2.3
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 238 – 241

Α΄ Ομάδας

1.
Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

i) $f(x)= x^7-x^4+6x-1$

ii) $f(x)=2x^3+\ln x-\sqrt{3}$

iii) $f(x)= \dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-x$

iv) $f(x)=\text{συν}x-\sqrt{3}\,\text{ημ}x+\ln 3$

Λύση

i) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=7x^6-4x^3+6$

ii) Για κάθε $x\in(0,\ +\infty)$ είναι $f'(x)=6x^2+\dfrac{1}{x}$

iii) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)= x^3- x^2+x-1$

iv) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=-\text{ημ}x-\sqrt{3}\,\text{συν}x$

2.

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

i) $f(x) = (x^2 - 1)(x - 3)$

ii) $f(x) = e^x ημx$

iii) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

iv) $f(x) = \dfrac{ημx + συνx}{1 + συνx}$

v) $f(x) = x^2 ημx\, συνx$

Λύση

i)

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = (x^2-1)'(x-3) + (x^2-1)(x-3)' = 2x(x-3) + (x^2-1)\cdot 1 = 2x^2 - 6x + x^2 - 1 = 3x^2 - 6x - 1$$

ii)

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = (e^x)'ημx + e^x(ημx)' = e^x ημx + e^x συνx$

iii)

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = \frac{(1-x^2)'(1+x^2) - (1-x^2)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x(1+x^2+1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

iv)

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $1 + συνx \neq 0$ είναι

$$f'(x) = \frac{(ημx+συνx)'(1+συνx) - (ημx+συνx)(1+συνx)'}{(1+συνx)^2}$$

$$= \frac{(συνx - ημx)(1+συνx) - (ημx+συνx)(-ημx)}{(1+συνx)^2}$$

$$= \frac{συνx + συν^2x - ημx - ημx\,συνx + ημ^2x + συνx\,ημx}{(1+συνx)^2} = \frac{συνx - ημx + 1}{(1+συνx)^2}$$

v) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = (x^2)'ημx\,συνx + x^2(ημx)'συνx + x^2ημx(συνx)' = 2x\,ημx\,συνx + x^2συνx\,συνx + x^2ημx(-ημx) = 2x\,ημx\,συνx + x^2συν^2x - x^2ημ^2x$$

3.

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

i) $f(x) = \dfrac{e^x}{\ln x}$ **ii)** $f(x) = \varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x$

iii) $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{e^x}$ **iv)** $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{x+1}{x-1}$

Λύση

i)

Για κάθε $x \in (0\,,1) \cup (1,\ +\infty)$ είναι

$$f'(x) = \frac{(e^x)'\ln x - e^x(\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{e^x \ln x - e^x \dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{e^x\left(\ln x - \dfrac{1}{x}\right)}{(\ln x)^2}$$

ii)

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $\eta\mu x \neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ είναι

$$f'(x) = (\varepsilon\varphi x)' + (\sigma\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

iii)

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = \frac{(\eta\mu x)'\, e^x - \eta\mu x (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{\sigma\upsilon\nu x\, e^x - \eta\mu x\, e^x}{e^{2x}} = \frac{\sigma\upsilon\nu x\ - \eta\mu x}{e^x}$$

iv)

Για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ είναι

$$f(x) = \frac{(x-1)^2 - (x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1}{x^2-1} = \frac{-4x}{x^2-1}$$

Άρα

$$f'(x) = -4\left(\frac{x}{x^2-1}\right)' = -4\,\frac{1\cdot(x^2-1) - x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -4\,\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = 4\,\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

4.i)

Να βρείτε , όπου ορίζεται , την παράγωγο της συνάρτηση $f(x) =$

$$\begin{cases} 2x^2+3x \quad , \quad x < 0 \\ 12\sqrt{x}+6x \quad , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Λύση

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) = 4x + 3$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = 12\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 6 = \dfrac{6}{\sqrt{x}} + 6$

$f(0) = 12\sqrt{0} + 6 \cdot 0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2+3x-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} (2x+3) = 3$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{12\sqrt{x}+6x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{12}{\sqrt{x}}+6\right) = +\infty$$

Άρα η f δεν παραγωγίζεται στο $x_o = 0$

4.ii)

Να βρείτε , όπου ορίζεται , την παράγωγο της συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2+\eta\mu x \quad , \quad x \leq 0 \\ x \quad , \quad x > 0 \end{cases}$$

Λύση

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) = 2x + \sigma\upsilon\nu x$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = 1$

$f(0) = 0^2 + \eta\mu 0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+\eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \left(x+\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

Άρα $f'(0) = 1$

5.i)

Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{4}{x}$, στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα των x.

