2.2
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 69 – 70

Α΄ Ομάδας

1.
Να αποδείξτε ότι, για κάθε πραγματική τιμή του μ η εξίσωση $(\mu-1)x+\mu y+\mu^2=0$ παριστάνει ευθεία γραμμή. Πότε η ευθεία αυτή είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, πότε προς τον $y'y$ και πότε διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

Λύση
Η δοσμένη εξίσωση είναι της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$.

Ένας τουλάχιστον από τους $\mu-1$, μ είναι $\neq 0$, διότι:
αν ήσαν $\mu-1=0$ και $\mu=0$, θα ήταν $\mu=1$ και $\mu=0$, που είναι άτοπο.

Άρα η δοσμένη εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή ε.

$\varepsilon \parallel x'x \Leftrightarrow \mu-1=0 \Leftrightarrow \mu=1$

$\varepsilon \parallel y'y \Leftrightarrow \mu=0$

ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων $\Leftrightarrow \mu^2=0 \Leftrightarrow \mu=0$

2.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-2, 3)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $2x - 3y + 6 = 0$. Ποιο είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών;

Λύση

Έστω **ε** : $2x - 3y + 6 = 0$ η δοσμένη ευθεία και **η** η ζητούμενη.

$$\lambda_\varepsilon = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$\eta \perp \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lambda_\eta = -\frac{3}{2}$$

$$\eta: \quad y - 3 = -\frac{3}{2}(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad 2y - 6 = -3x - 6 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 2y = 0$$

Σημείο τομής των ε, η :

$$\begin{cases} 2x-3y+6=0 \\ 3x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+6=0 \\ y=-\frac{3}{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-3\left(-\frac{3}{2}x\right)+6=0 \\ y=-\frac{3}{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+\frac{9}{2}x+6=0 \\ y=-\frac{3}{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13x+12=0 \\ y=-\frac{3}{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-\frac{12}{13} \\ y=-\frac{3}{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-\frac{12}{13} \\ y=-\frac{3}{2}\left(-\frac{12}{13}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{12}{13} \\ y=\frac{18}{13} \end{cases}$$

3.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $2x - 5y + 3 = 0$ και $x - 3y - 7 = 0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $4x + y = 1$.

Λύση

Σημείο τομής : $\begin{cases} 2x-5y+3=0 \\ x-3y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5y=-3 \\ x-3y=7 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 5 = -1$

$D_x = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 9 + 35 = 44$ $\qquad D_y = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14 + 3 = 17$

$x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{44}{-1} = -44$ $\qquad y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{17}{-1} = -17$ $\qquad K(-44, -17)$

Η τρίτη ευθεία έχει $\lambda = -\dfrac{A}{B} = -4$, άρα η ζητούμενη κάθετή της θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\dfrac{1}{4}$.

Η εξίσωσή της θα είναι

$y + 17 = \dfrac{1}{4}(x + 44) \Leftrightarrow 4y + 68 = x + 44 \Leftrightarrow -x + 4y + 24 = 0$

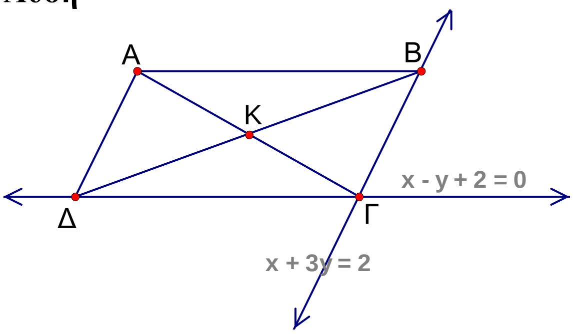
4.

Τα σημεία $A(-4, 6)$ και $\Gamma(-1, 1)$ είναι οι απέναντι κορυφές ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Οι πλευρές ΒΓ και ΓΔ του παραλληλογράμμου ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις $x + 3y = 2$ και $x - y + 2 = 0$ αντιστοίχως.
Να υπολογίσετε :

i) Τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.

ii) Το συνημίτονο της οξείας γωνίας των διαγωνίων του παραλληλογράμμου.

