2.6
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 256 – 258

Α΄ Ομάδας

1.

Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν :

$$f'(x) = g(x) \quad \text{και} \quad g'(x) = -f(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = [f(x)]^2 + [g(x)]^2$ είναι σταθερή .

Λύση

Στο διάστημα $\mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \left([f(x)]^2 + [g(x)]^2\right)' \\ &= \left([f(x)]^2\right)' + \left([g(x)]^2\right)' \\ &= 2f(x)\,f'(x) + 2\,g(x)\,g'(x) \\ &= 2f(x)\,g(x) + 2\,g(x)\,[-f(x)] \\ &= 2f(x)\,g(x) - 2\,g(x)\,f(x) = 0\end{aligned}$$

. Άρα $\varphi(x) = c$

2.i)

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = x^3 + 3x - 4$

Λύση

Στο διάστημα $\mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$.

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

2.ii)

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

Λύση

Στο διάστημα $\mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$

$\Delta = 1 + 8 = 9$, Ρίζες της f': $\dfrac{1 \pm 3}{2} = -1$ ή 2

Το πρόσημο και οι ρίζες της f', όπως και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

netsuccess.gr

2.iii)

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

Λύση

Στο διάστημα $\mathbb{R}$ είναι $f'(x) = \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)' = \dfrac{x'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{[x^2+1]^2}$

$$= \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{[x^2+1]^2} = \frac{1-x^2}{[x^2+1]^2}$$

$f'(x) = 0 \iff 1-x^2 = 0 \iff x = -1$ ή $x = 1$

$f'(x) > 0 \iff 1-x^2 > 0 \iff -1 < x < 1$

Το πρόσημο και οι ρίζες της f', όπως και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

netsuccess.gr

3.i)

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & , \ x \le 1 \\ x+2 & , \ x > 1 \end{cases}$

Λύση

f συνεχής στο διάστημα $(-\infty\ ,\ 1)$ και στο διάστημα $(1\ ,\ +\infty)$ σαν πολυωνυμική

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (4 - x^2) = 4 - 1 = 3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x + 2) = 1 + 2 = 3$$

$f(1) = 4 - 1 = 3$ Άρα συνεχής και στο 1

Επομένως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x) = \begin{cases} -2x\ , & x < 1 \\ 1\ \ , & x > 1 \end{cases}$

- Στο διάστημα $(-\infty\ ,\ 1)$ **:**

  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -2x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

- Στο διάστημα $(1\ ,\ +\infty)$, είναι $f'(x) = 1 > 0$

Το πρόσημο και οι ρίζες της f', όπως και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+		$-$	
f(x)		↘		↗		↘	

netsuccess.gr

3.ii)

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = |x^2 - 1|$

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν απόλυτη τιμή συνεχούς .

Πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 1$ **:**

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
f(x)		+		$-$		+

Άρα η f γράφεται $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & , x < -1 \text{ ή } x \geq 1 \\ 1 - x^2 & , -1 \leq x < 1 \end{cases}$

και $f'(x) = \begin{cases} 2x & , x < -1 \text{ ή } x > 1 \\ -2x & , -1 < x < 1 \end{cases}$

Το πρόσημο και οι ρίζες της f', όπως και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+		$-$		+	
f(x)		↘		↗		↘		↗	

4.i)

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν πηλίκο συνεχών

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

Το πρόσημο και οι ρίζες της f', όπως και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	$-$	
f(x)		↗		↘	

netsuccess.gr

4.ii)

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = \ln x - x$

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ σα διαφορά συνεχών

Στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

Το πρόσημο και οι ρίζες της f', όπως και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
f(x)		↗		↘	

4.iii)

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης

$$f(x) = ημx + |ημx|, \quad x \in [0, 2\pi]$$

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[0, 2\pi]$ σαν άθροισμα συνεχών

και γράφεται $f(x) = \begin{cases} ημx + ημx, & 0 \le x < \pi \\ ημx - ημx, & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} 2ημx, & 0 \le x < \pi \\ 0, & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

Εξετάζουμε τη μονοτονία της f μόνο στο διάστημα $[0, \pi]$, αφού στο $[\pi, 2\pi]$ είναι σταθερή.

Είναι $f'(x) = 2συνx$

$f'(x) = 0 \quad 2συνx = 0 \quad συνx = 0 \quad x = \frac{\pi}{2}$

$f'(x) > 0 \quad 2συνx > 0 \quad συνx > 0 \quad 0 \le x < \frac{\pi}{2}$

Το πρόσημο και οι ρίζες της f', όπως και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		+	0	−	
f(x)		↗		↘	

netsuccess.gr

5.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^5 + 5x - 6$ και $g(x) = 2\sqrt{x} + x - 3$.

i) Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι γνησίως αύξουσες.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών τους.

iii) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $x^5 + 5x - 6 = 0$ και $2\sqrt{x} + x - 3 = 0$ έχουν ακριβώς μία ρίζα την $x = 1$.

