}$

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f παρουσιάζονται στον πίνακα

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f(x)		∩		∪		∩		∪	

$f(-\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{3+1} = \frac{-\sqrt{3}}{4}$, $\qquad f(0) = 0$, $\qquad f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3+1} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Σημείο καμπής είναι το $A\left(-\sqrt{3},\ \frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$, αφού η f'' μηδενίζεται στο $-\sqrt{3}$ και εναλλάσσει πρόσημο εκατέρωθέν του .

Ομοίως για τα σημεία $B(0,\ 0)$ και $\Gamma(\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{4})$

Τα σημεία Α, Γ είναι συμμετρικά ως προς το $B(0,\ 0)$, διότι έχουν αντίθετες συντεταγμένες.

2.

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$$

έχει για κάθε τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή $y = -x^2 + 2$.

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$

$f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 = 0$

$e^{x-\alpha} = 1$

$e^{x-\alpha} = e^0 \Leftrightarrow x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f παρουσιάζονται στον πίνακα

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$	

$f(\alpha) = 2e^{\alpha-\alpha} - \alpha^2 = 2 - \alpha^2$

Σημείο καμπής είναι το $A(\alpha\,,\ 2 - \alpha^2)$, αφού η f'' μηδενίζεται στο α και εναλλάσσει πρόσημο εκατέρωθέν του.

Οι συντεταγμένες του σημείου A επαληθεύουν την εξίσωση $y = -x^2 + 2$ (όπου y θέτουμε $2 - \alpha^2$ και όπου x θέτουμε α), άρα το A ανήκει στην παραβολή $y = -x^2 + 2$.

3.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (-2,\ 2)$ η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 + 2x + 1$$

είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 6\alpha x^2 + 12x + 2$

$f''(x) = 12x^2 - 12\alpha x + 12 = 12(x^2 - \alpha x + 1)$

$\Delta = \alpha^2 - 4 < 0$, αφού $\alpha \in (-2,\ 2)$

Άρα το τριώνυμο $x^2 - \alpha x + 1$ είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f κυρτή στο $\mathbb{R}$

4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

i) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακρότατων και x_3 η θέση του σημείου καμπής , να αποδείξετε ότι τα σημεία $A\big(x_1, f(x_1)\big)$, $B\big(x_2, f(x_2)\big)$, και $\Gamma\big(x_3, f(x_3)\big)$, είναι συνευθειακά.

Λύση

i)

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$, $\quad$ $f'(x) = 0 \iff x = 0$ ή $x = 2$

$f''(x) = 6x - 6$, $\quad$ $f''(x) = 0 \iff x = 1$

Το πρόσημο των f', f'', η μονοτονία , τα ακρότατα και η κυρτότητα της f παρουσιάζονται στον πίνακα

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–		–	0	+	
$f''(x)$		–		–	0	+		+	
$f(x)$									

Η f παρουσιάζει **:**

Στη θέση $x_1 = 0$ τοπικό μέγιστο $f(0) = 2$ κορυφής $A(0, 2)$

Στη θέση $x_2 = 2$ τοπικό ελάχιστο $f(2) = 2^3 - 3\cdot 2^2 + 2 = 8 - 12 + 2 = -2$ κορυφής $B(2, -2)$

Στη θέση $x_3 = 1$ σημείο καμπής $\Gamma(1,\ f(1)) = \Gamma(1,\ 0)$, αφού $f(1) = 1^3 - 3\cdot 1^2 + 2 = 0$

ii)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lambda_{AB} = \lambda_{A\Gamma}$

$$\frac{-2-2}{2-0} = \frac{0-2}{1-0} \quad \text{που ισχύει}$$

5.

Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο (–2, 2), για την οποία ισχύει

$$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

Λύση

$$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3\right)' = 0$$

$$2f(x)\, f'(x) - 2f'(x) + 2x = 0$$

$$f(x)\, f'(x) - f'(x) + x = 0$$

$$\left(f(x)\, f'(x) - f'(x) + x\right)' = 0$$

$$f'(x)\, f'(x) + f(x)\, f''(x) - f''(x) + 1 = 0 \quad \textbf{(1)}$$

Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής στη θέση x_o. Τότε $f''(x_o) = 0$.

Για $x = x_o$ η (1) $\Rightarrow$ $f'(x_o)\, f'(x_o) + f(x_o) f''(x_o) - f''(x_o) + 1 = 0$

$$[f'(x_o)]^2 + 0 + 0 + 1 = 0$$

$$[f'(x_o)]^2 + 1 = 0$$ που είναι άτοπο.