Λύση

$D_f = \mathbb{R}^*$

$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x^2} = 0 \quad x^2 - 4 = 0 \quad x^2 = 4 \quad x = 2$ ή $x = -2$

$f(2) = 2 + \frac{4}{2} = 4$ και $f(-2) = -2 - \frac{4}{2} = -4$

Τα ζητούμενα , λοιπόν , σημεία είναι $A(2,\ 4)$ και $B(-2,\ -4)$

5.ii)

Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{e^x}$, στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα των x.

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f(1) = \frac{1}{e}$

Το ζητούμενο σημείο είναι το $A\left(1,\ \frac{1}{e}\right)$

5.ii)

Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα των x.

Λύση

$D_f = \mathbb{R}^*$

$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+1) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

$f(1) = \frac{1^2+1}{1} = 2$ και $f(-1) = \frac{(-1)^2+1}{-1} = -2$

Τα ζητούμενα , λοιπόν , σημεία είναι $A(1,\ 2)$ και $B(-1,\ -2)$

6.

Αν $f(x) = \dfrac{2(x+1)}{x-1}$ και $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$, να βρείτε τις συναρτήσεις f', g'. Ισχύει $f' = g'$;

Λύση

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$, $D_g = [0\,,1) \cup (1\,,+\infty)$

Για κάθε $x \in D_f$ είναι $f'(x) = 2\dfrac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = 2\dfrac{-2}{(x-1)^2} = \dfrac{-4}{(x-1)^2}$

Για κάθε $x \in D_g$ είναι $g(x) = \dfrac{(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$$= \frac{x+2\sqrt{x}+1+x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x})^2-1} = \frac{2x+2}{x-1} = 2\,\frac{x+1}{x-1}$$

οπότε , για κάθε $x \in D_g$ είναι $g'(x) = \dfrac{-4}{(x-1)^2}$.

Δεν ισχύει $f' = g'$ αφού οι συναρτήσεις f', g' έχουν διαφορετικό πεδίο ορισμού.

7.

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2}$ στο κοινό σημείο τους $A(1, 1)$, είναι κάθετες.

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = \mathbb{R}^*$

$f'(x) = 2x$ και $g'(x) = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{2x^2}$

$f'(1)\ g'(1) = 2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1$. Άρα οι εφαπτόμενες των C_f , C_g στο κοινό σημείο τους $A(1, 1)$, είναι κάθετες .

8.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x+\alpha}{x+\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η κλίση της C_f στο σημείο της $A(0,\,1)$ είναι ίση με $\dfrac{1}{2}$.

Λύση

$D_f=\mathbb{R}-\{-\alpha\}$

$f(x)=\alpha\dfrac{x+1}{x+\alpha}$

$f'(x)=\alpha\dfrac{1\cdot(x+\alpha)-(x+1)\cdot 1}{(x+\alpha)^2}=\alpha\dfrac{x+\alpha-x-1)}{(x+\alpha)^2}=\alpha\dfrac{\alpha-1)}{(x+\alpha)^2}$

$f'(0)=\alpha\dfrac{\alpha-1)}{(0+\alpha)^2}=\dfrac{\alpha-1}{\alpha}$

$f'(0)=\dfrac{1}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\dfrac{\alpha-1}{\alpha}=\dfrac{1}{2}\quad\Leftrightarrow\quad 2\alpha-2=\alpha\quad\Leftrightarrow\quad\alpha=2$

9.

Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x + 5$ στα οποία η εφαπτομένη είναι :

i) παράλληλη προς την ευθεία $y = 9x + 1$

ii) κάθετη προς την ευθεία $y = -x$

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

i)

Εφαπτομένη $\parallel$ στην ευθεία $y = 9x + 1 \Leftrightarrow f'(x) = 9$

$$3x^2 - 3 = 9$$
$$3x^2 = 12$$
$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 2$$

$f(-2) = (-2)^3 - 3\cdot(-2) + 5 = -8 + 6 + 5 = 3$

$f(2) = 2^3 - 3\cdot 2 + 5 = 8 - 6 + 5 = 7$

Τα ζητούμενα σημεία είναι $A(-2, 3)$, $B(2, 7)$

ii)

Εφαπτομένη $\perp$ στην ευθεία $y = -x \Leftrightarrow f'(x)\,(-1) = -1$

$$3x^2 - 3 = 1$$
$$3x^2 = 4$$
$$x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{-2}{\sqrt{3}} \text{ ή } x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 3\cdot\frac{-2}{\sqrt{3}} + 5$$
$$= \frac{-8}{3\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}} + 5$$
$$= \frac{-8\sqrt{3}}{9} + \frac{6\sqrt{3}}{3} + 5$$
$$= \frac{-8\sqrt{3} + 18\sqrt{3} + 45}{9} = \frac{10\sqrt{3} + 45}{9}$$

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} + 5$$
$$= \frac{8}{3\sqrt{3}} - \frac{6}{\sqrt{3}} + 5$$
$$= \frac{8\sqrt{3}}{9} - \frac{6\sqrt{3}}{3} + 5$$
$$= \frac{8\sqrt{3} - 18\sqrt{3} + 45}{9} = \frac{-10\sqrt{3} + 45}{9}$$

Τα ζητούμενα σημεία είναι $\Gamma\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{10\sqrt{3} + 45}{9}\right)$, $\Delta\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-10\sqrt{3} + 45}{9}\right)$

10.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2$, η οποία άγεται από το σημείο $A(0, -1)$.

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$

Η εφαπτομένη ε της C_f στο τυχαίο σημείο της $\Lambda(x_o, f(x_o))$ έχει εξίσωση

$$y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o) \Leftrightarrow y - x_o^2 = 2x_o(x - x_o)$$

$$y = 2x_o x - x_o^2 \quad \textbf{(1)}$$

Η ε άγεται από το $A \Leftrightarrow A \in \varepsilon$

$$-1 = 2x_o \cdot 0 - x_o^2$$

$$x_o^2 = 1 \Leftrightarrow x_o = -1 \text{ ή } x_o = 1$$

Για $x_o = -1$, η (1) γίνεται $y = -2x - 1$

Για $x_o = 1$, η (1) γίνεται $y = 2x - 1$

11.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ για τις οποίες η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ και εφάπτεται της ευθείας $y = x$ στην αρχή των αξόνων.

Λύση

Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1, 2) \Leftrightarrow f(1) = 2$

$$\alpha 1^2 + \beta \cdot 1 + \gamma = 2$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 \quad \textbf{(1)}$$

Η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων $\Leftrightarrow f(0) = 0$

$$\gamma = 0 \quad \textbf{(2)}$$

Η εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ και επειδή $f'(x) = 2\alpha x + \beta$ δηλαδή $f'(0) = 2\alpha \cdot 0 + \beta = \beta$,

η εφαπτομένη γίνεται $y - 0 = \beta x \Leftrightarrow y = \beta x$, η οποία πρέπει να συμπίπτει με την ευθεία $y = x$, δηλαδή πρέπει $\beta = 1$ **(3)**

Λόγω των (2), (3) η (1) $\Rightarrow \alpha + 1 + 0 = 2 \Rightarrow \alpha = 1$

12.

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $f(x) = (3x^4 + 4x^3)^{-2}$ **ii)** $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}$

iii) $f(x) = \eta\mu\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$ **iv)** $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x} - x\right)$

v) $f(x) = e^{-x^2}$

Λύση

i)

Πρέπει $3x^4 + 4x^3 \neq 0 \Leftrightarrow x^3(3x+4) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq -\dfrac{4}{3}$

$$f'(x) = -2(3x^4+4x^3)^{-2-1}\ (3x^4+4x^3)' = -2(3x^4+4x^3)^{-3}\ (12x^3+12x^2)$$
$$= -2\,\frac{1}{(3x^4+4x^3)^3}\ 12\ x^2\ (x+1)$$
$$= -24\,\frac{1}{x^9(3x+4)^3}\ x^2\ (x+1)$$
$$= -24\,\frac{x+1}{x^7(3x+4)^3}$$

ii)

Πρέπει $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$$f'(x) = \frac{2}{3}\ (x-1)^{\frac{2}{3}-1}\ (x-1)' = \frac{2}{3}\ (x-1)^{-\frac{1}{3}}$$

iii)

