2.1
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 64 – 65

Α΄ Ομάδας

1.
Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης :
i) Της ευθείας, η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 4)$ και $B(1, 6)$
ii) Της ευθείας, η οποία τέμνει τους άξονες στα σημεία $\Gamma(-1, 0)$ και $\Delta(0, 2)$
iii) Της ευθείας, η οποία διέρχεται από το O και είναι κάθετη στη $\Gamma\Delta$.

Λύση

i) $\lambda_{AB} = \dfrac{6-4}{1-(-1)} = \dfrac{2}{2} = 1$

ii) $\lambda_{\Gamma\Delta} = \dfrac{2-0}{0-(-1)} = 2$

iii) $\varepsilon \perp \Gamma\Delta \;\Leftrightarrow\; \lambda_\varepsilon \lambda_{\Gamma\Delta} = -1 \;\Leftrightarrow\; \lambda_\varepsilon \cdot 2 = -1 \;\Leftrightarrow\; \lambda_\varepsilon = -\dfrac{1}{2}$

2.
Να βρείτε τη γωνία, που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ οι ευθείες που διέρχονται από τα σημεία :
i) $A(-1, 4)$ και $B(1, 6)$
ii) $A(-1, 3)$ και $B(0, 4)$
iii) $A(1, 3)$ και $B(1, -1)$
iv) $A(2, 3)$ και $B(-2, 3)$

Λύση

Έστω ω η ζητούμενη γωνία

i) $\varepsilon\varphi\omega = \lambda_{AB} = \dfrac{6-4}{1-(-1)} = \dfrac{2}{2} = 1 \;\Rightarrow\; \omega = 45^o$

ii) $\varepsilon\varphi\omega = \lambda_{AB} = \dfrac{4-3}{0-(-1)} = \dfrac{1}{1} = 1 \;\Rightarrow\; \omega = 45^o$

iii) $x_A = x_B \;\Rightarrow\; AB \perp x'x \;\Rightarrow\; \omega = 90^o$

iv) $\varepsilon\varphi\omega = \lambda_{AB} = \dfrac{3-3}{-2-(-2)} = 0 \;\Rightarrow\; \omega = 0^o$

3.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1, -1)$ και

i) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (3, -2)$

ii) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (0, 1)$

iii) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{\pi}{4}$.

Λύση

Έστω ε η ζητούμενη ευθεία

i) $\varepsilon \parallel \vec{\delta} \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = \lambda_{\vec{\delta}} = \frac{-2}{3}$

$$\varepsilon: \ y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow y - (-1) = -\frac{2}{3}(x - 1)$$

$$y + 1 = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} - 1 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

ii)

Επειδή $x_{\vec{\delta}} = 0$, είναι $\vec{\delta} \parallel y'y$ (το $\vec{\delta}$ δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης), άρα και $\varepsilon \parallel y'y$ και αφού διέρχεται από το σημείο $A(1, -1)$, θα έχει εξίσωση $x = 1$

iii)

$\omega = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = 1$

$$\varepsilon: \ y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow y - (-1) = 1\cdot(x - 1)$$

$$y + 1 = x - 1 \Leftrightarrow y = x - 2$$

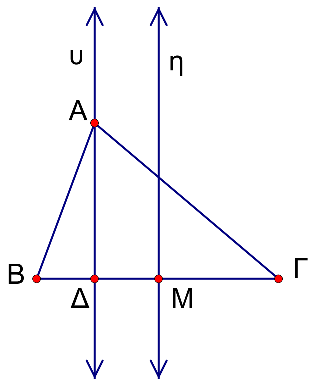
4.

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(–1, 0), Β(3, 2) και Γ(–3, 4). Να βρείτε :

i) Τις εξισώσεις των υψών του

ii) Τις εξισώσεις των μεσοκαθέτων των πλευρών του.

