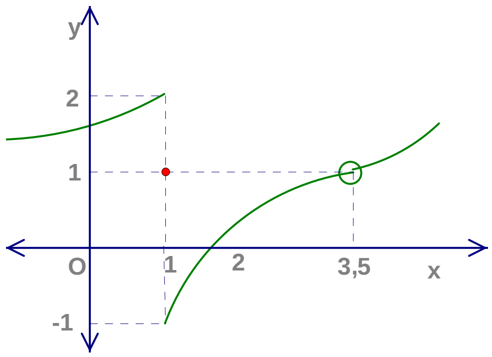
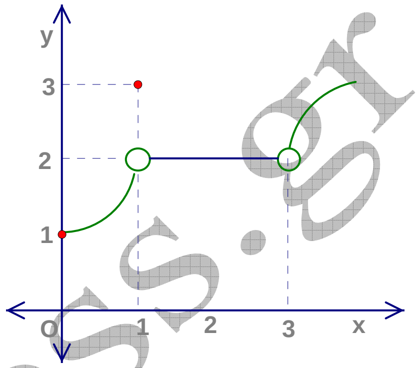
1.8
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 197 – 201

Α΄ Ομάδας

1.
Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων. Να βρείτε τα σημεία στα οποία αυτές δεν είναι συνεχείς.





Λύση

Δεν είναι συνεχής στο $x_o = 1$ αφού

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2 \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1$

Προσοχή, στο 3,5 δεν ορίζεται

Δεν είναι συνεχής στο $x_o = 1$ αφού

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2 \neq f(1) = 3$

Προσοχή, στο 3 δεν ορίζεται

2.i)
Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_o τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4, & x < 2 \\ x^3, & x \geq 2 \end{cases} \qquad \text{αν } x_o = 2$$

Λύση

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2^2 + 4 = 8$, $\quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2^3 = 8$ και $f(2) = 2^3 = 8$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Rightarrow$ f συνεχής στο $x_o = 2$

2.ii)

Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_o τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x < 1 \\ \sqrt{3+x}, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{αν} \quad x_o = 1$$

Λύση

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1^2 + 1 = 2,$ $\quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \sqrt{3+1} = 2$ $\quad$ και $\quad f(1) = \sqrt{3+1} = 2$

Άρα $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \Rightarrow$ f συνεχής στο $x_o = 1$

2.iii)

Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_o τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x+2}, & x \neq -2 \\ -3, & x = -2 \end{cases} \quad \text{αν} \quad x_o = -2$$

Λύση

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^2+x-2}{x+2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} = \lim_{x \to -2} (x-1) = -2-1 = -3 = f(-2)$$

Άρα f συνεχής στο $x_o = -2$

3.i)

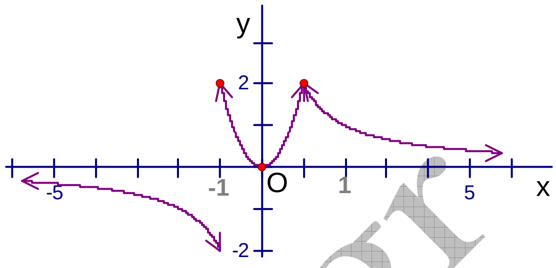
Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & |x| \le 1 \\ \dfrac{2}{x}, & |x| > 1 \end{cases}$

και μετά να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Λύση

Ο τύπος της συνάρτησης γράφεται

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & -1 \le x \le 1 \\ \dfrac{2}{x}, & x < -1 \text{ ή } x > 1 \end{cases}$$



Στο διάστημα $(-1,\ 1)$ είναι $f(x) = 2x^2$, συνεχής σαν πολυωνυμική.