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = [0, +\infty)$

i) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 5x^4 + 5 > 0$, άρα γνησίως αύξουσα.

Η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$g'(x) = 2\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 1 > 0$, άρα γνησίως αύξουσα.

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$

και επειδή f γνησίως αύξουσα και συνεχής, θα έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

iii) $g(0) = -3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

και επειδή g γνησίως αύξουσα και συνεχής, θα έχει σύνολο τιμών το $[-3, +\infty)$

iv) Η εξίσωση $x^5 + 5x - 6 = 0$ γράφεται $f(x) = 0$

Αλλά $f(1) = 0$, άρα ο 1 είναι ρίζα της f.

Και επειδή f γνησίως αύξουσα, η ρίζα είναι μοναδική.

Η εξίσωση $2\sqrt{x} + x - 3 = 0$ γράφεται $g(x) = 0$

Αλλά $g(1) = 0$, άρα ο 1 είναι ρίζα της g.

Και επειδή g γνησίως αύξουσα, η ρίζα είναι μοναδική.

netsuccess.gr

6.

Να αποδείξετε ότι **:**

i) Η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 + \ln(x+1)$ είναι γνησίως αύξουσα .

ii) Η εξίσωση $e^x = 1 - \ln(x+1)$ έχει ακριβώς μία λύση την $x = 0$.

Λύση

i) $D_f = (-1, +\infty)$, αφού πρέπει $x + 1 > 0$

Για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ είναι $f'(x) = e^x + \dfrac{1}{x+1} > 0$, άρα f γνησίως αύξουσα

ii) Η εξίσωση $e^x = 1 - \ln(x+1)$ γράφεται $e^x - 1 + \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Αλλά $f(0) = e^0 - 1 + \ln(0+1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$, άρα το 0 είναι ρίζα της f.

Και επειδή f γνησίως αύξουσα , η ρίζα είναι μοναδική.

Β΄ Ομάδας

1.

Αν για μία συνάρτηση f που είναι ορισμένη σ’ όλο το $\mathbb{R}$ ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \le (x-y)^2 \text{ για όλα τα } x, y \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση

Για το τυχαίο x_o και για κάθε $x \neq x_o$, η υπόθεση γίνεται

$$|f(x) - f(x_o)| \le (x - x_o)^2 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \le |x - x_o|^2$$

$$\frac{|f(x) - f(x_o)|}{|x - x_o|} \le |x - x_o|$$

$$\left|\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}\right| \le |x - x_o|$$

$$-|x - x_o| \le \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \le |x - x_o|$$

Επειδή όμως $\lim\limits_{x \to x_o} |x - x_o| = 0$, με το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = 0 \Rightarrow f'(x_o) = 0$$

Και επειδή το x_o είναι τυχαίο, για όλα τα x θα είναι $f'(x) = 0$, άρα f σταθερή.

netsuccess.gr

2.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + \alpha$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[-1, 1]$

iii) Αν $-2 < \alpha < 2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + \alpha = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(-1, 1)$.

Λύση

i)

Η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ σαν πολυωνυμική.

Για κάθε $x \in (-1, 1)$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) < 0$, άρα f γνησίως φθίνουσα.

ii)

Το σύνολο τιμών της f θα είναι το διάστημα $f([-1, 1]) = [f(1), f(-1)]$

Αλλά $f(1) = 1^3 - 3.1 + \alpha = \alpha - 2$

και $f(-1) = (-1)^3 - 3.(-1) + \alpha = -1 + 3 + \alpha = \alpha + 2$

Άρα $f([-1, 1]) = [\alpha - 2, \alpha + 2]$

iii)

$f(-1)\, f(1) = (\alpha + 2)(\alpha - 2) = \alpha^2 - 4 < 0$ αφού $-2 < \alpha < 2$.

Και επειδή f συνεχής, κατά Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$, δηλαδή η $x^3 - 3x + \alpha = 0$, θα έχει ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Και αφού f γνησίως φθίνουσα, η ρίζα θα είναι μοναδική.

netsuccess.gr

3.