$D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\left(-\frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}\right)$$
$$= \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

iv)

Πρέπει $x \neq 0$ και $\dfrac{1}{x} - x > 0$

$$\frac{1-x^2}{x} > 0$$

$x(1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $0 < x < 1$

x	−1	0	1	
Γινόμενο	+	–	+	–

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} - x}\left(\frac{1}{x} - x\right)' = \frac{1}{\frac{1-x^2}{x}}\left(-\frac{1}{x^2} - 1\right) = \frac{x}{1-x^2}\ \frac{-1-x^2}{x^2} = \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}$$

v)

$D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^{-x^2}(-x^2)' = e^{-x^2}\ (-2x) = -2x\,e^{-x^2}$$

13.

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_o όταν **:**

i) $f(x) = x^2\sqrt{1+x^3}$, $x_o = 2$ **ii)** $f(x) = (2x)^{\frac{1}{3}} + (2x)^{\frac{2}{3}}$, $x_o = 4$

iii) $f(x) = x^3\,\eta\mu^3(\pi x)$, $x_o = \frac{1}{6}$ **iv)** $f(x) = \dfrac{x^2+2}{2-x}$, $x_o = 3$

Λύση

i)

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = (x^2)'\sqrt{1+x^3} + x^2\,(\sqrt{1+x^3})' = 2x\sqrt{1+x^3} + x^2\,\frac{1}{2\sqrt{1+x^3}}\,3x^2$$

Άρα $f'(2) = 4{\cdot}3 + 4\,\dfrac{1}{2\cdot 3}\,12 = 12 + 8 = 20$

ii)

Για κάθε $x > 0$ είναι

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2x)^{\frac{1}{3}-1}(2x)' + \frac{2}{3}(2x)^{\frac{2}{3}-1}(2x)'$$

$$= \frac{1}{3}(2x)^{-\frac{2}{3}}{\cdot}2 + \frac{2}{3}(2x)^{-\frac{1}{3}}{\cdot}2$$

Άρα
$$f'(4) = \frac{1}{3}(2{\cdot}4)^{-\frac{2}{3}}{\cdot}2 + \frac{2}{3}(2{\cdot}4)^{-\frac{1}{3}}{\cdot}2 = \frac{1}{3}\,8^{-\frac{2}{3}}{\cdot}2 + \frac{2}{3}\,8^{-\frac{1}{3}}{\cdot}2$$
$$= \frac{1}{3}\,2^{-2}{\cdot}2 + \frac{2}{3}\,2^{-1}{\cdot}2$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$$

iii)

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = (x^3)'\,\eta\mu^3(\pi x) + x^3\,(\eta\mu^3(\pi x))' = 3x^2\,\eta\mu^3(\pi x) + x^3\,3\,\eta\mu^2(\pi x)\,(\eta\mu(\pi x))'$$
$$= 3x^2\,\eta\mu^3(\pi x) + x^3\,3\,\eta\mu^2(\pi x)\,\sigma\upsilon\nu(\pi x)\,(\pi x)'$$
$$= 3x^2\,\eta\mu^3(\pi x) + x^3\,3\,\eta\mu^2(\pi x)\,\sigma\upsilon\nu(\pi x).\pi$$

Άρα
$$f'\left(\tfrac{1}{6}\right) = 3\left(\frac{1}{6}\right)^2\eta\mu^3\left(\pi\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^3 3\,\eta\mu^2\left(\pi\frac{1}{6}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{1}{6}\right).\pi$$
$$= 3\cdot\frac{1}{36}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{216}\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\pi$$
$$= \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{72}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\pi = \frac{1}{96} + \frac{\pi\sqrt{3}}{576}$$

iv)

Για κάθε $x\neq 2$ είναι
$$f'(x) = \frac{2x(2-x)-(x^2+2)(-1)}{(2-x)^2}$$
$$= \frac{4x-2x^2+x^2+2}{(2-x)^2}$$

Άρα $f'(3) = \dfrac{4\cdot 3-2\cdot 3^2+3^2+2}{(2-3)^2} = \dfrac{12-18+9+2}{(-1)^2} = 5$