Στα διαστήματα $(-\infty,\ -1),\ (1,\ +\infty)$ είναι $f(x) = \dfrac{2}{x}$ συνεχής σαν ρητή.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2}{x} = \frac{2}{-1} = -2 \ne f(-1) = 2(-1)^2 = 2$$

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_o = -1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x^2) = 2\cdot 1^2 = 2, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x} = \frac{2}{1} = 2, \quad f(-1) = 2$$

Άρα f συνεχής στο $x_o = 1$

3.ii)

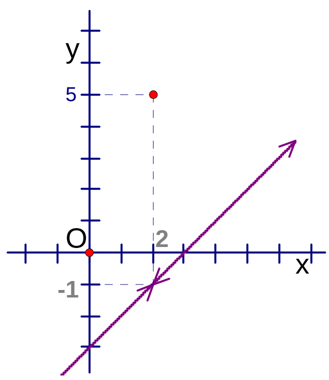
Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}, & x \ne 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$

και μετά να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Λύση

Για $x \ne 2$, ο τύπος της συνάρτησης γράφεται

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x - 3$$



Στο $(-\infty,\ 2) \cup (2,\ +\infty)$ είναι $f(x) = x - 3$, συνεχής σαν πολυωνυμική.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} (x-3) = 2 - 3 = -1 \ne f(2) = 5$$

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_o = 2$

3.iii)

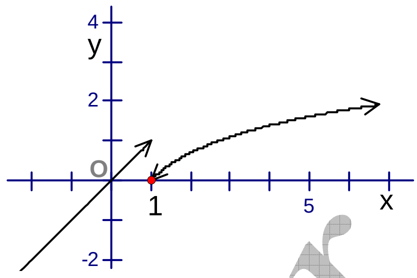
Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x & , \ x < 1 \\ \ln x & , \ x \geq 1 \end{cases}$

και μετά να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Λύση

Στο διάστημα $(-\infty,\ 1)$ είναι $f(x) = x$ συνεχής σαν πολυωνυμική.

Στο διάστημα $(1,\ +\infty)$ είναι $f(x) = \ln x$ συνεχής σαν λογαριθμική



$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x = 1, \quad f(1) = \ln 1 = 0,$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \ln x = \ln 1 = 0$

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_o = 1$

3.iv)

Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x & , \ x \leq 0 \\ -x^2+1 & , \ x > 0 \end{cases}$

και μετά να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Λύση

Στο διάστημα $(-\infty,\ 0)$ είναι $f(x) = e^x$, συνεχής σαν εκθετική.

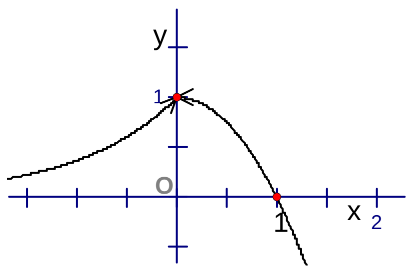
Στο διάστημα $(0,\ +\infty)$ είναι $f(x) = -x^2 + 1$, συνεχής σαν πολυωνυμική.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = e^0 = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x^2 + 1) = 0 + 1 = 1$

$f(0) = -0^2 + 1 = 1$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_o = 0$



4.i)

Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^2-3 & , x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & , x > 1 \end{cases}$

Λύση

Στο διάστημα $(1, +\infty)$ είναι $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{(\sqrt{x})^2-1^2}{\sqrt{x}-1}$

$= \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1$ συνεχής.

Στο διάστημα $(-\infty\ , 1)$ είναι $f(x) = 2x^2-3$ συνεχής.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x^2-3) = 2\cdot 1^2 - 3 = -1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (\sqrt{x}+1) = \sqrt{1}+1 = 2$

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_o = 1$

4.ii)

Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x} & , x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu x & , x \ge 0 \end{cases}$

και μετά να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Λύση

Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ είναι $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x}$, συνεχής σαν πηλίκο συνεχών.

Στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι $f(x) =$ συνx, συνεχής.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$ και $f(0) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$

Άρα f συνεχής στο $x_o = 0$

5.i)

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)$ είναι συνεχής.

Λύση

Πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής σαν σύνθεση των συνεχών ημx, συνx

5.ii)

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ είναι συνεχής.

Λύση

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $D_f = \mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής σαν σύνθεση των συνεχών $\ln x$, $x^2 + x + 1$

5.iii)

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$ είναι συνεχής.