Η θέση ενός κινητού πάνω σε έναν άξονα τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση **:**

$$x = S(t) = t^4 - 8t^3 + 18t^2 - 16t + 160, \quad 0 \le t \le 5.$$

Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού και στη συνέχεια να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα **:**

i) Πότε το κινητό έχει ταχύτητα μηδέν ;

ii) Πότε το κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά ;

iii) Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται ;

Λύση

$\upsilon(t) = S'(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t - 16 = 4(t^3 - 6t^2 + 9t - 4)$

$\alpha(t) = \upsilon'(t) = 4(3t^2 - 12t + 9) = 12(t^2 - 4t + 3)$

i)

$\upsilon(t) = 0 \iff t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = 0$ (με Σχήμα Horner) $\iff$

$(t-1)^2(t-4) = 0 \iff t = 1$ ή $t = 4$

ii)

Θα βρούμε το πρόσημο της ταχύτητας $\upsilon(t)$

t	0		1		4		5
$\upsilon(t)$		–	0	–	0	+	

Το κινητό κινείται προς τα δεξιά κατά το χρονικό διάστημα (4, 5),
ενώ κινείται προς τα αριστερά κατά το χρονικό διάστημα (0, 4)

iii)

Θα βρούμε το πρόσημο της επιτάχυνσης $\alpha(t)$

t	0		1		3		5
$\alpha(t)$		+	0	–	0	+	

Η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται κατά τα χρονικά διαστήματα (0, 1), (4, 5) και μειώνεται κατά το χρονικό διάστημα (1, 3).

netsuccess.gr

4.

Η τιμή V (σε ευρώ) ενός προϊόντος , t μήνες μετά την παραγωγή του , δίνεται από τον τύπο $V = 50 - \dfrac{25t^2}{(t+2)^2}$.

Να αποδείξετε ότι το προϊόν συνεχώς υποτιμάται χωρίς , όμως , η τιμή του να μπορεί να γίνει μικρότερη από το μισό της αρχικής τιμής του.

Λύση

Η τιμή του προϊόντος εκφράζεται από τη συνάρτηση

$$V(t) = 50 - \frac{25t^2}{(t+2)^2} = 25\left[2 - \frac{t^2}{(t+2)^2}\right], \quad t \in [0, +\infty)$$

$$V'(t) = 25\left[2 - \frac{t^2}{(t+2)^2}\right]'$$

$$= 25\left[0 - \frac{2t(t+2)^2 - t^2 2(t+2)}{(t+2)^4}\right]$$

$$= -25\,\frac{2t(t+2)(t+2-t)}{(t+2)^4} = -25\,\frac{4t}{(t+2)^3} < 0$$

Άρα η συνάρτηση V είναι γνησίως φθίνουσα , επομένως το προϊόν συνεχώς υποτιμάται.

Η αρχική τιμή είναι $V(0) = 50 - \dfrac{25.0^2}{(0+2)^2} = 50$

$$\lim_{t\to+\infty} V(t) = \lim_{t\to+\infty}\left[50 - \frac{25t^2}{(t+2)^2}\right]$$

$$= 50 - 25\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{(t+2)^2}$$

$$= 50 - 25\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{t^2+4t+4} = 50 - 25\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{t^2} = 25 = \frac{1}{2}\,V(0)$$

netsuccess.gr

5.

Να αποδείξετε ότι **:**

i) Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε το σύνολο τιμών της f σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

ii) Η εξίσωση $x^3 - \alpha x^2 - 9x + \alpha = 0$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = \alpha$ και στη συνέχεια ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Λύση

i)

Πρέπει $x^2 - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -1$ και $x \neq 1$.

Άρα $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{(x^3 - 9x)'(x^2 - 1) - (x^3 - 9x)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{(3x^2 - 9)(x^2 - 1) - (x^3 - 9x)2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 - 3x^2 - 9x^2 + 9 - 2x^4 + 18x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 + 6x^2 + 9}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(x^2 + 3)^2}{(x^2 - 1)^2} > 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της .

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} (x^3 - 9x) = (-1)^3 - 9(-1) = -1 + 9 = 8 > 0$$

και $\lim_{x \to -1^-} (x^2 - 1) = 0$ με $x^2 - 1 > 0$ Άρα $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

Επομένως $f\big((-\infty, -1)\big) = (-\infty, +\infty)$

Ομοίως $f\big((-1, 1)\big) = (-\infty, +\infty)$ και $f\big((1, +\infty)\big) = (-\infty, +\infty)$

ii)

Για κάθε $x \neq \pm 1$ η εξίσωση $f(x) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} = \alpha$

$$x^3 - 9x = \alpha x^2 - \alpha$$

$$x^3 - \alpha x^2 - 9x + \alpha = 0$$

Ελέγχουμε μήπως οι αριθμοί -1 ή 1 είναι ρίζες της $x^3 - \alpha x^2 - 9x + \alpha = 0$.