Λύση



(i)

$A\Delta \parallel B\Gamma \;\Rightarrow\; \lambda_{A\Delta} = \lambda_{B\Gamma} = -\frac{1}{3}$

$A\Delta: \quad y - 6 = -\frac{1}{3}(x + 4) \;\Leftrightarrow$

$3y - 18 = -x - 4 \;\Leftrightarrow$

$\mathbf{x + 3y = 14}$

Οι συντεταγμένες του Δ θα είναι η λύση του συστήματος

$\begin{cases} x+3y=14 \\ x-y=-2 \end{cases}$ των εξισώσεων των ευθειών ΑΔ και ΔΓ

$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4,$

$D_x = \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -14 + 6 = -8, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 14 = -16$

$x = \frac{D_x}{D} = 2, \qquad y = \frac{D_y}{D} = 4 \qquad$ Άρα $\mathbf{\Delta(2, 4)}$

(ii)

$\lambda_{\overrightarrow{A\Gamma}} = \frac{1-6}{-1+4} = -\frac{5}{3} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{A\Gamma} \parallel \vec{\delta}_1 = (3, -5)$

Το σημείο τομής Κ των διαγωνίων είναι μέσο της ΑΓ.

Άρα $K\left(\frac{-4-1}{2}, \frac{1+6}{2}\right), \qquad K\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

$\lambda_{\overrightarrow{\Delta B}} = \lambda_{\overrightarrow{\Delta K}} = \frac{\frac{7}{2} - 4}{-\frac{5}{2} - 2} = \frac{7-8}{-5-4} = \frac{1}{9} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{\Delta B} \parallel \vec{\delta}_2 = (9, 1)$

$\text{συν}(\vec{\delta}_1 \,\hat{}\, \vec{\delta}_2) = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1|\,|\vec{\delta}_2|} = \frac{3\cdot 9 - 5\cdot 1}{\sqrt{3^2+5^2}\sqrt{9^2+1^2}} = \frac{22}{\sqrt{9+25}\sqrt{81+1}} = \frac{22}{\sqrt{24}\sqrt{82}}$

5.

Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες $(\lambda - 1)x + \lambda y + 8 = 0$ και $\lambda x + 3y + 1 - 2\lambda = 0$ να είναι κάθετες.

Λύση

Η πρώτη ευθεία είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}_1 = (B, -A) = (\lambda, 1 - \lambda)$ και

η δεύτερη είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}_2 = (B, -A) = (3, -\lambda)$

Οι δύο ευθείες είναι κάθετες τότε και μόνο τότε όταν

$$\vec{\delta}_1 \perp \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2 = 0$$

$$3\lambda - \lambda(1 - \lambda) = 0$$

$$3\lambda - \lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = -2$$

6.

Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $3x + 3y + \kappa = 0$ να διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $3x + 4y + 6 = 0$ και $6x + 5y - 9 = 0$.

Λύση

Για το σημείο τομής, λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} 3x+4y=-6 \\ 6x+5y=9 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 24 = -9$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = -30 - 36 = -66 \qquad D_y = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 27 + 36 = 63$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{66}{9} = \frac{22}{3}, \qquad y = \frac{D_y}{D} = -\frac{63}{9} = -7$$

Η ευθεία $3x + 3y + \kappa = 0$ διέρχεται από το σημείο $\left(\frac{22}{3}, -7\right) \Leftrightarrow$

$$3 \cdot \frac{22}{3} + 3\,(-7) + \kappa = 0$$

$$22 - 21 + \kappa = 0$$

$$\kappa = -1$$

Β΄ Ομάδας

1.