Λύση

Πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής σαν σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων ημx , $\dfrac{1}{x^2+1}$

5.iv)

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^{\eta\mu x}$ είναι συνεχής.

Λύση

Πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής σαν σύνθεση των συνεχών e^x, ημx

5.v)

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln(\ln x)$ είναι συνεχής.

Λύση

Πρέπει $\ln x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x > \ln 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$.

Επομένως πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $(1, +\infty)$

Η f είναι συνεχής σαν σύνθεση των συνεχών $\ln x$, $\ln x$

6.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x - x + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, \pi)$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x - x + 1$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$ με

$f(0)\cdot f(\pi) = (\eta\mu 0 - 0 + 1)(\eta\mu\pi - \pi + 1) = 1\cdot(1 - \pi) = 1 - \pi < 0$.

Κατά το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$,

δηλαδή η εξίσωση $\eta\mu x - x + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, \pi)$

7.

Για κάθε μία από τις παρακάτω πολυωνυμικές συναρτήσεις f, να βρείτε έναν ακέραιο α τέτοιον, ώστε στο διάστημα (α, α +1) η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

i) $f(x) = x^3 + x - 1$ **ii)** $f(x) = x^5 + 2x + 1$

iii) $f(x) = x^4 + 2x - 4$ **iv)** $f(x) = -x^3 + x + 2$

Λύση

Οι συναρτήσεις f είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ σαν πολυωνυμικές.
Αναζητάμε κατάλληλη τιμή του α, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη $f(\alpha)\cdot f(\alpha+1) < 0$ του θεωρήματος Bolzano

i)

Είναι $f(0) = -1 < 0$ και $f(0+1) = f(1) = 1 + 1 - 1 = 1 > 0$ άρα $\alpha = 0$

ii)

Είναι $f(0) = 1 > 0$ και $f(-1) = -1 - 2 + 1 = -2 < 0$ άρα $\alpha = -1$

iii)

Είναι $f(1) = 1 + 2 - 4 = -1 < 0$ και $f(2) = 16 + 4 - 4 = 16 > 0$ άρα $\alpha = 1$

iv)

Είναι $f(1) = -1 + 1 + 2 = 2 > 0$ και $f(2) = -8 + 2 + 2 = -4 < 0$ άρα $\alpha = 1$

8.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$\alpha(x-\mu)(x-\nu) + \beta(x-\lambda)(x-\nu) + \gamma((x-\lambda)(x-\mu) = 0$,
όπου α, β, $\gamma > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$, έχει δύο ρίζες άνισες , μια στο διάστημα (λ, μ) και μια στο (μ, ν).

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha(x-\mu)(x-\nu) + \beta(x-\lambda)(x-\nu) + \gamma((x-\lambda)(x-\mu)$

f συνεχής στο $\mathbb{R}$ (τριώνυμο αν κάνουμε τις πράξεις και διατάξουμε ως προς x)

$f(\lambda) = \alpha(\lambda-\mu)(\lambda-\nu) + 0 + 0 = \alpha(\lambda-\mu)(\lambda-\nu) > 0$ **(1)** αφού $\alpha > 0$, $\lambda < \mu$ και $\lambda < \nu$

$f(\mu) = 0 + \beta(\mu-\lambda)(\mu-\nu) + 0 = \beta(\mu-\lambda)(\mu-\nu) < 0$ **(2)**

(1), (2) $\Rightarrow$ $f(\lambda)\, f(\mu) < 0$

Κατά το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_1 στο διάστημα (λ, μ)

Ομοίως, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_2 στο διάστημα (μ, ν)

Επειδή, όμως, η $f(x)$ είναι τριώνυμο, έχει το πολύ δύο ρίζες, τις x_1, x_2.

