2.1 – 2.2
Ασκήσεις σχ. Βιβλίου σελίδας 94 – 97

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ο $z = (\lambda + 3i)(2 - i)$ να είναι :

α) πραγματικός αριθμός **β)** φανταστικός αριθμός

Λύση

$z = 2\lambda - \lambda i + 6i + 3 = (2\lambda + 3) + (6 - \lambda)i$

α) z πραγματικός $\Leftrightarrow$ $6 - \lambda = 0$ $\Leftrightarrow$ $\lambda = 6$

β) z φανταστικός $\Leftrightarrow$ $2\lambda + 3 = 0$ $\Leftrightarrow$ $2\lambda = -3$ $\Leftrightarrow$ $\lambda = -\frac{3}{2}$

2.

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύει :

α) $(x + y) + (x - y)i = 3 - i$

β) $\sqrt{3x^2 + x - 6} + (x^2 - 3)i = 2 + i$

γ) $9 - 27i = (3x + 2y) - yi$

Λύση

α)

$(x + y) + (x - y)i = 3 - i \iff x + y = 3$ **(1)** και $x - y = -1$ **(2)**

(1) + (2) προκύπτει $2x = 2 \iff x = 1$

(1) – (2) προκύπτει $2y = 4 \iff y = 2$

β)

$\sqrt{3x^2 + x - 6} + (x^2 - 3)i = 2 + i \iff$

$\sqrt{3x^2 + x - 6} = 2$ **(3)** και $x^2 - 3 = 1$ **(4)**

(4) $\iff x^2 = 4 \iff x = 2$ ή $x = -2$

- Για $x = 2$, η (3) γίνεται $\sqrt{3 \cdot 2^2 + 2 - 6} = 2 \iff \sqrt{8} = 2$ άτοπο
- Για $x = -2$, η (3) γίνεται $\sqrt{3 \cdot (-2)^2 - 2 - 6} = 2 \iff \sqrt{4} = 2$ που ισχύει

Άρα η ζητούμενη τιμή του x είναι -2.

γ)

$9 - 27i = (3x + 2y) - yi \iff 9 = 3x + 2y$ και $27 = y$

$9 = 3x + 54$ και $27 = y$

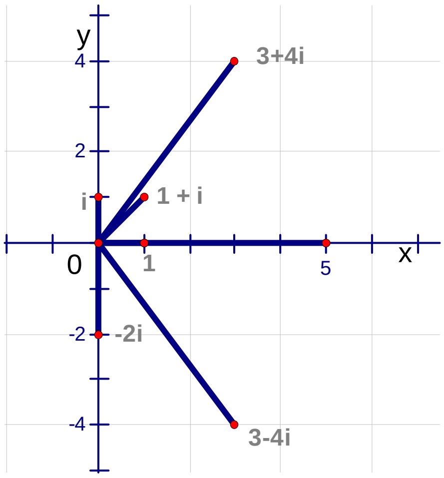
$3x = -45$ και $27 = y$

$x = -15$ και $27 = y$

3.

Στο μιγαδικό επίπεδο να σημειώσετε τις εικόνες και τις διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών αριθμών : $1 + i$, 1, i, $-2i$, $3 + 4i$, $3 - 4i$, 5, 0.

Λύση



4.

Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z, που ικανοποιούν τις σχέσεις :

α) Το πραγματικό μέρος του z είναι ίσο με μηδέν.
β) Το φανταστικό μέρος του z είναι ίσο με μηδέν.
γ) Το πραγματικό μέρος του z είναι ίσο με το φανταστικό του μέρος.

Λύση

α) Είναι τα σημεία του άξονα $y'y$
β) Είναι τα σημεία του άξονα $x'x$
γ) Είναι τα σημεία της διχοτόμου $1^{ης} - 3^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

5.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εκτελέσετε τις πράξεις που σημειώνονται και να γράψετε το αποτέλεσμα στη μορφή $\alpha + \beta i$.