Να σχεδιάσετε τις γραμμές τις οποίες παριστάνουν οι εξισώσεις

i) $x^2 - y^2 + 4y - 4 = 0$ **ii)** $x^2 - y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$

Λύση

i)

Η εξίσωση γράφεται

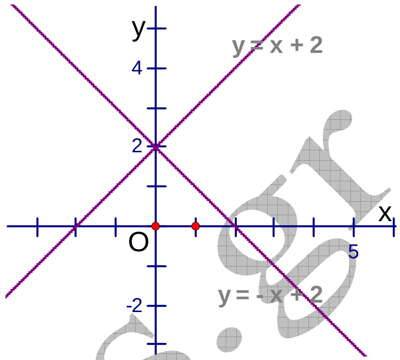
$y^2 - 4y + (4 - x^2) = 0$ (β–βάθμια ως προς y)

$\Delta = 16 - 4(4 - x^2) = 16 - 16 + 4x^2 = 4x^2 \geq 0$

$y = \dfrac{4 \pm 2x}{2} \Leftrightarrow$

$y = x + 2$ ή $y = -x + 2$

ευθείες κάθετες μεταξύ τους



ii)

Η εξίσωση γράφεται

$y^2 - 2y + (-x^2 + 4x - 3) = 0$ (β-βάθμια ως προς y)

$\Delta = 4 - 4(-x^2 + 4x - 3) = 4(1 + x^2 - 4x + 3)$

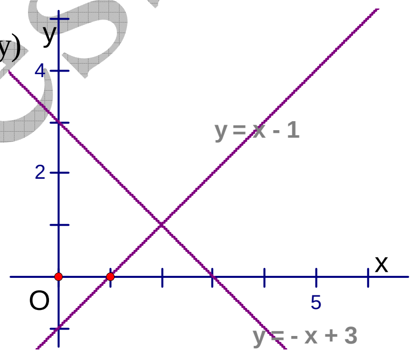
$= 4(x^2 - 4x + 4) = 4(x-2)^2$

$y = \dfrac{2 \pm 2(x-2)}{2} \Leftrightarrow$

$y = 1 + x - 2$ ή $y = 1 - x + 2 \Leftrightarrow$

$y = x - 1$ ή $y = -x + 3$

ευθείες κάθετες μεταξύ τους



2.

Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της μορφής

$(2α^2 + α + 3)x + (α^2 – α + 1)y + (3α + 1) = 0, \quad α \in \mathbb{R}$,

διέρχονται από το ίδιο σημείο

Λύση

Για $α = 0$, έχουμε τη συγκεκριμένη ευθεία $ε_1$: $3x + y + 1 = 0$

Για $α = 1$, έχουμε τη συγκεκριμένη ευθεία $ε_2$: $(2 +1 + 3)x + (1 –1 + 1)y +3 +1= 0$

$6x + y + 4 = 0$

Βρίσκουμε το σημείο τομής Κ των $ε_1$, $ε_2$ λύνοντας το σύστημά τους

$ε_1 \Leftrightarrow y = –3x – 1$

$ε_2 \Leftrightarrow 6x –3x – 1 + 4 = 0 \Leftrightarrow 3x = –3 \Leftrightarrow x = –1$

$y = –3x – 1 \Leftrightarrow y = –3(–1) – 1 \Leftrightarrow y = 2$ Άρα Κ(–1, 2)

Θα αποδείξουμε ότι, για κάθε $α \in \mathbb{R}$, η δοσμένη εξίσωση επαληθεύεται από το Κ(–1, 2), οπότε όλες οι ευθείες, που παριστάνει, θα διέρχονται από το Κ.

$(2α^2 + α + 3)(–1) + (α^2 – α + 1)2 + (3α + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$–2α^2 – α – 3 + 2α^2 –2α + 2 + 3α + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

3.

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $x + 4y = 5$, $3x – 2y = 1$ και $7x – 8y + 1 = 0$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

Βρίσκουμε το σημείο τομής Κ των δύο πρώτων λύνοντας το σύστημά τους

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = – 2 – 12 = – 14$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = – 10 – 4 = – 14 \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 – 15 = – 14$$

$$x = \frac{D_x}{D} = 1, \qquad y = \frac{D_y}{D} = 1$$ Άρα Κ(1, 1)

Για να διέρχεται η τρίτη ευθεία από το Κ(1, 1), αρκεί να επαληθεύεται από αυτό.

$7·1 – 8·1 + 1 = 0$

$7 – 8 + 1 = 0$

$0 = 0.$

4.

Να βρείτε την οξεία γωνία την οποία σχηματίζουν οι ευθείες $y = \mu x$ και $(1 + \mu)x = (1 - \mu)y$.

Λύση

Έστω $\varepsilon_1: \ \mu x - y = 0$ και $\varepsilon_2: \ (1 + \mu)x - (1 - \mu)y = 0$ οι δοσμένες ευθείες.

Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\delta}_1 = (1, \mu) \parallel \varepsilon_1$ και το $\vec{\delta}_2 = (1 - \mu, 1 + \mu) \parallel \varepsilon_2$.

$$\text{Συν}(\vec{\delta}_1 \,\hat{}\, \vec{\delta}_2) = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1||\vec{\delta}_2|} = \frac{1-\mu+\mu(1+\mu)}{\sqrt{1+\mu^2}\sqrt{(1-\mu)^2+(1+\mu)^2}}$$

$$= \frac{1-\mu+\mu+\mu^2}{\sqrt{1+\mu^2}\sqrt{1-2\mu+\mu^2+1+2\mu+\mu^2}}$$

$$= \frac{1+\mu^2}{\sqrt{1+\mu^2}\sqrt{2+2\mu^2}} = \frac{1+\mu^2}{\sqrt{1+\mu^2}\sqrt{2}\sqrt{1+\mu^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Άρα η ζητούμενη γωνία είναι 45°.

5.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο τομής των ευθειών $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$ και $\frac{x}{\beta} + \frac{y}{\alpha} = 1$, με $\alpha, \ \beta \neq 0$ και $\alpha \neq \pm\beta$.

Λύση

Έστω $\varepsilon_1: \ \beta x + \alpha y = \alpha\beta$ και $\varepsilon_2: \ \alpha x + \beta y = \alpha\beta$ οι δοσμένες ευθείες.

Λύνουμε το σύστημά τους, για να βρούμε το σημείο τομής τους K

$$D = \begin{vmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta^2 - \alpha^2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \alpha\beta & \alpha \\ \alpha\beta & \beta \end{vmatrix} = \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta = \alpha\beta(\beta - \alpha) \neq 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta \\ \alpha & \alpha\beta \end{vmatrix} = \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta = \alpha\beta(\beta - \alpha) \neq 0$$

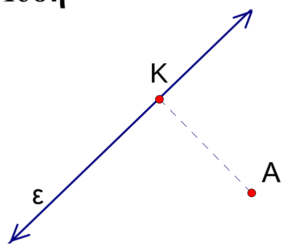
$$x_K = \frac{D_x}{D} = \frac{\alpha\beta}{\beta+\alpha} \quad \text{και} \quad y_K = \frac{D_y}{D} = \frac{\alpha\beta}{\beta+\alpha}$$

Επειδή $x_K = y_K$, η ζητούμενη ευθεία θα είναι η $y = x$

6.

Δίνεται η ευθεία $3x + y = 3$ και το σημείο $A(1, 2)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες της προβολής του A στην ευθεία αυτή.

Λύση



$AK \perp ε$, οπότε K είναι η προβολή του A στη δοσμένη ευθεία $ε$.

$λ_ε = -3$ άρα $λ_{AK} = \frac{1}{3}$

AK: $y - 2 = \frac{1}{3}(x - 1)$

$3y - 6 = x - 1$

$x - 3y = -5$

Σύστημα των $ε$ και AK

$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 1 = -10$

$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 5 = -4$, $\quad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 3 = -18$

$x_K = \frac{D_x}{D} = \frac{2}{5}$, $\quad y_K = \frac{D_y}{D} = \frac{9}{5}$ άρα

$K(\frac{2}{5}, \frac{9}{5})$

7.

Δίνεται η ευθεία $ε: \frac{x}{α} + \frac{y}{β} = 1$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία είναι κάθετη στην $ε$ στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$.

Λύση

Για $y = 0$, η $ε$ δίνει $\frac{x}{α} = 1 \Rightarrow x = α$, άρα τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $K(α, 0)$

Είναι $λ_ε = -\frac{β}{α}$, άρα η ζητούμενη θα έχει $λ = \frac{α}{β}$ και εξίσωση

$y - 0 = \frac{α}{β}(x - α) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{α}{β}x - \frac{α^2}{β}$