14.
Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων **:**

i) $f(x) = x^{\ln x}$ **ii)** $f(x) = 2^{5x-3}$

iii) $f(x) = (\ln x)^x$, $x > 1$ **iv)** $f(x) = ημx \cdot e^{συνx}$

Λύση

i)
Για κάθε $x > 0$ είναι

$$f(x) = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}$$

$$f'(x) = e^{\ln^2 x}\left(\ln^2 x\right)' = x^{\ln x}\, 2\ln x\, (\ln x)' = 2\,\frac{1}{x}\, x^{\ln x} \ln x$$

ii)
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) = e^{(5x-3)\ln 2}$$

$$f'(x) = e^{(5x-3)\ln 2}\,[(5x-3)\ln 2]' = e^{(5x-3)\ln 2}\, 5\ln 2 = 5\ln 2 \cdot 2^{5x-3}$$

iii)

$$f(x) = e^{x\ln(\ln x)}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = e^{x\ln(\ln x)}\,[x\ln(\ln x)]' &= (\ln x)^x \left[1 \cdot \ln(\ln x) + x\,[\ln(\ln x)]'\right] \\ &= (\ln x)^x \left[\ln(\ln x) + x\frac{1}{\ln x}(\ln x)'\right] \\ &= (\ln x)^x \left[\ln(\ln x) + x\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right] \\ &= (\ln x)^x \left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right] \end{aligned}$$

iv)
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned} f'(x) = (ημx)'\, e^{συνx} + ημx.(e^{συνx})' &= συνx \cdot e^{συνx} + ημx \cdot e^{συνx}\,(συνx)' \\ &= συνx \cdot e^{συνx} + ημx \cdot e^{συνx}\,(-ημx) \\ &= e^{συνx}\,(συνx - ημ^2 x) \end{aligned}$$

15.
Αν $f(x) = ημ^2 x$, να αποδείξετε ότι $f''(x) + 4f(x) = 2$

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 2\,ημx\,(ημx)' = 2ημx\,συνx = ημ2x$

$$f''(x) = συν2x\,(2x)' = 2συν2x$$

$$\begin{aligned} f''(x) + 4f(x) &= 2συν2x + 4ημ^2 x \\ &= 2(1 - 2ημ^2 x) + 4ημ^2 x \\ &= 2 - 4ημ^2 x + 4ημ^2 x = 2 \end{aligned}$$

Β΄ Ομάδας

1.

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = x^2 - x + 1$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο , στο οποίο οι εφαπτόμενές τους είναι κάθετες .

Λύση

$D_f = \mathbb{R}^*$ και $D_g = \mathbb{R}$.

Εργαζόμαστε στο $\mathbb{R}^*$

Κοινά σημεία των C_f, C_g **:** $g(x) = f(x) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = \frac{1}{x}$

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

$$x^2(x - 1) + (x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$g(1) = f(1) = \frac{1}{1} = 1$

Άρα το σημείο $A(1, 1)$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο των C_f, C_g

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$

$g'(x) = 2x - 1 \Rightarrow g'(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

Άρα $f'(1) \cdot g'(1) = -1$

Επομένως , οι εφαπτόμενές των C_f, C_g στο κοινό σημείο τους $A(1, 1)$ είναι κάθετες

2.

Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3x - 2$ έχει , με τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^3$ δύο κοινά σημεία και εφάπτεται αυτής σε ένα από τα σημεία αυτά .

Λύση

Η ευθεία $y = 3x - 2$ εκφράζεται με τη συνάρτηση $g(x) = 3x - 2$, $x \in \mathbb{R}$

$D_f = \mathbb{R}$

Κοινά σημεία των C_f , C_g **:**

$g(x) = f(x) \Leftrightarrow 3x - 2 = x^3$

$x^3 - 3x + 2 = 0$

$x^3 - x - 2x + 2 = 0$

$x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0$

$x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1) = 0$

$(x - 1)[x(x + 1) - 2] = 0$

$(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad ή \quad x = -2 \quad ή \quad x = 1$

$g(1) = f(1) = 1^3 = 1$

$g(-2) = f(-2) = (-2)^3 = -8$

Άρα τα κοινά σημεία των C_f , C_g είναι $A(1,1)$ διπλό σημείο και $B(-2, -8)$

$f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$

Εφαπτομένη της C_f στο $A(1,1)$ **:** $y - 1 = 3(x - 1)$

$y - 1 = 3x - 3$

$y = 3x - 2$

που συμπίπτει με τη δοσμένη ευθεία

3.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 2$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τα $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$, για τα οποία οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_o = 1$.