α) $(-4 + 6i) + (7 - 2i)$ **β)** $(3 - 2i) - (6 + 4i)$

γ) $(3 + 4i) + (-8 - 7i) + (5 + 3i)$ **δ)** $(3 + 2i)(4 + 5i)$

ε) $3i(6 + i)$ **στ)** $(4 + 3i)(4 - 3i)$

ζ) $i(3 + i)(2 - i)$

Λύση

α) $(-4 + 6i) + (7 - 2i) = -4 + 6i + 7 - 2i = 3 + 4i$

β) $(3 - 2i) - (6 + 4i) = 3 - 2i - 6 - 4i = -3 - 6i$

γ) $(3 + 4i) + (-8 - 7i) + (5 + 3i) = 3 + 4i - 8 - 7i + 5 + 3i = 0 + 0i$

δ) $(3 + 2i)(4 + 5i) = 12 + 15i + 8i - 10 = 2 + 23i$

ε) $3i(6 + i) = 18i - 3 = -3 + 18i$

στ) $(4 + 3i)(4 - 3i) = 16 + 9 = 25 + 0i$

ζ) $i(3 + i)(2 - i) = (3i - 1)(2 - i) = 6i + 3 - 2 + i = 1 + 7i$

6.

Να γράψετε τους παρακάτω μιγαδικούς στη μορφή α + βi..

α) $\frac{1}{1-i}$ **β)** i^6

γ) $i^2 + 2i + 1$ **δ)** $(1 + i\sqrt{3}\,)^2$

ε) $\frac{3+i}{2-i}$ **στ)** $\frac{6-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}$

Λύση

α)

$$\frac{1}{1-i} = \frac{1(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

β)

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1 + 0i$$

γ)

$$i^2 + 2i + 1 = -1 + 2i + 1 = 0 + 2i$$

δ)

$$(1 + i\sqrt{3}\,)^2 = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 = -2 + 2i\sqrt{3}$$

ε)

$$\frac{3+i}{2-i} = \frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6+3i+2i-1}{4+1} = \frac{5+5i}{5} = 1 + i$$

στ)

$$\frac{6-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}} = \frac{(6-i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})}{(1+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})} = \frac{6-6i\sqrt{2}-i\sqrt{2}-2}{1+2} = \frac{4-7i\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{3} - \frac{7\sqrt{2}}{3}i$$

7.

Να βρείτε τους x, y $\in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει :

α) $(3 - 2i)^2 - (x + iy) = x - yi$

β) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2 + \dfrac{1}{x+iy} = 1 + i$

γ) $(3 - 2i)(2x - iy) = 2(2x - iy) + 2i - 1$

Λύση

α)

$(3 - 2i)^2 - (x + iy) = x - yi \iff 9 - 12i - 4 - x - iy = x - yi$

$5 - x - 12i = x$

$5 - x = x$ και $-12 = 0$ αδύνατο.

β)

Είναι $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1+2i-1}{1+1} = \dfrac{2.i}{2} = i$

Η δοσμένη ισότητα γίνεται $i^2 + \dfrac{1}{x+iy} = 1 + i$

$-1 + \dfrac{1}{x+iy} = 1 + i$

$\dfrac{1}{x+iy} = 2 + i$

$x + yi = \dfrac{1}{2+i}$

$x + yi = \dfrac{2-i}{(2+i)(2-i)}$

$x + yi = \dfrac{2-i}{4+1}$

$x + yi = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}I \iff x = \dfrac{2}{5}$ και $y = -\dfrac{1}{5}$

γ)

$(3 - 2i)(2x - iy) = 2(2x - iy) + 2i - 1 \iff (3 - 2i)(2x - iy) - 2(2x - iy) = 2i - 1$

$(2x - iy)(3 - 2i - 2) = 2i - 1$

$(2x - iy)(1 - 2i) = -(1 - 2i)$

$2x - iy = -1$

$2x = -1$ και $y = 0$

$x = -\dfrac{1}{2}$ και $y = 0$

8.
Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

α) $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46} + i^{56}$

β) $\dfrac{1}{i^{11}} - \dfrac{1}{i^{41}} + \dfrac{1}{i^{75}} - \dfrac{1}{i^{1023}}$

Λύση

α)

Είναι $6 = 4\cdot 1 + 2$ άρα $i^6 = i^2 = -1$

$16 = 4\cdot 4 + 0$ άρα $i^{16} = i^0 = 1$

$26 = 4\cdot 6 + 2$ άρα $i^{26} = i^2 = -1$

$36 = 4\cdot 9 + 0$ άρα $i^{36} = i^0 = 1$

$46 = 4\cdot 11 + 2$ άρα $i^{46} = i^2 = -1$

$56 = 4\cdot 14 + 0$ άρα $i^{56} = i^0 = 1$

Επομένως $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46} + i^{56} = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0$