9.i)
Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του x , όταν
$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

Λύση
f συνεχής.
$f(x) = x^2 (x+2) - (x+2) = (x+2)(x^2 - 1) = (x+2)(x-1)(x+1)$
Ρίζες : -2 , -1 , 1

Πίνακας προσήμου της f

Διάστημα	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
Αριθμός x_o	–3	–3/2	0	2
$f(x_o)$	–8	5/8	–2	12
Πρόσημο της f	–	+	–	+

9.ii)
Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του x , όταν
$f(x) = x^4 - 9x^2$

Λύση
f συνεχής.
$f(x) = x^2 (x^2 - 9) = x^2 (x-3)(x+3)$
Ρίζες : -3 , 0 , 3

Πίνακας προσήμου της f

Διάστημα	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
Αριθμός x_o	–4	–1	1	4
$f(x_o)$	112	–8	–8	112
Πρόσημο της f	+	–	–	+

9.iii)

Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του x, όταν $f(x) = εφx - \sqrt{3}, \quad x \in (-\pi, \ \pi)$

Λύση

f συνεχής στο $(-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$

Ρίζες : $f(x) = 0 \iff εφx - \sqrt{3} = 0$

$εφx = \sqrt{3} \iff x = \frac{\pi}{3}$ ή $x = -\frac{2\pi}{3}$

Πίνακας προσήμου της f

Διάστημα	$\left(-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right)$	$\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
Αριθμός x_o	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{12}$	0	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$
$f(x_o)$	$-1-\sqrt{3}$	2	$-\sqrt{3}$	2	$-1-\sqrt{3}$
Πρόσημο της f	–	+	–	+	–

9.iv)

Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του x, όταν $f(x) = ημx + συνx, \quad x \in [0, \ 2\pi]$

Λύση

f συνεχής

Ρίζες : $f(x) = 0 \iff ημx + συνx = 0$

$ημx = -συνx$

$\frac{ημx}{συνx} = -1$

$εφx = -1 \iff x = \frac{3\pi}{4}$ ή $x = \frac{7\pi}{4}$

Πίνακας προσήμου της f

Διάστημα	$\left[0, \frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$
Αριθμός x_o	0	π	2π
$f(x_o)$	1	–1	1
Πρόσημο της f	+	–	+

10.i)

Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \ln x - 1$, $x \in [1, e]$

Λύση

f συνεχής και γν. αύξουσα στο $[1, e]$.

Άρα $f([1, e]) = [f(1), f(e)]$

Αλλά $f(1) = \ln 1 - 1 = 0 - 1 = -1$ και $f(e) = \ln e - 1 = 1 - 1 = 0$

Οπότε $f([1, e]) = [-1, 0]$

10.ii)

Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = -x + 2$, $x \in (0, 2)$

Λύση

f συνεχής και γν. φθίνουσα στο $(0, 2)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (-x+2) = -0 + 2 = 2$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (-x+2) = -2 + 2 = 0$$

Άρα $f((0, 2)) = (0, 2)$

10.iii)

Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = 2\eta\mu x + 1$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right)$

Λύση

f συνεχής και γν. αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$.

$f(0) = 2\eta\mu 0 + 1 = 1$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}^-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\eta\mu\frac{\pi}{6} + 1 = 2\cdot\frac{1}{2} + 1 = 2$$

Άρα $f\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right)\right) = [1, 2)$

10.iv)

Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = e^x + 1$, $x \in (-\infty, 0]$

Λύση

f συνεχής και γν. αύξουσα στο $(-\infty, 0)$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (e^x + 1) = 0 + 1 = 1$$

$f(0) = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2$

Άρα $f((-\infty, 0)) = (1, 2]$

Β΄ Ομάδας

1.

Αν $f(x) = \begin{cases} (x-\kappa)(x+\kappa) & , \ x \leq 2 \\ \kappa x+5 & , \ x > 2 \end{cases}$, να προσδιορίσετε το κ, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_o = 2$.

Λύση

f συνεχής στο $x_o = 2$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

$$\lim_{x\to 2^-} (x^2-\kappa^2) = \lim_{x\to 2^+} (\kappa x + 5) = 2^2-\kappa^2$$

$$4-\kappa^2 = 2\kappa + 5 = 4-\kappa^2$$

$$\kappa^2 + 2\kappa + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa = -1$$

2.