Λύση



i)

$$\lambda_{ΒΓ} = \frac{y_Γ - y_Β}{x_Γ - x_Β} = \frac{4-2}{-3-3} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

$$ΑΔ \perp ΒΓ \Leftrightarrow \lambda_{ΑΔ} . \lambda_{ΒΓ} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{ΑΔ} = 3$$

$$ΑΔ: \quad y - y_Α = 3\,(x - x_Α) \Leftrightarrow$$
$$y - 0 = 3\,(x + 1)$$
$$y = 3x + 3$$

Ομοίως βρίσκουμε τις εξισώσεις των άλλων δύο υψών.

ii)

Μ μέσο του ΒΓ $\quad x_Μ = \frac{1}{2}(x_Γ + x_Β)$ και $y_Μ = \frac{1}{2}(y_Γ + y_Β) \Leftrightarrow$

$x_Μ = \frac{1}{2}(-3 + 3)$ και $y_Μ = \frac{1}{2}(4 + 2) \Leftrightarrow$

$x_Μ = 0$ και $y_Μ = 3$

Μεσοκάθετος $η \parallel ΑΔ \Leftrightarrow \lambda_η = 3$

$η: \quad y - y_Μ = 3(x - x_Μ) \Leftrightarrow y - 3 = 3(x - 0) \Leftrightarrow y = 3x + 3$

Ομοίως βρίσκουμε τις εξισώσεις των άλλων δύο μεσοκαθέτων.

5.
Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφές Α(3, 1), Β(5, 5), Γ(1, 3) και Δ(–1, –1) είναι ρόμβος. Ποιες είναι οι εξισώσεις των διαγωνίων του;

Λύση

$(AB)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$
$= (5-3)^2 + (5-1)^2$
$= 4 + 16 = 20 \Rightarrow (AB) = \sqrt{20}$ και ομοίως $(B\Gamma) = (\Gamma\Delta) = (\Delta A) = \sqrt{20}$

Άρα το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

$A\Gamma: \quad y - y_A = \dfrac{y_\Gamma - y_A}{x_\Gamma - x_A}(x - x_A) \Leftrightarrow y - 1 = \dfrac{3-1}{1-3}(x-3)$

$y - 1 = -1\,(x-3)$

$y - 1 = -x + 3 \Leftrightarrow y = -x + 4$

Ομοίως βρίσκουμε $B\Delta: \; y = x$

6.
Να δείξετε ότι τα σημεία Α(1, –1), Β(2, 0) και Γ(–1, –3) είναι συνευθειακά.
Λύση

$\lambda_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0+1}{2-1} = 1$

$\lambda_{B\Gamma} = \dfrac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} = \dfrac{-3-0}{-1-2} = 1.$

Άρα $\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Rightarrow AB \parallel B\Gamma$ και επειδή έχουν κοινό σημείο το Β, η ΑΒΓ θα είναι ευθεία.

7.
Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε, που διέρχεται από τα σημεία Α(συνθ, ημθ) και Β(ημθ, συνθ), αν $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ και $\theta \neq \frac{\pi}{4}$. Για ποια τιμή του θ η ευθεία αυτή διέρχεται από την αρχή των αξόνων;
Λύση

$AB: \quad y - y_A = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) \Leftrightarrow y - \eta\mu\theta = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta}{\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta}(x - \sigma\upsilon\nu\theta)$

$y - \eta\mu\theta = -1\,(x - \sigma\upsilon\nu\theta)$

$y = -x + \sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta$

Η ευθεία αυτή διέρχεται από την αρχή των αξόνων $\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta = 0$

$\eta\mu\theta = -\,\sigma\upsilon\nu\theta$

$\dfrac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = -1$

$\varepsilon\varphi\theta = -1 \Leftrightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{4}$

8.

Δίνονται τα σημεία $A(2, 3)$, $B(-4, 5)$ και $\Gamma(3, -4)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, που διέρχεται από την κορυφή Α και το κέντρο βάρους G του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ : $x_M = \frac{1}{2}(x_\Gamma + x_B)$ και $y_M = \frac{1}{2}(y_\Gamma + y_B)$ $\Leftrightarrow$

$$x_M = \frac{1}{2}(3-4) \quad \text{και} \quad y_M = \frac{1}{2}(-4+5)$$

$$x_M = -\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad y_M = \frac{1}{2}$$

Η ευθεία AG συμπίπτει με την ευθεία ΑΜ

$$AM: \quad y - y_A = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}(x - x_A) \quad \Leftrightarrow \quad y - 3 = \frac{\frac{1}{2} - 3}{-\frac{1}{2} - 2}(x - 2)$$

$$y - 3 = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{5}{2}}(x - 2)$$

$$y - 3 = x - 2$$

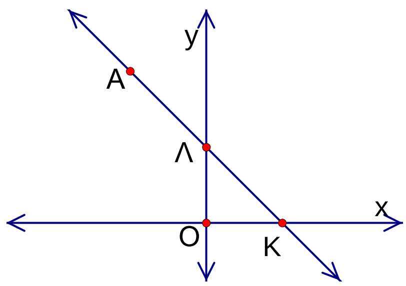
$$y = x + 1$$

Β΄ Ομάδας

1.

