2.4
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 243 – 245

Α΄ Ομάδας

1.

Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λειώνει . Η ακτίνα της , που ελαττώνεται δίνεται σε cm από τον τύπο $r = 4 - t^2$, όπου t ο χρόνος σε sec . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας E και του όγκου V της μπάλας , όταν t = 1 sec .
(Θυμηθείτε ότι $E = 4\pi r^2$ και $V = \frac{4}{3}\pi r^3$)

Λύση

1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t.

2. $r = r(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την ακτίνα .
   $E = E(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την επιφάνεια .
   $V = V(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει τον όγκο

3. Δίνεται $r(t) = 4 - t^2$
   Θέλουμε να βρούμε τους ρυθμούς μεταβολής $E'(1)$, $V'(1)$

4. $E(t) = 4\pi .[r(t)]^2 = 4\pi\cdot(4 - t^2)^2 \Rightarrow E'(t) = 4\pi \cdot 2(4 - t^2)\cdot(4 - t^2)'$

   $= 8\pi\,(4 - t^2)\cdot(-2t)$

   $= -16\pi\,(4 - t^2)\,t$

   Άρα $E'(1) = -16\pi\,(4 - 1^2)\cdot 1 = -48\pi$ cm^2/sec

   $V(t) = \frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3 = \frac{4}{3}\pi\cdot(4 - t^2)^3 \Rightarrow V'(t) = \frac{4}{3}\pi\, 3\cdot(4 - t^2)^2\cdot(4 - t^2)'$

   $= 4\pi .(4 - t^2)^2\cdot(-2t)$

   $= -8\pi.\,(4 - t^2)^2 t$

   Άρα $V'(1) = -8\pi\,(4 - 1^2)^2\cdot 1 = -8\pi.\,3^2 = -72\pi$ cm^3/sec

2.

Ο όγκος V ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει αυξάνεται με ρυθμό $100\ cm^3/sec$. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η ακτίνα του r τη χρονική στιγμή t_o, που αυτή είναι ίση με 9 cm;

Λύση

1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t.

2. $r = r(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την ακτίνα .
. $V = V(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει τον όγκο

3. Δίνεται $V'(t) = 100\ cm^3/sec$
Θέλουμε να βρούμε τη ρυθμό μεταβολής $r'(t_o)$

4. $V(t) = \frac{4}{3}\pi\,[r(t)]^3 \Rightarrow V'(t) = \frac{4}{3}\pi\, 3\,[r(t)]^2 \cdot r'(t)$

$$100 = 4\pi\,[r(t)]^2 \cdot r'(t)$$

Για $t = t_o$ θα είναι $100 = 4\pi\,[r(t_o)]^2 \cdot r'(t_o)$

$$100 = 4\pi\ 9^2\ r'(t_o)$$

$$25 = 81\pi\ r'(t_o)$$

$$r'(t_o) = \frac{25}{81\pi}$$

3.

Το κόστος παραγωγής $K(x)$ και η τιμή πώλησης $\Pi(x)$, x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος δίνονται από τις συναρτήσεις

$K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000$ και $\Pi(x) = 420x$ αντιστοίχως .

Να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους $P(x) = \Pi(x) - K(x)$ είναι θετικός.

Λύση

$P(x) = \Pi(x) - K(x) \Rightarrow P(x) = 420x - (\frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000)$

$$P(x) = 420x - \frac{1}{3}x^3 + 20x^2 - 600x - 1000)$$

$$P(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 20x^2 - 180x - 1000)$$

$$P'(x) = -x^2 + 40x - 180$$

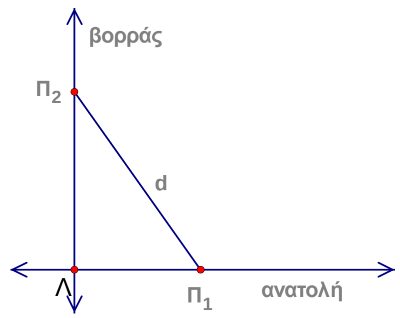
$\Delta = 40^2 - 4\,.\,180 = 1600 - 720 = 880$

Ρίζες του τριωνύμου $x = \frac{-40 \pm \sqrt{880}}{-2} = \frac{-40 \pm 2\sqrt{220}}{-2} = 20 \pm\sqrt{220}$

$P'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 20 - \sqrt{220} < x < 20 + \sqrt{220}$

4.

Δύο πλοία $Π_1$ και $Π_2$ αναχωρούν συγχρόνως από ένα λιμάνι $Λ$. Το πλοίο $Π_1$ κινείται ανατολικά με ταχύτητα 15 km /h και το $Π_2$ βόρεια με ταχύτητα 20 km /h.



i) Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των $Π_1$ και $Π_2$

ii) Να αποδείξετε ότι η απόσταση $d = (Π_1 Π_2)$ των δύο πλοίων αυξάνεται με σταθερό ρυθμό, τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Λύση

1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t.
2. $x = x(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει τη θέση του $Π_1$

   $y = y(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει τη θέση του $Π_2$

   $d = d(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση $(Π_1 Π_2)$

3. Δίνεται $x'(t) = 15$ και $y'(t) = 20$

   Θέλουμε να βρούμε τις i) $x(t)$ και $y(t)$

   ii) $d'(t)$

i)

Από τη Φυσική θα είναι $x(t) = 15t$ και $y(t) = 20t$

ii)

Με το Πυθαγόρειο έχουμε

$$\begin{aligned}[d(t)]^2 &= [x(t)]^2 + [y(t)]^2 \\ &= (15t)^2 + (20t)^2 \\ &= 225t^2 + 400t^2 \\ &= 625t^2\end{aligned}$$

Άρα $d(t) = 25t \Rightarrow d'(t) = 25$ km /h.

5.

Ένα κινητό Μ ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \frac{1}{4}x^2$, $x \geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y , αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Λύση

1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t.

2. $x = x(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την τετμημένη του Μ
   $y = y(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την τεταγμένη του Μ

3. Δίνεται $x'(t) > 0$
   Θέλουμε να βρούμε το σημείο $M_o\big(x(t_o), y(t_o)\big)$, όπου $x'(t_o) = y'(t_o)$

4. $y = \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow y(t) = \frac{1}{4}[x(t)]^2$

   $y'(t) = \frac{1}{4}\,2\,x(t)\,x'(t)$

   Άρα και $y'(t_o) = \frac{1}{2}\,x(t_o)\,x'(t_o)$ **(1)**

   $x'(t_o) = y'(t_o) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x'(t_o) = \frac{1}{2}\,x(t_o)\,x'(t_o)$

   $1 = \frac{1}{2}\,x(t_o)$

   $x(t_o) = 2$

   Αλλά $y(t_o) = \frac{1}{4}[x(t_0)]^2 \Rightarrow y(t_o) = \frac{1}{4}\,2^2 = 1$

   Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M_o\ (2 , 1)$

Β΄ Ομάδας

1.

Αν η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $10\ cm^2/sec$, να βρείτε το ρυθμό με το οποίο αυξάνεται ο όγκος αυτής, όταν $r = 85$ cm .

Λύση

1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t.

2. $r = r(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την ακτίνα
   $E = E(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την επιφάνεια .
   $V = V(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει τον όγκο

3 Δίνεται $E'(t) = 10$ και $r(t_o) = 85$
   Θέλουμε να βρούμε το ρυθμό μεταβολής $V'(t_o)$

4. Είναι $E(t) = 4\pi \cdot [r(t)]^2 \Rightarrow E'(t) = 4\pi \cdot 2\, r(t) \cdot r'(t)$

$$10 = 8\pi\, r(t) \cdot r'(t)$$
$$10 = 8\pi\, r(t_o) \cdot r'(t_o)$$
$$10 = 8\pi \cdot 85 \cdot r'(t_o) \Rightarrow r'(t_o) = \frac{10}{8\pi \cdot 85}$$

Είναι $V(t) = \frac{4}{3}\pi [r(t)]^3 \Rightarrow V'(t) = \frac{4}{3}\pi\, 3[r(t)]^2\, r'(t)$

$$V'(t_o) = 4\pi [r(t_o)]^2\, r'(t_0)$$
$$V'(t_o) = 4\pi \cdot 85^2\ \frac{10}{8\pi \cdot 85}$$
$$V'(t_o) = 4\pi \cdot 85^2\ \frac{10}{8\pi \cdot 85}$$
$$V'(t_o) = 425\ cm^3/sec$$

2.

Έστω Τ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ που ορίζουν τα σημεία O(0 , 0), A(x , 0), B(0 , lnx) με $x > 1$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 4 cm/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Τ, όταν x = 5 cm.

Λύση

1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t.

2. $x = x(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει το x
   $T = T(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ

3 Δίνεται $x'(t) = 4$ και $x(t_o) = 5$
   Θέλουμε να βρούμε το ρυθμό μεταβολής $T'(t_o)$

4. $T(t) = \frac{1}{2}(OA)\,(OB) = \frac{1}{2}\, x\cdot \ln x = \frac{1}{2}\, x(t)\cdot \ln\big(x(t)\big) \Rightarrow$

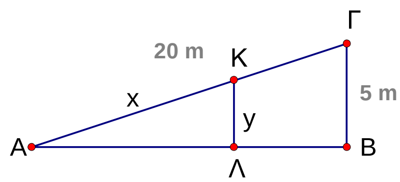
   $T'(t) = \frac{1}{2}\Big[\, x'(t)\cdot \ln\big(x(t)\big) + x(t)\, \frac{1}{x(t)}\, x'(t)\,\Big]$

   $T'(t_0) = \frac{1}{2}\Big[\, x'(t_o).\ln\big(x(t_o)\big) + x'(t_o)\,\Big]$

   $T'(t_0) = \frac{1}{2}\big[4\cdot \ln 5 + 4\big] = \frac{1}{2}\, 4\,(\ln 5 + 1) = 2(\ln 5 + 1)\ cm^2/sec$

3.

Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί στη ράμπα του διπλανού σχήματος και το κουτί κινείται με ταχύτητα 3 m/sec . Να βρείτε πόσο γρήγορα ανυψώνεται το κουτί . δηλαδή το ρυθμό μεταβολής του y .



Λύση

1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t.

2. $x = x(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την απομάκρυνση (ΑΚ) (Κ το κουτί)
   $y = y(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την ανύψωση (ΛΚ)

3 Δίνεται $x'(t) = 3$
   Θέλουμε να βρούμε το ρυθμό μεταβολής $y'(t)$

4. Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΛΚ , ΑΒΓ

   παίρνουμε $\frac{y}{5} = \frac{x}{20} \Rightarrow 4y = x \Rightarrow 4\,y(t) = x(t)$

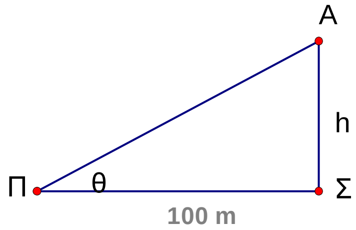
   $4\,y'(t) = x'(t)$

   $4\,y'(t) = 3$

   $y'(t) = \frac{3}{4}$ m/sec

4.

Ένα αερόστατο Α αφήνει το έδαφος σε απόσταση 100 m, από έναν παρατηρητή Π με ταχύτητα 50 m/min. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία θ που σχηματίζει η ΑΠ με το έδαφος τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μπαλόνι βρίσκεται σε ύψος 100m;



Λύση

1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t.

2. $h = h(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την ανύψωση του αερόστατου .
   $\theta = \theta(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την τη μεταβολή της γωνίας θ.

3 Δίνεται $h'(t) = 50$ και $h(t_o) = 100$
  Θέλουμε να βρούμε το ρυθμό μεταβολής $\theta'(t_0)$

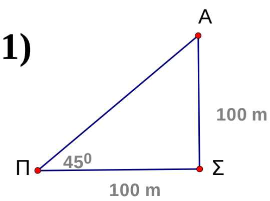
4. Είναι $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{h}{(\Pi\Sigma)} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta(t) = \dfrac{1}{100}h(t)$

$$\left(\varepsilon\varphi\theta(t)\right)' = \frac{1}{100}h'(t)$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t) = \frac{1}{100}\cdot 50$$

$$\theta'(t) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)$$

$$\theta'(t_0) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0) \quad \textbf{(1)}$$



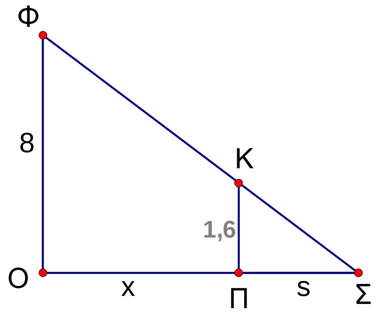
Κατά τη χρονική στιγμή t_o, είναι $(\Pi\Sigma) = (\Sigma A) = 100$

Άρα $\theta(t_o) = 45^o$

(1) $\Rightarrow \theta'(t_o) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{4}$ rad/min

5.