Αν $f(x) = \begin{cases} \alpha^2x^2+\beta x-12 & , \ x < 1 \\ 5 & , \ x = 1 \\ \alpha x+\beta & , \ x > 1 \end{cases}$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f να είναι συνεχής στο $x_o = 1$.

Λύση

f συνεχής στο $x_o = 1$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

$$\lim_{x\to 1^-} (\alpha^2 x^2 + \beta x - 12) = \lim_{x\to 1^+} (\alpha x + \beta) = 5$$

$$\alpha^2 1^2 + \beta\cdot 1 - 12 = \alpha\cdot 1 + \beta = 5$$

$$\alpha^2 + \beta - 12 = 5 \quad \text{και} \quad \alpha + \beta = 5$$

$$\alpha^2 + \beta - 12 = 5 \quad \text{και} \quad \beta = 5 - \alpha$$

$$\alpha^2 + 5 - \alpha - 12 = 5 \quad \text{και} \quad \beta = 5 - \alpha$$

$$\alpha^2 - \alpha - 12 = 0$$

$$\alpha = 4 \ \text{ ή } \ \alpha = -3 \quad \text{και} \quad \beta = 5 - \alpha$$

- Για $\alpha = 4$ έχουμε $\beta = 5 - 4 = 1$
- Για $\alpha = -3$ έχουμε $\beta = 5 + 3 = 8$

3.

i) Έστω μία συνάρτηση f η οποία να είναι συνεχής στο $x_o = 0$. Να βρείτε το $f(0)$, αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $x f(x) = συνx - 1$.

ii) Ομοίως, να βρείτε το $g(0)$ για τη συνάρτηση g που είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x g(x) - ημx| \le x^2$

Λύση

i)

Η υπόθεση $x f(x) = συνx - 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{συνx - 1}{x}$.

f συνεχής στο $x_o = 0 \Rightarrow f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{συνx - 1}{x} = 0$

ii)

$$|x g(x) - ημx| \le x^2 \Rightarrow -x^2 \le x g(x) - ημx \le x^2$$

$$-x^2 + ημx \le x g(x) \le x^2 + ημx \quad \textbf{(1)}$$

Για κάθε $x > 0$ η (1) $\Rightarrow -x + \dfrac{ημx}{x} \le g(x) \le x + \dfrac{ημx}{x}$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x + \dfrac{ημx}{x}\right) = -0 + 1 = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x + \dfrac{ημx}{x}\right) = 0 + 1 = 1$

Από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$

Επειδή g συνεχής στο $x_o = 0$, θα είναι $g(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$

4.

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο $[0, 1]$ και πληρούν τις σχέσεις $f(0) < g(0)$ και $f(1) > g(1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(ξ) = g(ξ)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ στο $[0, 1]$ συνεχής σαν διαφορά συνεχών.

$h(0) = f(0) - g(0) < 0$ και $h(1) = f(1) - g(1) > 0 \Rightarrow h(0)\ h(1) < 0$.

Από το θεώρημα Bolzano, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$h(ξ) = 0$$
$$f(ξ) - g(ξ) = 0$$
$$f(ξ) = g(ξ)$$

5.i)

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^4+1}{x-1} + \frac{x^6+1}{x-2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1, 2).

Λύση

Αρκεί η εξίσωση $(x^4 + 1)(x - 2) + (x^6 + 1)(x - 1) = 0$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1, 2).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (x^4 + 1)(x - 2) + (x^6 + 1)(x - 1)$ συνεχής σαν πολυωνυμική στο (1, 2).

$h(1) = (1^4 + 1)(1 - 2) + 0 = 2\cdot(-1) = -2$

$h(2) = 0 + (2^6 + 1)(2 - 1) = (64 + 1)\cdot 1 = 65$

Άρα $h(1)\,h(2) < 0$

Από το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $h(x) = 0$ θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1, 2)

5.ii)

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x}{x-1} + \frac{\ln x}{x-2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1, 2).

Λύση

Η εξίσωση γίνεται $e^x(x - 2) + \ln x \cdot (x - 1) = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^x(x - 2) + \ln x \cdot (x - 1)$, συνεχής σαν άθροισμα συνεχών στο (1, 2).

$h(1) = e^1(1 - 2) + \ln 1\ (1 - 1) = -e < 0$

$h(2) = e^2(2 - 2) + \ln 2\ (2 - 1) = \ln 2 > 0$

Άρα $h(1)\,h(2) < 0$

Από το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $h(x) = 0$ θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1, 2)

6.i)

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = \mathbb{R}^*$

Αρκεί η εξίσωση $f(x) = g(x)$, δηλαδή η εξίσωση $e^x = \frac{1}{x}$ να έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}^*$

Επειδή, όμως, $e^x > 0$, θα είναι και $\frac{1}{x} > 0$ άρα $x > 0$, οπότε αναζητάμε τη ρίζα στο $(0, +\infty)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = e^x - \frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$, συνεχής σαν διαφορά συνεχών.

Αποδεικνύουμε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα:

Έστω $x_1 < x_2$ τυχαία $\Rightarrow$ $e^{x_1} < e^{x_2}$ και $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$

$e^{x_1} < e^{x_2}$ και $-\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$ (προσθέτουμε)

$e^{x_1} - \frac{1}{x_1} < e^{x_2} - \frac{1}{x_2} \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της h:

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(e^x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} e^x - \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = e^0 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(e^x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} e^x - \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = +\infty - 0 = +\infty$$

Άρα $h(A) = (-\infty, +\infty)$

Το $0 \in h(A)$ και αφού h γν. αύξουσα,
η εξίσωση $h(x) = 0$, δηλαδή η εξίσωση $f(x) - g(x) = 0$ θα έχει ακριβώς μία ρίζα.

6.ii)

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

Λύση

$D_f = (0, +\infty)$ και $D_g = \mathbb{R}^*$

Αρκεί η εξίσωση $f(x) = g(x)$, δηλαδή η εξίσωση $\ln x = \frac{1}{x}$ να έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, +\infty)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$ η οποία είναι συνεχής σαν διαφορά συνεχών.

Αποδεικνύουμε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα:

Έστω $x_1 < x_2$ τυχαία $\Rightarrow$ $\ln x_1 < \ln x_2$ και $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$

$$\ln x_1 < \ln x_2 \quad \text{και} \quad -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$$

$$\ln x_1 - \frac{1}{x_1} < \ln x_2 - \frac{1}{x_2} \quad \Rightarrow \quad h(x_1) < h(x_2)$$

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της h :

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \ln x - \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = -\infty - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\ln x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \ln x - \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = +\infty - 0 = +\infty$$

Άρα $h(A) = (-\infty, +\infty)$

Το $0 \in h(A)$ και αφού h γν. αύξουσα,
η εξίσωση $h(x) = 0$, δηλαδή η εξίσωση $f(x) - g(x) = 0$ θα έχει ακριβώς μία ρίζα.

7.

i) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-1, 1]$, για την ποία ισχύει

$$x^2 + f^2(x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in [-1, 1].$$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα $(-1, 1)$.

γ) Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f και ποια η γραφική της παράσταση ;

ii) Με ανάλογο τρόπο να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f στο σύνολο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f^2(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

i)

α) $x^2 + f^2(x) = 1$ για κάθε $x \in [-1, 1] \Leftrightarrow$

$f^2(x) = 1 - x^2$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ **(1)**

$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$ οι ρίζες.

β) Η f είναι συνεχής στο $(-1, 1)$ και δε μηδενίζεται σ'αυτό, άρα διατηρεί το πρόσημο της.