β)

Είναι $11 = 4\cdot 2 + 3$ άρα $i^{11} = i^3 = -i$

$41 = 4\cdot 10 + 1$ άρα $i^{41} = i^1 = i$

$75 = 4\cdot 18 + 3$ άρα $i^{75} = i^3 = -i$

$1023 = 4\cdot 255 + 3$ άρα $i^{1023} = i^3 = -i$

Άρα $\dfrac{1}{i^{11}} - \dfrac{1}{i^{41}} + \dfrac{1}{i^{75}} - \dfrac{1}{i^{1023}} = \dfrac{1}{-i} - \dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{-i} - \dfrac{1}{-i}$

$= -2\dfrac{1}{i} = -2\dfrac{i}{i.i} = -2\dfrac{i}{-1} = 2i$

9.
Ποιος είναι ο $\overline{z}$, όταν :

α) $z = -5 + 7i$ **β)** $z = -4 - 9i$ **γ)** $z = 4i$

δ) $z = 11$ **ε)** $z = -i$ **στ)** $z = 0$

Λύση

α) $\overline{z} = -5 - 7i$ **β)** $\overline{z} = -4 + 9i$ **γ)** $\overline{z} = -4i$

δ) $\overline{z} = 11$ **ε)** $\overline{z} = i$ **στ)** $\overline{z} = 0$

10.

Με ποιες συμμετρίες μπορούν να προκύψουν από την εικόνα του μιγαδικού $z = x + yi$ οι εικόνες των μιγαδικών $\overline{z}$, $-z$ και $-\overline{z}$.

Λύση

Η εικόνα του $\overline{z}$ είναι συμμετρική της εικόνας του z ως προς τον άξονα $x'x$.

Η εικόνα του $-z$ είναι συμμετρική της εικόνας του z ως προς την αρχή O.

Η εικόνα του $-\overline{z}$ είναι συμμετρική της εικόνας του z ως προς τον άξονα $y'y$.

11.

Αν $z_1 = \frac{5-9i}{7+4i}$ και $z_2 = \frac{5+9i}{7-4i}$, να δείξετε ότι ο $z_1 + z_2$ είναι πραγματικός αριθμός, ενώ ο $z_1 - z_2$ φανταστικός αριθμός.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $z_2 = \overline{z_1}$, άρα

$z_1 + z_2 = z_1 + \overline{z_1} = 2\mathrm{Re}(z_1)$ που είναι πραγματικός και

$z_1 - z_2 = z_1 - \overline{z_1} = 2i\,\mathrm{Im}(z_1)$ που είναι φανταστικός.

12.

Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z, που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις :

α) $z-\overline{z}=6i$ **β)** $z^2=\overline{z}^2$ **γ)** $\overline{z}^2=-z^2$ **δ)** $\overline{z}=2-z$

Λύση

Έστω $z=x+yi$

α)

$z-\overline{z}=6i \Leftrightarrow 2yi=6i \Leftrightarrow y=3$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών z είναι τα σημεία της ευθείας που έχει εξίσωση $y=3$.

β)

$z^2=\overline{z}^2 \Leftrightarrow (x+yi)^2=(x-yi)^2$

$x^2+2xyi-y^2=x^2-2xyi-y^2$

$4xyi=0$

$xy=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $y=0$.

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών z είναι τα σημεία των δύο αξόνων $x'x$ και $y'y$.

γ)

$\overline{z}^2=-z^2 \Leftrightarrow (x-yi)^2=-(x+yi)^2$

$x^2-2xyi-y^2=-(x^2+2xyi-y^2)$

$x^2-2xyi-y^2=-x^2-2xyi+y^2$

$2x^2=2y^2$

$x^2=y^2 \Leftrightarrow x=y$ ή $x=-y$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών z είναι τα σημεία των δύο διχοτόμων των τεσσάρων τεταρτημορίων.

δ)

$\overline{z}=2-z \Leftrightarrow x-yi=2-(x+yi)$

$x-yi=2-x-yi$

$2x=2 \Leftrightarrow x=1$.

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών z είναι τα σημεία της ευθείας που έχει εξίσωση $x=1$.

13.

Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών τις εξισώσεις :

α) $x^2 - 3x + 2 = 0$ **β)** $x^2 - 2x + 3 = 0$ **γ)** $x + \frac{1}{x} = 1$

Λύση

α)

$\Delta = 9 - 8 = 1$, $x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 2$ ή 1

β)

$\Delta = 4 - 12 = -8$, $x = \frac{2 \pm i\sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm i2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm i\sqrt{2}$

γ)

Περιορισμός : $x \neq 0$

$x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3$, $x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

14.

Αν μια ρίζα της εξίσωσης $2x^2 + \beta x + \gamma = 0$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, είναι $3 + 2i$, να βρείτε τις τιμές των β και γ.

Λύση

$3 + 2i$ ρίζα της εξίσωσης $\Leftrightarrow 2(3 + 2i)^2 + \beta(3 + 2i) + \gamma = 0$

$2(9 + 12i - 4) + 3\beta + 2\beta i + \gamma = 0$

$10 + 24i + 3\beta + 2\beta i + \gamma = 0$

$(10 + 3\beta + \gamma) + (24 + 2\beta)I = 0$

$10 + 3\beta + \gamma = 0$ και $24 + 2\beta = 0$

$10 + 3\beta + \gamma = 0$ και $\beta = -12$

$10 - 3 \cdot 12 + \gamma = 0$ και $\beta = -12$

$\gamma = 26$ και $\beta = -12$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.

Αν α, β, γ και δ είναι πραγματικοί αριθμοί, να εξετάσετε πότε το πηλίκο $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$ είναι πραγματικός αριθμός.

Λύση

Είναι $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i} = \frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)} = \frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}$

$= \frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)}{\gamma^2+\delta^2} + \frac{(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}$

Άρα, $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2} = 0 \Leftrightarrow \beta\gamma - \alpha\delta = 0$

2.

Αν $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $\frac{1}{z^2-z}$

Λύση

$z^2 = \frac{1}{4}(1-i\sqrt{3})^2 = \frac{1}{4}(1-2i\sqrt{3}-3) = \frac{1}{4}(-2-2i\sqrt{3}) = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

$z^2 - z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} - \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1-i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}}{2} = -1$

$\frac{1}{z^2-z} = \frac{1}{-1} = -1$

3.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $(1+i)^{20} - (1-i)^{20}$

Λύση

$(1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i \Rightarrow (1+i)^{20} = (2i)^{10} = 2^{10}\ i^{10} = 2^{10}\ i^2 = -2^{10}$

$(1-i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i \Rightarrow (1-i)^{20} = (-2i)^{10} = 2^{10}\ i^{10} = 2^{10}\ i^2 = -2^{10}$

Άρα $(1+i)^{20} - (1-i)^{20} = 0$

4.

Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει η παράσταση $i^{\nu} + i^{-\nu}$;

Λύση

Είναι $\nu = 4\kappa + \upsilon$ με $\upsilon = 0, 1, 2, 3$

- Όταν $\upsilon = 0$, δηλαδή $\nu = 4\kappa$, τότε $i^{\nu} = i^{0} = 1$.
  Οπότε $i^{\nu} + i^{-\nu} = 1 + \frac{1}{1} = 2$
- Όταν $\upsilon = 1$, δηλαδή $\nu = 4\kappa + 1$, τότε $i^{\nu} = i^{1} = i$.
  Οπότε $i^{\nu} + i^{-\nu} = i + \frac{1}{i} = i + \frac{i}{i^2} = i - i = 0$
- Όταν $\upsilon = 2$, δηλαδή $\nu = 4\kappa + 2$, τότε $i^{\nu} = i^{2} = -1$.
  Οπότε $i^{\nu} + i^{-\nu} = -1 + \frac{1}{-1} = -1 - 1 = -2$
- Όταν $\upsilon = 3$, δηλαδή $\nu = 4\kappa + 3$, τότε $i^{\nu} = i^{3} = -i$.
  Οπότε $i^{\nu} + i^{-\nu} = -i + \frac{1}{-i} = -i + \frac{-i}{i^2} = -i + i = 0$.