Μια γυναίκα ύψους 1,60 m απομακρύνεται από τη βάση ενός φανοστάτη ύψους 8 m με ταχύτητα 0,8 m/sec . Με ποια ταχύτητα αυξάνεται ο ίσκιος της ;



Λύση

1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t.

2. $x = x(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την απομάκρυνση (ΟΠ)
   $s = s(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει τον ίσκιο της γυναίκας

3 Δίνεται $x'(t) = 0,8$
  Θέλουμε να βρούμε το ρυθμό μεταβολής $s'(t)$

4. Από την ομοιότητα των τριγώνων ΣΠΚ , ΣΟΦ
   παίρνουμε $\dfrac{s}{s+x} = \dfrac{1,6}{8} \Rightarrow \dfrac{s}{s+x} = 0,2$

$$s = 0,2\,(s + x)$$

$$s = 0,2\,s + 0,2x$$

$$s(t) = 0,2\,s(t) + 0,2\,x(t)$$

$$0,8\,s(t) = 0,2\,x(t)$$

$$0,8\,s'(t) = 0,2\,x'(t)$$

$$0,8\,s'(t) = 0,2\cdot 0,8$$

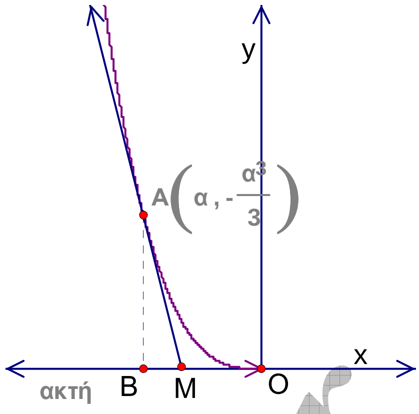
$$s'(t) = 0,2 \text{ m/sec}$$

6.

Ένα περιπολικό Α κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\frac{1}{3}x^3$, $x \le 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατ' ευθείαν εμπρός (σχήμα). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο

$$\alpha'(t) = -\alpha(t),$$

να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ της ακτής, στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη –3.



Λύση

1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t.

2. $\alpha = \alpha(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την τετμημένη του Α
   $\mu = \mu(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την τετμημένη του Μ

3. Δίνεται $\alpha'(t) = -\alpha(t)$ και $\alpha(t_o) = -3$
   Θέλουμε να βρούμε το ρυθμό μεταβολής $\mu'(t_o)$

4. Έστω $f(x) = -\frac{1}{3}x^3$, $x \le 0$

   Η εξίσωση της εφαπτομένης ΑΜ στο σημείο $A\left(\alpha, -\frac{1}{3}\alpha^3\right)$, $\alpha < 0$

   της C_f είναι $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$ αλλά $f'(x) = -x^2$

   άρα $f'(\alpha) = -\alpha^2$

   οπότε **ΑΜ :** $y + \frac{1}{3}\alpha^3 = -\alpha^2(x - \alpha)$

   $y + \frac{1}{3}\alpha^3 = -\alpha^2 x + \alpha^3$

   $y = -\alpha^2 x + \frac{2}{3}\alpha^3$

Για $y = 0$ παίρνουμε $0 = -\alpha^2 x + \frac{2}{3}\alpha^3 \Leftrightarrow 0 = -3\alpha^2 x + 2\alpha^3$

$3\alpha^2 x = 2\alpha^3$

$x = \frac{2}{3}\alpha$, άρα $M\left(\frac{2}{3}\alpha, 0\right)$

Επομένως $\mu = \frac{2}{3}\alpha \Rightarrow \mu(t) = \frac{2}{3}\alpha(t)$

$\mu'(t) = \frac{2}{3}\alpha'(t)$

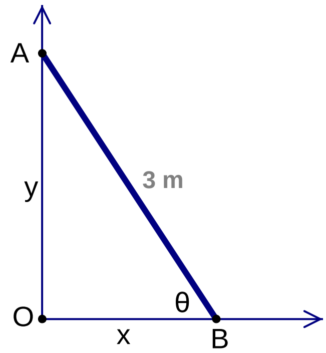
$\mu'(t_o) = \frac{2}{3}\alpha'(t_0) = \frac{2}{3}[-\alpha(t_o)] = -\frac{2}{3}(-3) = 2$

7.

Μια σκάλα μήκους 3 m είναι τοποθετημένη σ΄έναν τοίχο . Το κάτω μέρος της σκάλας γλιστράει στο δάπεδο με ρυθμό 0,1 m/sec . Τη χρονική στιγμή t_0, που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5 m , να βρείτε :

i) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ (Σχήμα)

ii) Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή Α της σκάλας.



Λύση

1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t.

2. $x = x(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει το μήκος του τμήματος ΟΒ
$y = y(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει το μήκος του τμήματος ΟΑ
$\theta = \theta(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει τη γωνία θ

3. Δίνεται $x'(t) = 0,1$ και $y(t_o) = 2,5$
Θέλουμε να βρούμε **i)** το ρυθμό μεταβολής $\theta'(t_o)$
ii) το ρυθμό μεταβολής $y'(t_o)$

4. Είναι $x = 3$ συνθ $\Rightarrow$ $x(t) = 3\text{συν}\theta(t)$

$$x'(t) = \left(3\text{συν}\theta(t)\right)'$$
$$x'(t) = 3(-\text{ημ}\theta(t))\cdot\theta'(t)$$
$$0,1 = -3\text{ημ}\theta(t).\ \theta'(t)$$
$$0,1 = -3\text{ημ}\theta(t_o)\cdot\theta'(t_o) \quad \textbf{(1)}$$

Αλλά , κατά τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\text{ημ}\theta(t_o) = \dfrac{y(t_0)}{3} = \dfrac{2,5}{3}$

$$(1) \Rightarrow 0,1 = -3\,\frac{2,5}{3}\,\theta'(t_o)$$

$$0,1 = -\,2,5\,\theta'(t_o) \Rightarrow \theta'(t_o) = -\frac{1}{25}\text{rad/sec}$$

Είναι $[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 3^2 \Rightarrow \left([x(t)]^2 + [y(t)]^2\right)' = 0$

$$2\,x(t)\,x'(t) + 2\,y(t)\,y'(t) = 0$$
$$x(t)\,x'(t) + y(t)\,y'(t) = 0$$
$$x(t_o)\,x'(t_o) + y(t_o)\,y'(t_o) = 0 \quad \textbf{(2)}$$

Αλλά $[x(t_o)]^2 + [2,5]^2 = 9$

$$[x(t_o)]^2 + 6,25 = 9$$
$$[x(t_o)]^2 = 2,75 \Rightarrow x(t_o) = \sqrt{2,75}$$

$$(2) \Rightarrow \sqrt{2,75}\cdot 0,1 + 2,5\;y'(t_o) = 0$$

$$2,5\;y'(t_o) = -\,0,1\sqrt{2,75} \Rightarrow y'(t_o) = \frac{\sqrt{2,75}}{25}\ \text{m/sec}$$

8.

Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Καθώς περνάει από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A .

Λύση

1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t.

2. $x = x(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την τετμημένη x
   $y = y(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την τεταγμένη y
   t_o η χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A

3. Δίνεται $x(t_o) = \frac{1}{2}$, $y(t_o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y'(t_o) = -3$
   Θέλουμε να βρούμε το ρυθμό μεταβολής $x'(t_o)$

4. $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 1^2$

$$\left([x(t)]^2 + [y(t)]^2\right)' = 0$$

$$2\,x(t)\,x'(t) + 2\,y(t)\,y'(t) = 0$$

$$x(t)\,x'(t) + y(t)\,y'(t) = 0$$

$$x(t_o)\,x'(t_o) + y(t_o)\,y'(t_o) = 0$$

$$\frac{1}{2}\,x'(t_o) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-3) = 0$$

$$x'(t_o) = 3\sqrt{3} \text{ μονάδες/sec}$$