γ) Αφού η f διατηρεί πρόσημο, λόγω της (1) θα είναι

$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ στο $(-1, 1)$ ή $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ στο $(-1, 1)$ **(2)**

Επειδή ο 1 είναι ρίζα της f $\Rightarrow$ $f(1) = 0 = \sqrt{1 - 1^2}$ και

$f(-1) = 0 = \sqrt{1 - (-1)^2}$ και

$f(1) = 0 = -\sqrt{1 - 1^2}$ και

$f(-1) = 0 = -\sqrt{1 - (-1)^2}$

Η (2) $\Leftrightarrow f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ στο $[-1, 1]$ ή $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ στο $[-1, 1]$

Επομένως η C_f είναι το ημικύκλιο με κέντρο την αρχή O και ακτίνα $\rho = 1$, που ανήκει στα $1^o - 2^o$ τεταρτημόρια ή στα $3^o – 4^o$.

ii)

α) $f^2(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = x$ ή $f(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$ **(3)**

$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ μοναδική ρίζα.

β) Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και δε μηδενίζεται σ'αυτό $\Rightarrow$ διατηρεί το πρόσημό της στο $(-\infty, 0)$

Ομοίως στο $(0, +\infty)$

γ) Αφού η f διατηρεί πρόσημο στο $(-\infty, 0)$, λόγω της (3) θα είναι

$f(x) = x$ ή $f(x) = -x$ στο $(-\infty, 0)$.

Και επειδή το 0 είναι ρίζα, δηλαδή $f(0) = 0$, θα είναι

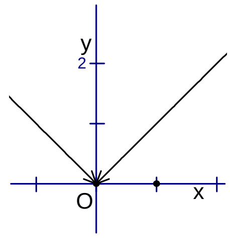
$f(x) = x$ ή $f(x) = -x$ στο $(-\infty, 0]$

Ομοίως $f(x) = x$ ή $f(x) = -x$ στο $[0, +\infty)$

Προκύπτουν οι συνδυασμοί

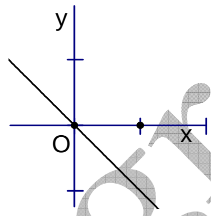
(Α) η f έχει πρόσημο (+) στο $(-\infty, 0)$ και (+) στο $(0, +\infty)$ οπότε

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ x, & x\ge 0\end{cases}$$



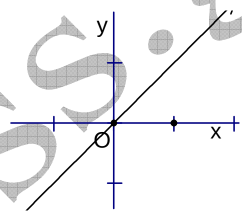
(Β) η f έχει πρόσημο (+) στο $(-\infty, 0)$ και (–) στο $(0, +\infty)$ οπότε

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ -x, & x\ge 0\end{cases} \Rightarrow f(x) = -x \text{ στο } \mathbb{R}$$



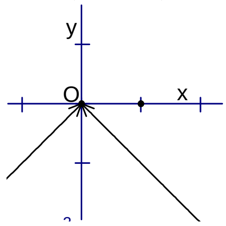
(Γ) η f έχει πρόσημο (–) στο $(-\infty, 0)$ και (+) στο $(0, +\infty)$ οπότε

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\le 0\\ x, & x\ge 0\end{cases} \Rightarrow f(x) = x \text{ στο } \mathbb{R}$$



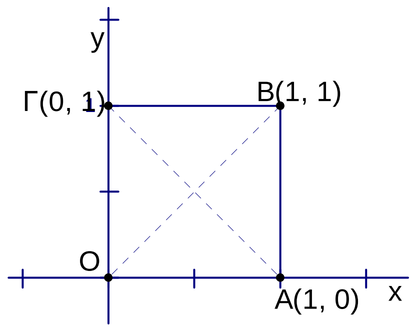
(Δ) η f έχει πρόσημο (–) στο $(-\infty, 0)$ και (–) στο $(0, +\infty)$ οπότε

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\le 0\\ -x, & x\ge 0\end{cases}$$



8.

Δίνεται το τετράγωνο ΟΑΒΓ του διπλανού σχήματος και μία συνεχής στο $[0, 1]$ συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο αυτό και με σύνολο τιμών το $[0, 1]$.



i) Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του τετραγώνου και

ii) Να αποδείξετε, με το θεώρημα του Bolzano, ότι η C_f τέμνει και τις δύο διαγώνιες.