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = \mathbb{R}^*$.

Εργαζόμαστε στο $\mathbb{R}^*$

$f'(x) = 2\alpha x + \beta$, $\quad g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Κοινή εφαπτομένη στη θέση $x_o = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(1) = g(1)$ και $f'(1) = g'(1)$

$\alpha + \beta + 2 = 1$ και $2\alpha + \beta = -1$

$\alpha + \beta = -1$ και $\beta = -1 - 2\alpha$

$\alpha - 1 - 2\alpha = -1$ και $\beta = -1 - 2\alpha$

$\alpha = 0$ και $\beta = -1$

4.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=-x^2-x$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, 1)$, εφάπτεται και στην C_g.

Λύση

$D_f=\mathbb{R}$ και $D_g=\mathbb{R}$.

Εργαζόμαστε στο $\mathbb{R}$

$f'(x)=e^x$, $g'(x)=-2x-1$

$f'(0)=e^0=1$

Εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, 1)$ $\varepsilon:$ $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$y-e^0=1(x-0)$

$y-1=x \Leftrightarrow y=x+1$

Θα βρούμε την εφαπτομένη της C_g, που άγεται από το σημείο $A(0, 1)$, το οποίο δεν της ανήκει.

Εφαπτομένη της C_g σε κάποιο σημείο της $\Lambda(x_o, g(x_o))$

$\eta:$ $y-g(x_o)=g'(x_o)(x-x_o) \Leftrightarrow y-(-x_o^2-x_o)=(-2x_o-1)(x-x_o)$ **(1)**

Η (η) διέρχεται από το $A(0, 1)$ $\Leftrightarrow$ $1-(-x_o^2-x_o)=(-2x_o-1)(0-x_o)$

$1+x_o^2+x_o=2x_o^2+x_o$

$x_o^2=1 \Leftrightarrow x_o=1$ ή $x_o=-1$

Για $x_o=1$ η (η) γίνεται $y-(-1^2-1)=(-2\cdot 1-1)(x-1)$

$y+2=-3(x-1)$

$y+2=-3x+3$

$y=-3x+1$

Για $x_o=-1$ η (η) γίνεται $y-(-1+1)=(2-1)(x+1)$

$y=x+1$, που συμπίπτει με την ε.

5.

Να βρείτε πολυώνυμο τρίτου βαθμού τέτοιο , ώστε $f(0) = 4$, $f'(-1) = 2$, $f''(2) = 4$ και $f^{(3)}(1) = 6$.

Λύση

Έστω $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha \neq 0$ το ζητούμενο πολυώνυμο .

Είναι $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$, $f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$, $f^{(3)}(x) = 6\alpha$

$$\begin{cases} f(0) = 4 \\ f'(-1) = 2 \\ f''(2) = 4 \\ f^{(3)}(1) = 6. \end{cases} \quad \begin{cases} \delta = 4 \\ 3\alpha - 2\beta + \gamma = 2 \\ 12\alpha + 2\beta = 4 \\ 6\alpha = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} \delta = 4 \\ 3\alpha - 2\beta + \gamma = 2 \\ 6\alpha + \beta = 2 \\ \alpha = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \delta = 4 \\ 3\cdot 1 - 2\beta + \gamma = 2 \\ 6\cdot 1 + \beta = 2 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta = 4 \\ -2\beta + \gamma = -1 \\ \beta = -4 \\ \alpha = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \delta = 4 \\ -2(-4) + \gamma = -1 \\ \beta = -4 \\ \alpha = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \delta = 4 \\ \gamma = -9 \\ \beta = -4 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Άρα $f(x) = x^3 - 4x^2 - 9x + 4$

6.

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο f δεύτερου βαθμού , του οποίου η γραφική παράσταση να εφάπτεται των ευθειών $y = x + 1$ και $y = 3x - 1$ στα σημεία $A(0, 1)$ και $B(1, 2)$ αντιστοίχως .

Λύση

Έστω $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$ το πολυώνυμο.