Επομένως, η παράσταση μπορεί να πάρει τρεις διαφορετικές τιμές

5.α)

Να λύσετε την εξίσωση $\bar{z} = z^2$

Λύση

Έστω $z = x + yi$.

$$\bar{z} = z^2 \Leftrightarrow x - yi = (x + yi)^2$$
$$x - yi = x^2 + 2xyi - y^2$$
$$(x - x^2 + y^2) - (y + 2xy)i = 0$$
$$x - x^2 + y^2 = 0 \quad \text{και} \quad y + 2xy = 0$$
$$x - x^2 + y^2 = 0 \quad \text{και} \quad y(1 + 2x) = 0$$
$$x - x^2 + y^2 = 0 \ \ \mathbf{(1)} \quad \text{και} \quad (y = 0 \ \ \text{ή} \ \ 1 + 2x = 0)$$

- Για $y = 0$, η (1) γίνεται $x - x^2 = 0$
  $x(1 - x) = 0$
  $x = 0$ ή $x = 1$
  Επομένως $z = 0 + 0i = 0$ ή $z = 1 + 0i = 1$
- Για $1 + 2x = 0$ δηλαδή $2x = -1$ δηλαδή $x = -\frac{1}{2}$, η (1) γίνεται
  $$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$
  Επομένως $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

5.β)

Να λύσετε την εξίσωση $\overline{z} = z^3$

Λύση

Έστω $z = x + yi$.

$\overline{z} = z^3 \Leftrightarrow x - yi = (x + yi)^3$

$x - yi = x^3 + 3x^2 yi + 3x(yi)^2 + (yi)^3$

$x - yi = x^3 + 3x^2 yi - 3xy^2 - y^3 i$

$(x - x^3 + 3xy^2) + (-y - 3x^2 y + y^3) = 0$

$x - x^3 + 3xy^2 = 0 \quad$ και $\quad -y - 3x^2 y + y^3 = 0$

$x(1 - x^2 + 3y^2) = 0 \quad$ και $\quad y(y^2 - 3x^2 - 1) = 0$

$(x = 0 \quad$ ή $\quad 1 - x^2 + 3y^2 = 0) \quad$ και $\quad (y = 0 \quad$ ή $\quad y^2 - 3x^2 - 1 = 0)$

- Όταν $x = 0$ και $y = 0$, τότε $z = 0 + 0i = 0$

- Όταν $x = 0$ και $y^2 - 3x^2 - 1 = 0$

  $x = 0$ και $y^2 - 1 = 0$

  $x = 0$ και $y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ και $y = \pm 1$

  Επομένως $z = 0 \pm 1i = \pm i$

- Όταν $1 - x^2 + 3y^2 = 0$ και $y = 0$

  $1 - x^2 = 0$ και $y = 0$

  $x^2 = 1$ και $y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$ και $y = 0$

  Επομένως $z = \pm 1 + 0i = \pm 1$

- Όταν $1 - x^2 + 3y^2 = 0$ και $y^2 - 3x^2 - 1 = 0$

  $1 - x^2 + 3y^2 = 0$ και $y^2 = 3x^2 + 1$

  $1 - x^2 + 3(3x^2 + 1) = 0$ και $y^2 = 3x^2 + 1$

  $1 - x^2 + 9x^2 + 3 = 0$ και $y^2 = 3x^2 + 1$

  $8x^2 + 4 = 0$ αδύνατη διότι $x \in \mathbb{R}$

6.

Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq 0$. Να δείξετε ότι ο $\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}$ είναι πραγματικός

και ότι $-2 \leq \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} \leq 2$.

Λύση

Έστω $z = x + yi$

$$\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} = \frac{x+yi}{x-yi} + \frac{x-yi}{x+yi} = \frac{(x+yi)^2 + (x-yi)^2}{(x-yi)(x+yi)}$$

$$= \frac{x^2 + 2xyi - y^2 + x^2 - 2xyi - y^2}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2y^2}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{2(x^2 - y^2)}{x^2+y^2} \in \mathbb{R}$$

$$-2 \leq \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} \leq 2. \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq \frac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \leq 2$$

$$-1 \leq \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

$$-x^2 - y^2 \leq x^2 - y^2 \leq x^2 + y^2$$

$$-x^2 - y^2 \leq x^2 - y^2 \quad \text{και} \quad x^2 - y^2 \leq x^2 + y^2$$

$$0 \leq 2x^2 \quad \text{και} \quad 0 \leq 2y^2 \quad \text{που ισχύουν}$$

7.

Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta i)^{10} + (\beta - \alpha i)^{10} = 0$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Λύση

$(\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta i - \beta^2$ **(1)**

$(\beta - \alpha i)^2 = \beta^2 - 2\beta\alpha i - \alpha^2$ **(2)**

Από τις (1), (2) $\Rightarrow$ $(\alpha + \beta i)^2 = -(\beta - \alpha i)^2$

$$[(\alpha + \beta i)^2]^5 = -[(\beta - \alpha i)^2]^5$$

$$(\alpha + \beta i)^{10} = -(\beta - \alpha i)^{10}$$

$$(\alpha + \beta i)^{10} + (\beta - \alpha i)^{10} = 0$$

8.

α) Για ένα μιγαδικό z να αποδείξετε ότι :

- Ο z είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $z = \overline{z}$
- Ο z είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $z = -\overline{z}$

β) Αν $\overline{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}$ και $\overline{z}_2 = \dfrac{1}{z_2}$ και $z_1 . z_2 \neq -1$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$u = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ είναι πραγματικός, ενώ ο αριθμός $v = \dfrac{z_1 - z_2}{1 + z_1 z_2}$ είναι φανταστικός.

Λύση

Έστω $z = x + yi$

α)

- $z = \overline{z} \Leftrightarrow x + yi = x - yi$
  $2yi = 0$
  $y = 0 \Leftrightarrow z = x$ πραγματικός

- $z = -\overline{z} \Leftrightarrow x + yi = -(x - yi)$
  $x + yi = -x + yi$
  $2x = 0$
  $x = 0 \Leftrightarrow z = yi$ φανταστικός

β)

$$\overline{u} = \overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1 + \overline{z}_2}{1 + \overline{z}_1 \overline{z}_2}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}}{1 + \dfrac{1}{z_1} \cdot \dfrac{1}{z_2}}$$

$$= \frac{\dfrac{z_2 + z_1}{z_1 z_2}}{\dfrac{z_1 z_2 + 1}{z_1 z_2}} = \frac{z_2 + z_1}{z_1 z_2 + 1} = u \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} u \text{ πραγματικός.}$$

$$\overline{v} = \overline{\left(\frac{z_1 - z_2}{1 + z_1 z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1 - \overline{z}_2}{1 + \overline{z}_1 \overline{z}_2}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{z_1} - \dfrac{1}{z_2}}{1 + \dfrac{1}{z_1} \cdot \dfrac{1}{z_2}}$$

$$= \frac{\dfrac{z_2 - z_1}{z_1 z_2}}{\dfrac{z_1 z_2 + 1}{z_1 z_2}}$$

$$= \frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2 + 1} = -\frac{z_1 - z_2}{1 + z_1 z_2} = -v \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} v \text{ φανταστικός.}$$

9. α)
Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $\quad \text{Re}\left(z+\frac{1}{z}\right) = 5\,\text{Re}(z)$

Λύση
Περιορισμός : $z \neq 0$

Έστω $z = x + yi$, τότε $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$

$$z + \frac{1}{z} = x + yi + \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$$

Άρα $\text{Re}\left(z+\frac{1}{z}\right) = x + \frac{x}{x^2+y^2}$

$$\text{Re}\left(z+\frac{1}{z}\right) = 5\,\text{Re}(z) \Leftrightarrow x + \frac{x}{x^2+y^2} = 5x$$

$$\frac{x}{x^2+y^2} = 4x$$

$$\frac{x}{x^2+y^2} - 4x = 0$$

$$x\left(\frac{1}{x^2+y^2} - 4\right) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{x^2+y^2} - 4 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{x^2+y^2} = 4$$

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι ο άξονας $y'y$ εκτός της αρχής O, μαζί με τον κύκλο που έχει κέντρο το O και ακτίνα $\frac{1}{2}$.

9. β)

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $\text{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right) = -3\,\text{Im}(z)$

Λύση

Περιορισμός : $z \neq 0$

Έστω $z = x + yi$, τότε $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$

$$z + \frac{1}{z} = x + yi + \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$$

Άρα $\text{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right) = y - \frac{y}{x^2+y^2}$

$$\text{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right) = -3\,\text{Im}(z) \Leftrightarrow y - \frac{y}{x^2+y^2} = -3y$$

$$4y - \frac{y}{x^2+y^2} = 0$$

$$y\left(4 - \frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$$

$$y = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{x^2+y^2} - 4 = 0$$

$$y = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{x^2+y^2} = 4$$

$$y = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι ο άξονας $x'x$ εκτός της αρχής O, μαζί με τον κύκλο που έχει κέντρο το O και ακτίνα $\frac{1}{2}$.