Λύση

i)

Εξίσωση της ΟΒ : $y = x$, $x \in [0, 1]$

Εξίσωση της ΑΓ : $y - 0 = -1(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 1$, $x \in [0, 1]$

ii)

Είναι $0 \le f(x) \le 1$ στο $[0, 1]$ **(1)**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ στο $[0, 1]$, συνεχής σαν διαφορά συνεχών.

$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \overset{(1)}{\ge} 0$ και $g(1) = f(1) - 1 \overset{(1)}{\le} 0$

άρα $g(0)g(1) \le 0$

Οπότε αν $g(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ ή $g(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1$

τότε η C_f τέμνει την διαγώνιο ΟΒ στα σημεία Ο η Β αντίστοιχα

Αν $g(0)\, g(1) < 0$ τότε κατά το θεώρημα Bolzano,

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (0, 1)$ ώστε $g(x_o) = 0$

$$f(x_o) - x_o = 0$$

$$f(x_o) = x_o$$

Άρα η C_f τέμνει τη διαγώνιο ΟΒ σε σημείο (x_o, x_o)

Συνεπώς σε όλες τις περιπτώσεις η C_f τέμνει τη διαγώνιο ΟΒ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - (-x + 1) = f(x) + x - 1$ στο $[0, 1]$, συνεχής σαν διαφορά συνεχών.

$h(0) = f(0) + 0 - 1 = f(0) - 1 \overset{(1)}{\le} 0$ και $h(1) = f(1) + 1 - 1 = f(1) \overset{(1)}{\ge} 0$

άρα $h(0)h(1) \le 0$

Οπότε αν $h(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1$ ή $h(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$

τότε η C_f τέμνει την διαγώνιο ΓΑ στα σημεία Γ η Α αντίστοιχα

Αν $h(0)\, h(1) < 0$ τότε κατά το θεώρημα Bolzano,

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x'_o \in (0, 1)$ ώστε $h(x'_o) = 0$

$$f(x'_o) + x'_o - 1 = 0$$

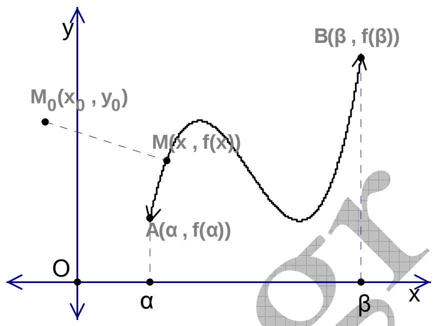
$$f(x'_o) = -x'_o + 1$$

Άρα η C_f τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ σε σημείο $(x'_o, -x'_o + 1)$

Συνεπώς σε όλες τις περιπτώσεις η C_f τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ

Παρατήρηση :
Αν η C_f τέμνει την διαγώνιο ΟΒ στο Ο δεν μπορεί να τέμνει την ΓΑ στο Γ ενώ αν τέμνει την διαγώνιο ΟΒ στο Β δεν μπορεί να τέμνει την ΑΓ στο Α

9.



Στο διπλανό σχήμα η καμπύλη C είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι συνεχής στο [α, β] και το $M_o(x_o , y_o)$ είναι σημείο του επιπέδου.

i) Να βρείτε τον τύπο της απόστασης $d(x) = (M_oM)$ του σημείου $M_o(x_o , y_o)$ από το σημείο M(x , f(x)) της C_f για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση d είναι συνεχής στο [α, β] και στη συνέχεια ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C_f που απέχει από το M_o λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα τουλάχιστον σημείο της C_f που απέχει από το M_o περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.

Λύση

i)

$d(x) = \sqrt{(x-x_0)^2+(f(x)-y_0)^2}$, $x \in [\alpha, \beta]$.

ii)

Η συνάρτηση d είναι συνεχής σαν ρίζα αθροίσματος συνεχών συναρτήσεων στο [α, β].
Άρα θα έχει ελάχιστο και μέγιστο, δηλαδή θα υπάρχουν x_1, $x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια , ώστε $d(x_1) \le d(x) \le d(x_2)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.