$A \in C_f \Leftrightarrow 1 = \gamma$ **(1)**

$B \in C_f \Leftrightarrow 2 = \alpha + \beta + \gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta = 2 - \gamma$ **(2)**

Είναι $f'(x) = 2\alpha x + \beta$, οπότε $f'(0) = \beta$ **(3)** και $f'(1) = 2\alpha + \beta$ **(4)**

Η ευθεία $y = x + 1$ εφάπτεται της C_f στο A $\Rightarrow f'(0) = 1 \overset{(3)}{\Rightarrow} \beta = 1$ **(5)**

Η ευθεία $y = 3x - 1$ εφάπτεται της C_f στο B $\Rightarrow f'(1) = 3$

$\overset{(4)}{\Rightarrow} 2\alpha + \beta = 3$

$\overset{(5)}{\Rightarrow} 2\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 1$ **(6)**

Λόγω των (6), (5) , (1) η (2) $\Rightarrow 1 + 1 = 2 - 1 \Rightarrow 0 = -1$ που είναι άτοπο

7.

Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=\alpha$, να αποδείξετε ότι

i) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{xf(x)-\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=f(\alpha)+\alpha f'(\alpha)$

ii) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{e^x f(x)-e^\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=e^\alpha(f(\alpha)+f'(\alpha))$

Λύση

i)

Για $x\neq\alpha$ είναι
$$\frac{xf(x)-\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=\frac{xf(x)-\alpha f(\alpha)-xf(\alpha)+xf(\alpha)}{x-\alpha}$$
$$=\frac{x[f(x)-f(\alpha)]+f(\alpha)(x-\alpha)}{x-\alpha}$$
$$=x\,\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+f(\alpha)\quad\Rightarrow$$
$$\lim_{x\to\alpha}\frac{xf(x)-\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\left[x\,\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+f(\alpha)\right]$$
$$=\lim_{x\to\alpha}x\,.\,\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+\lim_{x\to\alpha}f(\alpha)$$
$$=\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)$$

ii)

Για $x\neq\alpha$ είναι
$$\frac{e^x f(x)-e^\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=\frac{e^x f(x)-e^\alpha f(\alpha)+e^x f(\alpha)-e^x f(\alpha)}{x-\alpha}$$
$$=\frac{e^x[f(x)-f(\alpha)]+f(\alpha)(e^x-e^\alpha)}{x-\alpha}$$
$$=e^x\,\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+f(\alpha)\,\frac{e^x-e^\alpha}{x-\alpha}\qquad\textbf{(1)}$$

Επειδή η συνάρτηση $h(x)=e^x$ είναι παραγωγίσιμη στο α, θα έχουμε

$$h'(\alpha)=\lim_{x\to\alpha}\frac{e^x-e^\alpha}{x-\alpha}\qquad\textbf{(2)}$$

Αλλά $h'(x)=e^x$, οπότε $h'(\alpha)=e^\alpha$ και η (2) $\Rightarrow$ $e^\alpha=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{e^x-e^\alpha}{x-\alpha}$

$$(1)\ \Rightarrow\ \lim_{x\to\alpha}\frac{e^x f(x)-e^\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\left[e^x\,\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+f(\alpha)\,\frac{e^x-e^\alpha}{x-\alpha}\right]$$
$$=\lim_{x\to\alpha}\left[e^x\,\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]+\lim_{x\to\alpha}\left[f(\alpha)\,\frac{e^x-e^\alpha}{x-\alpha}\right]$$
$$=\lim_{x\to\alpha}e^x\,.\,\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+f(\alpha)\lim_{x\to\alpha}\frac{e^x-e^\alpha}{x-\alpha}$$
$$=e^\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)\,e^\alpha$$
$$=e^\alpha(f(\alpha)+f'(\alpha))$$

8.

Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = ημ2x - 2\,ημ^2 x \ , \quad x \in [0, 2π] \ ,$$

στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα των x.

Λύση

Στα ζητούμενα σημεία x θα είναι $f'(x) = 0 \iff$

$$συν2x\,(2x)' - 4ημx\,(ημx)' = 0$$
$$συν2x \cdot 2 - 4ημx\,συνx = 0$$
$$2συν2x - 2ημ2x = 0$$
$$συν2x = ημ2x$$
$$εφ2x = 1$$
$$2x = kπ + \frac{π}{4} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά $0 \le x \le 2π \quad \Rightarrow \quad 0 \le 2x \le 4π$

$$(1) \iff 2x = \frac{π}{4}\ , \quad π + \frac{π}{4}\ , \quad 2π + \frac{π}{4}\ , \quad 3π + \frac{π}{4}$$
$$2x = \frac{π}{4}\ , \quad \frac{5π}{4}\ , \quad \frac{9π}{4}\ , \quad \frac{13π}{4}$$
$$x = \frac{π}{8}\ , \quad \frac{5π}{8}\ , \quad \frac{9π}{8}\ , \quad \frac{13π}{8}$$

9.