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών, που διέρχονται από το σημείο Α(–1, 2) και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

Λύση



Έστω ΑΛΚ ζητούμενη ευθεία.

Αφού διέρχεται από το Α, θα έχει εξίσωση

$y - 2 = \lambda(x + 1) \quad \Leftrightarrow$

$y = \lambda x + \lambda + 2 \qquad$ **(1)**

Περιορισμός :

Για να ορίζεται τρίγωνο ΟΚΛ, θα πρέπει η ευθεία να τέμνει τους άξονες και μάλιστα σε διαφορετικά σημεία Κ, Λ, άρα θα πρέπει $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -2$

Συντεταγμένες του Κ :

Για $y_K = 0$, η (1) $\Rightarrow$ $0 - 2 = \lambda\, x_K + \lambda \Rightarrow \lambda x_K = -\lambda - 2 \Rightarrow x_K = -\dfrac{\lambda+2}{\lambda}$.

Συντεταγμένες του Λ **:**

Για $x_\Lambda = 0$, η (1) $\Rightarrow$ $y_\Lambda - 2 = \lambda(0 + 1) \Rightarrow y_\Lambda = \lambda + 2$

Τρίγωνο ΟΚΛ ισοσκελές $\Leftrightarrow$ (ΟΚ) = (ΟΛ)

$$|x_K| = |y_\Lambda|$$

$$\left|-\frac{\lambda+2}{\lambda}\right| = |\lambda+2|$$

$$\frac{|\lambda+2|}{|\lambda|} = |\lambda+2|$$

$$\frac{1}{|\lambda|} = 1$$

$$|\lambda| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$$

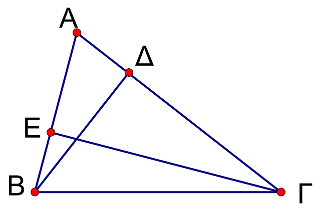
Άρα ζητούμενη ευθεία (1) είναι $y = 1x + 1 + 2$ ή $y = -1x - 1 + 2 \quad \Leftrightarrow$

$y = x + 3$ ή $y = -x + 1$

2.

Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών και τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ, του οποίου τα δύο ύψη έχουν εξισώσεις $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ και $y = -x + 2$ αντιστοίχως και η κορυφή Α έχει συντεταγμένες (1, 4)

Λύση



Διαπιστώνουμε ότι η κορυφή Α δεν επαληθεύει καμία από τις εξισώσεις των υψών.

Έστω, λοιπόν ΒΔ : $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ και

ΓΕ : $y = -x + 2$

$A\Gamma \perp B\Delta \iff \lambda_{A\Gamma} \cdot \lambda_{B\Delta} = -1 \iff \lambda_{A\Gamma} = -2$

ΑΓ : $y - 4 = -2(x - 1) \iff y = -2x + 2 + 4 \iff y = -2x + 6$

$AB \perp \Gamma E \iff \lambda_{AB} \cdot \lambda_{\Gamma E} = -1 \iff \lambda_{AB} = 1$

ΑΒ : $y - 4 = 1(x - 1) \iff y = x - 1 + 4 \iff y = x + 3$

Για τις συντεταγμένες του Β, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των ΑΒ, ΒΔ

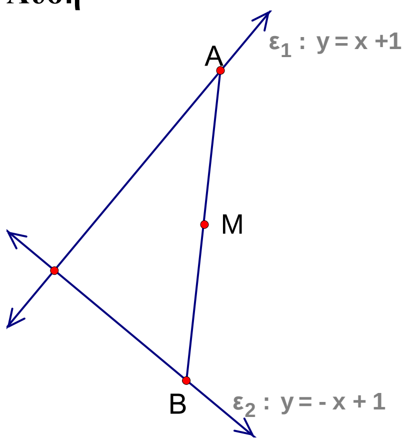
$$\begin{cases} y=x+3 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y=x+3 \\ x+3=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y=x+3 \\ 2x+6=x+3 \end{cases} \quad \begin{cases} y=x+3 \\ x=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=-3 \end{cases}$$

Για τις συντεταγμένες του Γ, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των ΑΓ, ΓΕ

$$\begin{cases} y=-2x+6 \\ y=-x+2 \end{cases} \quad \begin{cases} -x+2=-2x+6 \\ y=-x+2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$$

3.
Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Μ(2, 1) και τέμνει τις ευθείες $y = x + 1$ και $y = -x + 1$ στα σημεία Α και Β αντιστοίχως, έτσι ώστε το Μ να είναι μέσο του ΑΒ.

Λύση



Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$

$A \in \varepsilon_1 \Rightarrow y_1 = x_1 + 1$ **(1)**

$B \in \varepsilon_2 \Rightarrow y_2 = -x_2 + 1$ **(2)**

Μ μέσο του ΑΒ $\Rightarrow$

$2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ και $1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \Rightarrow$

$x_1 + x_2 = 4$ **(3)** και $y_1 + y_2 = 2$ **(4)**

Η (4), λόγω των (1), (2) γίνεται $x_1 + 1 - x_2 + 1 = 2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Η (3) γίνεται $2x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 2 = x_2$

Άρα η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση $x = 2$

4.

Δίνονται τα σημεία $P(\kappa, \frac{1}{\kappa})$ και $Q(\lambda, \frac{1}{\lambda})$, με $\kappa, \lambda \neq 0$ και $\kappa \neq \lambda$.

i) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας PQ.

ii) Αν η ευθεία PQ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B αντιστοίχως, να δείξετε ότι AP = BQ

Λύση

i)

$$\lambda_{PQ} = \frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\kappa}}{\lambda - \kappa} = \frac{\frac{\kappa - \lambda}{\lambda\kappa}}{\lambda - \kappa} = -\frac{1}{\lambda\kappa}$$

$$PQ: \quad y - \frac{1}{\kappa} = -\frac{1}{\lambda\kappa}(x - \kappa) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{\lambda\kappa}x + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\kappa} \quad \Leftrightarrow$$

$$y = -\frac{1}{\lambda\kappa}x + \frac{\kappa + \lambda}{\kappa\lambda} \qquad \textbf{(1)}$$

ii)

Για $y = 0$ η (1) $\Rightarrow$ $0 = -\frac{1}{\lambda\kappa}x + \frac{\kappa+\lambda}{\kappa\lambda}$. $\Rightarrow$ $x = \kappa + \lambda$. **Άρα A(κ + λ, 0)**

Για $x = 0$ η (1) $\Rightarrow$ $y = \frac{\kappa+\lambda}{\kappa\lambda}$. Άρα $B(0, \frac{\kappa+\lambda}{\kappa\lambda})$

$$AP = BQ \quad \Leftrightarrow \quad (AP)^2 = (BQ)^2$$

$$\left(\kappa - (\kappa + \lambda)\right)^2 + \left(\frac{1}{\kappa} - 0\right)^2 = (\lambda - 0)^2 + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\kappa+\lambda}{\kappa\lambda}\right)^2$$

$$\lambda^2 + \frac{1}{\kappa^2} = \lambda^2 + \left(\frac{\kappa - \kappa - \lambda}{\kappa\lambda}\right)^2$$

$$\lambda^2 + \frac{1}{\kappa^2} = \lambda^2 + \left(\frac{-\lambda}{\kappa\lambda}\right)^2$$

$$\lambda^2 + \frac{1}{\kappa^2} = \lambda^2 + \frac{1}{\kappa^2} \quad \text{που ισχύει}$$

5.

Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$, με $\alpha, \beta \neq 0$, είναι $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$.

Λύση

$$\lambda_{AB} = \frac{\beta - 0}{0 - \alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$AB: \quad y - 0 = -\frac{\beta}{\alpha}(x - \alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha y = -\beta x + \alpha\beta$$

$$\beta x + \alpha y = \alpha\beta$$

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$

6.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{3}$ και τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Α και Β, ώστε το άθροισμα της τετμημένης του Α και της τεταγμένης του Β να είναι ίσο με 15.

Λύση

Έστω $y = -\frac{2}{3}x + \beta$ **(1)** η ζητούμενη ευθεία.

Για $y = 0$ η (1) $\Rightarrow$ $0 = -\frac{2}{3}x + \beta$

$0 = -2x + 3\beta$

$x = \frac{3\beta}{2}$ Άρα $A\left(\frac{3\beta}{2},\ 0\right)$

Για $x = 0$ η (1) $\Rightarrow$ $y = \beta$. Άρα $B(0, \beta)$

$$\frac{3\beta}{2} + \beta = 15 \Leftrightarrow 3\beta + 2\beta = 30 \Leftrightarrow 5\beta = 30 \Leftrightarrow \beta = 6$$

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι $y = -\frac{2}{3}x + 6$.