- Για τον -1 **:** $(-1)^3 - \alpha(-1)^2 - 9(-1) + \alpha = 0$

  $-1 - \alpha + 9 + \alpha = 0$

  $8 = 0$ που είναι άτοπο

- Για τον 1 **:** $1^3 - \alpha 1^2 - 9.1 + \alpha = 0$

  $1 - \alpha - 9 + \alpha = 0$

  $-8 = 0$ που είναι άτοπο

Επειδή το σύνολο τιμών της συνεχούς , σε καθένα από τα τρία διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$, συνάρτησης f είναι το $(-\infty, +\infty)$, η ευθεία

$y = \alpha$ θα τέμνει τη C_f σε τρία σημεία .

Άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ θα έχει τρεις ρίζες.
Και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα , οι τρεις ρίζες θα είναι μοναδικές.

6.

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}^*$ για τις οποίες η συνάρτηση
$f(x) = \alpha x^3 + 3x^2 + x + 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Στο $\mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 3\alpha x^2 + 6x + 1$

$\Delta = 36 - 12\alpha = 12(3 - \alpha)$

- Όταν $\alpha = 3$, δηλαδή $\Delta = 0$

  Το τριώνυμο $f'(x)$ έχει διπλή ρίζα $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{6}{2(3\alpha)} = -\dfrac{1}{\alpha} = -\dfrac{1}{3}$

  και είναι ομόσημο του $3\alpha = 3.\,3 = 9$, δηλαδή θετικό για κάθε $x < -\dfrac{1}{3}$ και για κάθε $x > -\dfrac{1}{3}$.

  Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,\ -\dfrac{1}{3}]$, $[-\dfrac{1}{3},\ +\infty$, άρα και στο $\mathbb{R}$.

- Όταν $\alpha < 3$, δηλαδή $\Delta > 0$
  Το τριώνυμο $f'(x)$ έχει δύο πραγματικές ρίζες και εναλλάσσει πρόσημο, άρα η f εναλλάσσει μονοτονία.

- Όταν $\alpha > 3$, δηλαδή $\Delta < 0$
  Το τριώνυμο $f'(x)$ είναι ομόσημο του 3α , δηλαδή θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Τελικά , οι ζητούμενες τιμές του α είναι $\alpha \geq 3$.

netsuccess.gr

7.

Να αποδείξετε ότι **:**

i) Η συνάρτηση $f(x) = ημx - xσυνx$ είναι γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$

ii) $ημx - xσυνx > 0$, για κάθε $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$

iii) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{ημx}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο ανοικτό διάστημα $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$

Λύση

i)

$f'(x) = συνx - (συνx - xημx) = συνx - συνx + xημx = xημx > 0$ στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$

Και επειδή f συνεχής στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, θα είναι γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$

ii)

Για κάθε $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και επειδή f γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, θα έχουμε $f(0) < f(x) \Rightarrow ημ0 - 0συν0 < ημx - xσυνx$

$0 < ημx - xσυνx$

iii)

Για κάθε $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(x) = \frac{συνx \cdot x - ημx}{x^2} < 0$ (από ii).

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$

netsuccess.gr

8.

Να αποδείξετε ότι **:**

i) Η συνάρτηση $f(x) = 2ημx + εφx - 3x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα

ii) $2ημx + εφx \geq 3x$, για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Λύση

i)

$$f'(x) = 2συνx + \frac{1}{συν^2x} - 3 = \frac{2συν^3x - 3συν^2x + 1}{συν^2x} \quad \textbf{(1)}$$

Αλλά
$$\begin{aligned} 2συν^3x - 3συν^2x + 1 &= 2συν^3x - 2συν^2x - συν^2x + 1 \\ &= 2συν^2x\,(συνx - 1) - (συν^2x - 1) \\ &= 2συν^2x\,(συνx - 1) - (συνx - 1)(συνx + 1) \\ &= (συνx - 1)\,(2συν^2x - συνx - 1) \\ &\overset{*}{=} (συνx - 1)\,2\,(συνx + \tfrac{1}{2})(συνx - 1) \\ &= (συνx - 1)^2\,(2συνx + 1) > 0 \quad \text{στο} \quad \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$*$ $\quad Δ = 1 + 8 = 9$, $\quad συνx = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = 1$ ή $-\frac{1}{2}$

(1) $\Rightarrow$ $f'(x) > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, και επειδή f συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, θα είναι f γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

ii)

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και επειδή f γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ θα έχουμε $f(0) \leq f(x)$ $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 2ημ0 + εφ0 - 3\cdot 0 &\leq 2ημx + εφx - 3x \\ 0 &\leq 2ημx + εφx - 3x \\ 3x &\leq 2ημx + εφx \end{aligned}$$

netsuccess.gr