1.7
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 186 – 187

Α΄ Ομάδας

1.i)
Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}(-10x^3+2x-5)$

Λύση

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-10x^3+2x-5) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-10x^3) = -10\lim\limits_{x\to+\infty}x^3 = -\infty$

1.ii)
Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3-2x+1)$

Λύση

$\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3-2x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3) = 5\lim\limits_{x\to-\infty}x^3 = -\infty$

1.iii)
Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x^3+8}$

Λύση

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x^3+8} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x^3} = 5\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3} = 5\cdot 0 = 0$

1.iv)
Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-5x^3+2x-1}{x^3-3x+2}$

Λύση

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-5x^3+2x-1}{x^3-3x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty}x = +\infty$

1.v)
Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+x-1}{4x^3-x^2+2}$

Λύση

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+x-1}{4x^3-x^2+2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{4x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

1.vi)

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{x^{10}+x+3}$

Λύση

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x^{10}+x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^{10}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{9}} = 0$$

1.vii)

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{5}{x+2}\right)$

Λύση

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{5}{x+2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} - \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x} = 0 - 0 = 0$$

1.viii)

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2+5}{x} - \dfrac{x^2+3}{x+2}\right)$

Λύση

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+5}{x} - \frac{x^2+3}{x+2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2+5)(x+2) - x(x^2+3)}{x(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x^2+5x+10-x^3-3x}{x^2+2x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+2x+10}{x^2+2x} = \lim_{x\to-\infty} 2 = 2$$

2.i)

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-2x+3}$

Λύση

Έστω $f(x)=\sqrt{4x^2-2x+3}$

$\Delta = 4-48=-44<0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2-2x+3>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $D_f=\mathbb{R}$

$$f(x)=\sqrt{x^2\left(4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}|x|=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}(4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})}=\sqrt{4}=2>0$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}|x|\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=+\infty$

2.ii)

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+10x+9}$

Λύση

Έστω $f(x)=\sqrt{x^2+10x+9}$

$\Delta = 100-36=64>0$

Ρίζες του τριωνύμου $x=\frac{-10\pm8}{2}=\frac{-10+8}{2}$ ή $\frac{-10-8}{2}=-1$ ή -9.

Πρέπει $x^2+10x+9\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\leq-9$ ή $x\geq-1$.

Επειδή $x\to-\infty$, περιοριζόμαστε στα $x\leq-9$

$$f(x)=\sqrt{x^2\left(1+\frac{10}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1+\frac{10}{x}+\frac{9}{x^2}}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{10}{x}+\frac{9}{x^2}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{10}{x}+\frac{9}{x^2})}=\sqrt{1}=1>0$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

2.iii)

Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3x+2})$

Λύση

Πρέπει $x^2+1\geq 0$ και $x^2-3x+2\geq 0 \Leftrightarrow$
$x\in\mathbb{R}$ και $x\leq 1$ ή $x\geq 2$

Επειδή $x\to+\infty$, περιοριζόμαστε στα $x\geq 2$

$\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$

Ομοίως $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+2}=+\infty$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3x+2})=+\infty$

2.iv)

Να βρείτε το $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}-x)$, $\alpha\neq\beta$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}-x$ και έστω $\alpha<\beta$

Πρέπει $(x+\alpha)(x+\beta)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq\alpha$ ή $x\geq\beta$

Επειδή $x\to-\infty$, περιοριζόμαστε στα $x\leq\alpha$

Είναι $f(x)=\sqrt{x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}+(-x)$

$\lim_{x\to-\infty}[x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ και $\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$

Άρα $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

2.v)

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1-\sqrt{4x^2-4x+3})$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2x-1-\sqrt{4x^2-4x+3}$

$\Delta=16-48=-32<0 \quad\Rightarrow\quad 4x^2-4x+3\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Περιοριζόμαστε στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$, στο οποίο ισχύει $2x-1>0$

Είναι $f(x)=\dfrac{(2x-1-\sqrt{4x^2-4x+3})(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3})}{2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}}$

$$f(x)=\frac{(2x-1)^2-(\sqrt{4x^2-4x+3})^2}{x(2-\frac{1}{x})+\sqrt{x^2(4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})}}$$

$$f(x)=\frac{4x^2-4x+1-(4x^2-4x+3)}{x(2-\frac{1}{x})+x\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$$f(x)=\frac{4x^2-4x+1-4x^2+4x-3}{x(2-\frac{1}{x}+\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}})}$$

$$f(x)=\frac{-2}{x(2-\frac{1}{x}+\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}})}=\frac{1}{x}\cdot\frac{-2}{2-\frac{1}{x}+\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{2-\frac{1}{x}+\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}$

$$=0\cdot\frac{-2}{2-0+\sqrt{4-0+0}}=0\cdot\frac{-2}{2+2}=0$$

3.i)

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Λύση

Πεδίο ορισμού : $\mathbb{R}^*$

Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(0,\ +\infty)$.

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x}=\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{1+0}=1$

3.ii)

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ με $D_f=\mathbb{R}$

Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(0,\ +\infty)$.

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}+x}=\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=0$$

3.iii)

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Λύση

Πεδίο ορισμού : $\mathbb{R}^*$

Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(-\infty,\ 0)$.

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x}=\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-\sqrt{1+0}=-1$

3.iv)

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$ με $D_f=\mathbb{R}$

Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(-\infty,\ 0)$.

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}-x}$$

$$=\frac{1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=0$$

3.v)

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ με $D_f=(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$

Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(1,\ +\infty)$.

$$f(x)=\frac{(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2-1})}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2-1})}=\frac{[x^2-(\sqrt{x^2+1})^2](x+\sqrt{x^2-1})}{[x^2-(\sqrt{x^2-1})^2](x+\sqrt{x^2+1})}$$

$$=\frac{[x^2-x^2-1](x+\sqrt{x^2-1})}{[x^2-x^2+1](x+\sqrt{x^2+1})}$$

$$=-\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=-\frac{x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$=-\frac{x+x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=-\frac{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}=-\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{1+\sqrt{1-0}}{1+\sqrt{1+0}}=-\frac{2}{2}=-1$$

3.vi)

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sqrt{x^2+2x+2}-x^2)$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(x\sqrt{x^2+2x+2}-x^2)$ με $D_f=\mathbb{R}$.

Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(0, +\infty)$.

$$f(x) = x(\sqrt{x^2+2x+2}-x) = x\,\frac{(\sqrt{x^2+2x+2}-x)(\sqrt{x^2+2x+2}+x)}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}$$

$$= x\,\frac{x^2+2x+2-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+x}$$

$$= x\,\frac{2x+2}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+x}$$

$$= x\,\frac{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)} = x\,\frac{2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=\dfrac{2+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\dfrac{2}{2}=1>0$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Β΄ Ομάδας

1.i)

Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+\mu x)$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\mu x$ με $D_f=\mathbb{R}$.

Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(-\infty,\ 0)$

$$f(x)=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\mu x = -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\mu x = -x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\mu\right) \quad \textbf{(1)}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\mu\right)=\sqrt{1+0}-\mu=1-\mu$

- Όταν $1-\mu<0$, δηλαδή $\mu>1$, από την (1) έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$
- Όταν $1-\mu>0$, δηλαδή $\mu<1$, από την (1) έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$
- Όταν $1-\mu=0$, δηλαδή $\mu=1$, η συνάρτηση γίνεται

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}+x = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}-x}$$

$$=\frac{1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x} = -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=0$

1.ii)

Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ, να υπολογίσετε το

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $(x_1, +\infty)$, όπου x_1 η μεγαλύτερη ρίζα του τριωνύμου μx^2-5x+6 που ενδεχομένως υπάρχει.

Είναι $f(x)=\dfrac{x^3(\mu-1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3})}{x^2(\mu-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2})} = x\,\dfrac{\mu-1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}}{\mu-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}$

$$\lim_{x\to+\infty}x=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\mu-1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=\mu-1,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\mu-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)=\mu$$

- Όταν $\mu-1\neq 0$ και $\mu\neq 0$, δηλαδή όταν $\mu\neq 1$ και $\mu\neq 0$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu-1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}}{\mu-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}=\frac{\mu-1}{\mu}.$$

Οπότε: Αν μεν $\dfrac{\mu-1}{\mu}>0$, δηλαδή $\mu<0$ ή $\mu>1$, τότε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Αν δε $\dfrac{\mu-1}{\mu}<0$, δηλαδή $0<\mu<1$, τότε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

- Όταν $\mu-1=0$ δηλαδή $\mu=1$, η συνάρτηση γίνεται $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x^2-5x+6}$

Οπότε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}2=2$

- Όταν $\mu=0$, η συνάρτηση γίνεται $f(x)=\dfrac{-x^3+2x^2+3}{-5x+6}$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{-5x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{5}=+\infty$$

2.

Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x)$ να υπάρχει στο $\mathbb{R}$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,\ +\infty)$.

Είναι $f(x)=\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}-\lambda x = x\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}-\lambda x = x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}-\lambda\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}-\lambda\right)=\sqrt{1+0+0}-\lambda=1-\lambda$$

- Όταν $1-\lambda>0$, δηλαδή $\lambda<1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- Όταν $1-\lambda<0$, δηλαδή $\lambda>1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
- Όταν $1-\lambda=0$, δηλαδή $\lambda=1$, τότε

$$f(x)=\sqrt{x^2+5x+10}-x=\frac{(\sqrt{x^2+5x+10}-x)(\sqrt{x^2+5x+10}+x)}{\sqrt{x^2+5x+10}+x}$$

$$=\frac{x^2+5x+10-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}+x}$$

$$=\frac{5x+10}{x\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}+x}$$

$$=\frac{x\left(5+\frac{10}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}+1\right)}=\frac{5+\frac{10}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}+1}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{5+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\dfrac{5}{2}\in\mathbb{R}$

Επομένως, η ζητούμενη τιμή του λ είναι $\lambda=1$.

3.

Αν $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$ - αx + β, να βρείτε τις τιμές των α, $\beta\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Λύση

$D_f=(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ +\infty)$

Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(-1,\ +\infty)$.

$$f(x)=\frac{x^2+1-\alpha x^2-\alpha x+\beta x+\beta}{x+1}=\frac{(1-\alpha)x^2+(\beta-\alpha)x+\beta+1}{x+1} \quad \textbf{(1)}$$

$$=\frac{x^2\left(1-\alpha+\frac{\beta-\alpha}{x}+\frac{\beta+1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=x\cdot\frac{1-\alpha+\frac{\beta-\alpha}{x}+\frac{\beta+1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$

- Όταν $1-\alpha\neq 0$, δηλαδή όταν $\alpha\neq 1$ και επειδή

  $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\alpha+\frac{\beta-\alpha}{x}+\frac{\beta+1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1-\alpha+0+0}{1+0}=1-\alpha$

  θα έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$ ανάλογα με το πρόσημο του $1-\alpha$

- Όταν $1-\alpha=0$, δηλαδή όταν $\alpha=1$, η συνάρτηση από την (1) γίνεται

  $$f(x)=\frac{(\beta-1)x+\beta+1}{x+1}=\frac{x\left(\beta-1+\frac{\beta+1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\beta-1+\frac{\beta+1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

  Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\beta-1+\frac{\beta+1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\beta-1+0}{1+0}=\beta-1$

  Αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

  Επομένως $\beta-1=0 \Leftrightarrow \beta=1$

Οι ζητούμενες, λοιπόν, τιμές των α, β είναι $\alpha=1$, $\beta=1$.

4.i)

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^2-5x|+x}{x^2-3x+2}$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x^2-5x|+x}{x^2-3x+2}$ με $D_f=\mathbb{R}-\{1,\ 2\}$

$x^2-5x>0 \iff x<0$ ή $x>5$

Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(-\infty,\ 0)$, οπότε

$$f(x)=\frac{x^2-5x+x}{x^2-3x+2}=\frac{x^2-4x}{x^2-3x+2}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-4x}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}1=1$

4.ii)

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+5-x}{x+\sqrt{4+3x^2}}$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+5-x}{x+\sqrt{4+3x^2}}$

Για κάθε $x<0$ είναι $x+\sqrt{4+3x^2}>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\neq 0$

Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(-\infty,\ 0)$, οπότε

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x\left(\frac{5}{x}-1\right)}{x+\sqrt{x^2\left(\frac{4}{x^2}+3\right)}}=\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x\left(\frac{5}{x}-1\right)}{x-x\sqrt{\frac{4}{x^2}+3}}=\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\left(\frac{5}{x}-1\right)}{1-\sqrt{\frac{4}{x^2}+3}}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\left(\frac{5}{x}-1\right)}{1-\sqrt{\frac{4}{x^2}+3}}$

$$=\frac{-\sqrt{1+0}+(0-1)}{1-\sqrt{0+3}}=\frac{-2}{1-\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1}=\sqrt{3}+1$$

4.iii)

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^2-x|}{x-1}$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x^2-x|}{x-1}$ με $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

$x^2-x>0 \iff x<0$ ή $x>1$

Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(1, +\infty)$, οπότε

$f(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}=\dfrac{x(x-1)}{x-1}=x$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$