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

i) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ **ii)** $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$

και στη συνέχεια την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $O(0, 0)$, σε καθεμιά περίπτωση χωριστά.

Λύση

i)

$D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt[3]{|x|^2} = |x|^{\frac{2}{3}} = \begin{cases} (-x)^{\frac{2}{3}}, & x<0 \\ x^{\frac{2}{3}}, & x\geq 0 \end{cases}$$

- Για $x < 0$ είναι $f'(x) = \frac{2}{3}(-x)^{\frac{2}{3}-1}(-x)'$
$= \frac{2}{3}(-x)^{-\frac{1}{3}}(-1)$
$= -\frac{2}{3}(-x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{-x}}$
- Για $x > 0$, $f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

Το δεύτερο ερώτημα είναι εκτός ύλης.

ii)

$D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt[3]{|x|^4} = |x|^{\frac{4}{3}} = \begin{cases} (-x)^{\frac{4}{3}}, & x<0 \\ x^{\frac{4}{3}}, & x\geq 0 \end{cases}$$

- Για $x < 0$ είναι $f'(x) = \frac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}-1}(-x)'$
$= \frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}(-1)$
$= -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}} = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}$
- Για $x > 0$, $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}-0}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{1+\frac{1}{3}}}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{1}{3}}(-x)}{x} = -\lim_{x\to 0^-}\sqrt[3]{-x} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{4}{3}}-0}{x} = \lim_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{3}} = \lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x} = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις (1), (2) $\Rightarrow$ $f'(0) = 0$

Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow$
$y - 0 = 0\cdot x \Leftrightarrow y = 0$

10.

Έστω f μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(1) = 1$ και g η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα $g(x) = f(x^2 + x + 1) - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ εφάπτεται της C_g στο $B(0, g(0))$.

Λύση

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι **ε :**

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$
$$y - f(1) = 1 \cdot (x - 1)$$
$$y = x - 1 + f(1) \quad \textbf{(1)}$$

Είναι $g(0) = f(0^2 + 0 + 1) - 1 = f(1) - 1$

$$g'(x) = f'(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1)' = f'(x^2 + x + 1)(2x + 1)$$
$$g'(0) = f'(0^2 + 0 + 1)(2 \cdot 0 + 1) = f'(1) \cdot 1 = 1$$

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(0, g(0))$ είναι **η :** $y - g(0) = g'(0)(x - 0)$

$$y - [f(1) - 1] = 1 \cdot x$$
$$y - f(1) + 1 = x$$
$$y = x + f(1) - 1 \quad \textbf{(2)}$$

Από τις (1), (2), οι ευθείες ε, η συμπίπτουν, άρα η ε εφάπτεται της C_g στο $B(0, g(0))$.

11.

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, 1)$, για την οποία ισχύει

$$f(\eta\mu x) = e^x \sigma\upsilon\nu x\ ,\ \text{για κάθε}\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

i) Να βρείτε την $f'(0)$

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

Λύση

i)

Η υπόθεση για $x = 0$ δίνει $f(\eta\mu 0) = e^0 \sigma\upsilon\nu 0 \Rightarrow f(0) = 1\cdot 1 = 1$

Με παραγώγιση έχουμε $f'(\eta\mu x)(\eta\mu x)' = e^x\sigma\upsilon\nu x - e^x\eta\mu x$

$f'(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x = e^x(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$

Άρα $f'(\eta\mu 0) = e^0(\sigma\upsilon\nu 0 - \eta\mu 0) =$

$f'(0) = 1\cdot(1 - 0)$

$f'(0) = 1$

ii)

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι **ε :** $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$y - 1 = 1.\ x$

$y = x + 1$ **(1)**

Για $y = 0$, η (1) $\Rightarrow$ $x = -1$.

Άρα η (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-1, 0)$

Για $x = 0$, η (1) $\Rightarrow$ $y = 1$.

Άρα η (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, 1)$

Επομένως $(OA) = (OB) = 1$ δηλαδή το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές.