Γενικές ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 50 – 51

1.

Αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ, μ με $|\kappa| + |\lambda| + |\mu| \neq 0$, τέτοια, ώστε

$$\kappa + \lambda + \mu = 0 \quad \text{και} \quad \kappa\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0},$$

να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά και αντίστροφα.

Λύση

Ευθύ

$|\kappa| + |\lambda| + |\mu| \neq 0 \Rightarrow$ ένας τουλάχιστον από τους κ, λ, μ είναι $\neq 0$. Έστω $\lambda \neq 0$.

$\kappa + \lambda + \mu = 0 \Rightarrow \kappa = -\lambda - \mu$

$$\begin{aligned}
\kappa\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad & (-\lambda-\mu)\,\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0}\\
& -\lambda\overrightarrow{OA} - \mu\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0}\\
& \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \mu(\overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA}) = \vec{0}\\
& \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0}\\
& \lambda\overrightarrow{AB} = -\mu\overrightarrow{A\Gamma}\\
& \overrightarrow{AB} = -\frac{\mu}{\lambda}\overrightarrow{A\Gamma}\\
& \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A\Gamma} \quad \Rightarrow \quad \text{Α, Β και Γ είναι συνευθειακά}
\end{aligned}$$

Αντίστροφο

$$\begin{aligned}
\text{Α, Β και Γ συνευθειακά} \quad \Rightarrow \quad & \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A\Gamma} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = \rho\overrightarrow{A\Gamma}\\
& \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \rho(\overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA})\\
& \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \rho\overrightarrow{O\Gamma} - \rho\overrightarrow{OA}\\
& \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} - \rho\overrightarrow{O\Gamma} + \rho\overrightarrow{OA} = \vec{0}\\
& (\rho-1)\,\overrightarrow{OA} + 1\,\overrightarrow{OB} + (-\rho)\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0} \qquad \textbf{(1)}
\end{aligned}$$

Θέτουμε $\rho - 1 = \kappa$, $1 = \lambda$, $-\rho = \mu$.
Τότε $\kappa + \lambda + \mu = \rho - 1 + 1 - \rho = 0$ και
(1) $\Rightarrow \kappa\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0}$

2.
Αν για το σημείο Μ του επιπέδου ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{BM} = \lambda\overrightarrow{A\Gamma} + \mu\overrightarrow{BA}$, να αποδείξετε ότι το Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

Λύση

Θεωρούμε σημείο αναφοράς το Α και $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\gamma}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{\omega}$

$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{A\Gamma} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} = \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma} \qquad$ **(1)**

$\overrightarrow{BM} = \lambda\overrightarrow{A\Gamma} + \mu\overrightarrow{BA} \quad \Rightarrow$

$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \lambda\vec{\gamma} + \mu(-\vec{\beta}) \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} - \vec{\beta} = \lambda\vec{\gamma} - \mu\vec{\beta} \quad \Rightarrow$

$\vec{\omega} = \vec{\beta} + \lambda\vec{\gamma} - \mu\vec{\beta} \qquad$ **(2)**

(1), (2) $\Rightarrow \quad \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma} = \vec{\beta} + \lambda\vec{\gamma} - \mu\vec{\beta}$

$\lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma} - \vec{\beta} - \lambda\vec{\gamma} + \mu\vec{\beta} = \vec{0}$

$(\lambda - 1 + \mu)\,\vec{\beta} + (\mu - \lambda)\,\vec{\gamma} = \vec{0}$ και επειδή τα $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι μη συγγραμμικά θα είναι

$\lambda - 1 + \mu = 0$ και $\mu - \lambda = 0$

$\lambda + \mu = 1$ και $\mu = \lambda$

$2\lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2} = \mu$

Η ισότητα $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{A\Gamma} \quad \Rightarrow$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma} \quad \Rightarrow$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}) \quad \Rightarrow$ Μ μέσο της πλευράς ΒΓ.

3.
Έστω Ο και Α δύο σταθερά σημεία του επιπέδου με $|\overrightarrow{OA}| = 3$. Ποια γραμμή γράφουν τα σημεία Μ του επιπέδου για τα οποία είναι $\overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OA}) = 7$;

Λύση

Θεωρούμε σημείο αναφοράς το Α.

$\overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OA}) = 7 \quad \Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AO})(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{AO}) = 7$

$(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AO})(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AO}) = 7$

$\overrightarrow{AM}^2 - \overrightarrow{AO}^2 = 7$

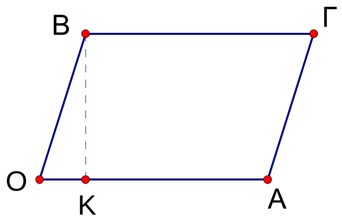
$(AM)^2 - 3^2 = 7$

$(AM)^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad (AM) = 4.$

Άρα το Μ γράφει κύκλο (Α, 4).

4.

Δίνονται δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
Αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}| = 1$,
να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΟΑΓΒ με $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ είναι μικρότερο ή ίσο του $|\vec{\beta}|$.



Λύση

$$|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}| = 1 \Rightarrow |\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}|^2 = 1$$
$$(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})^2 = 1$$
$$\vec{\alpha}^2 + 2\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + \lambda^2\vec{\beta}^2 = 1$$
$$|\vec{\beta}|^2\lambda^2 + 2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\lambda + |\vec{\alpha}|^2 - 1 = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Επειδή υπάρχει ο λ, η εξίσωση (1) έχει ρίζες, άρα

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 4(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2 - 4|\vec{\beta}|^2(|\vec{\alpha}|^2-1) \geq 0$$
$$(|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\,\sigma\upsilon\nu\hat{O})^2 - |\vec{\beta}|^2(|\vec{\alpha}|^2-1) \geq 0$$
$$|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2\sigma\upsilon\nu^2\hat{O} - |\vec{\beta}|^2(|\vec{\alpha}|^2-1) \geq 0$$
$$|\vec{\alpha}|^2\sigma\upsilon\nu^2\hat{O} - (|\vec{\alpha}|^2-1) \geq 0$$
$$|\vec{\alpha}|^2\sigma\upsilon\nu^2\hat{O} - |\vec{\alpha}|^2 + 1 \geq 0$$
$$1 \geq |\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\alpha}|^2\sigma\upsilon\nu^2\hat{O}$$
$$1 \geq |\vec{\alpha}|^2(1-\sigma\upsilon\nu^2\hat{O})$$
$$1 \geq |\vec{\alpha}|^2\eta\mu^2\hat{O} \Rightarrow (|\vec{\alpha}|\,\eta\mu\hat{O})^2 \leq 1 \Rightarrow \big||\vec{\alpha}|\eta\mu\hat{O}\big| \leq 1$$

$$(ΟΑΓΒ) = |\vec{\alpha}|\,(BK) = |\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\,\eta\mu\hat{O} = |\vec{\beta}|\,\big||\vec{\alpha}|\eta\mu\hat{O}\big| \leq |\vec{\beta}|\cdot 1 = |\vec{\beta}|$$

5.

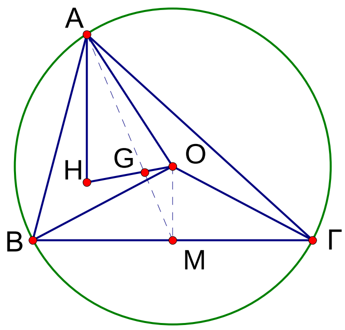
Έστω O το περίκεντρο τριγώνου ΑΒΓ (δηλαδή το σημείο για το οποίο ισχύει ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ), και έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ τα διανύσματα θέσεως των κορυφών Α, Β και Γ αντιστοίχως με σημείο αναφοράς το O.

(i) Να δείξετε ότι το σημείο Η με διάνυσμα θέσεως $\overrightarrow{OH} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

(ii) Να βρείτε το διάνυσμα θέσεως του βαρύκεντρου του τριγώνου ΑΒΓ με σημείο αναφοράς το O.

(iii) Να αποδείξετε ότι το περίκεντρο O, το βαρύκεντρο G και το ορθόκεντρο Η ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι συνευθειακά σημεία και ότι το G διαιρεί το τμήμα OH σε λόγο $\frac{1}{2}$.

Λύση



(i)

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = (\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB})$$
$$= (\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}-\vec{\alpha})\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\beta})$$
$$= (\vec{\beta}+\vec{\gamma})\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\beta})$$
$$= \vec{\gamma}^2-\vec{\beta}^2 = |\vec{\gamma}|^2-|\vec{\beta}|^2 = 0 \quad\Rightarrow$$
$$AH \perp B\Gamma$$

Ομοίως $BH \perp A\Gamma$

Άρα Η ορθόκεντρο

(ii)

Έστω Μ το μέσο της ΒΓ

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG} = \vec{\alpha}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$
$$= \vec{\alpha}+\frac{2}{3}\cdot(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA})$$
$$= \vec{\alpha}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}-\frac{2}{3}\vec{\alpha}$$
$$= \frac{1}{3}\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma})$$
$$= \frac{1}{3}\vec{\alpha}+\frac{1}{3}(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = \frac{1}{3}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma})$$

(iii)

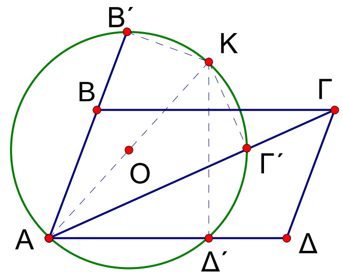
$$\overrightarrow{OH} = \vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}) \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$$

Άρα O, G, H συνευθειακά και $OH = 3OG \quad\Rightarrow$

$$GH = 2GO \quad\Rightarrow\quad \frac{GO}{GH} = \frac{1}{2}$$

6.

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και κύκλος κέντρου Ο που διέρχεται από την κορυφή Α και τέμνει τις ευθείες ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ στα Β΄, Γ΄ και Δ΄ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Delta'}=\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Gamma'}$.



Λύση

Φέρνουμε τη διάμετρο ΑΟΚ και τις ΚΒ΄, ΚΓ΄, ΚΔ΄.
Τότε $\hat{B}'=90^o=\hat{\Gamma}'=\hat{\Delta}'$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}\cdot\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AK}$, ομοίως

$\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Delta'}=\overrightarrow{A\Delta}\cdot\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{A\Delta}}\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AK}$ και

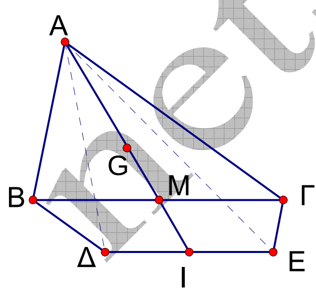
$\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Gamma'}=\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{A\Gamma}}\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AK}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Delta'}&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AK}\\&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta})\cdot\overrightarrow{AK}\\&=\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AK}\\&=\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Gamma'}\end{aligned}$$

7.

Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ, G το κέντρο βάρους του και Δ, Ε τα σημεία που ορίζονται από τις ισότητες $\overrightarrow{B\Delta}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma E}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
Αν Ι είναι το μέσο του ΔΕ, να αποδείξετε ότι το G είναι το μέσο του ΑΙ.

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AG}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{AE})\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma E})\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{A\Gamma}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB})\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma})=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma})\quad\textbf{(1)}\end{aligned}$$

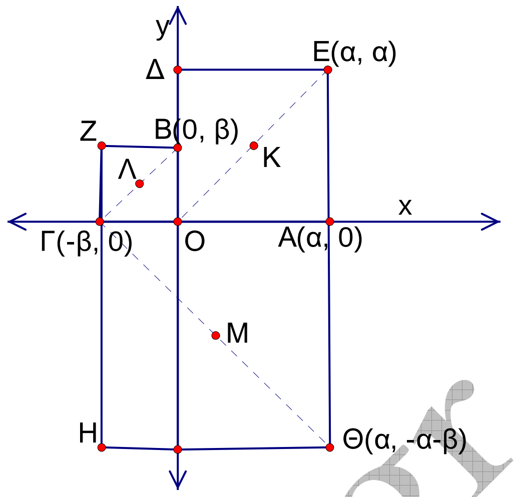
$$2\overrightarrow{AG}=2\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma})=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma})\quad\textbf{(2)}$$

Από τις (1), (2) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AG}$

8.

Στο διπλανό σχήμα τα ΟΑΕΔ, ΟΒΖΓ και ΑΓΗΘ είναι τετράγωνα και τα Κ, Λ, Μ είναι τα κέντρα τους. Αφού βρείτε τις συντεταγμένες των Κ, Λ και Μ, να αποδείξετε ότι

$|\overrightarrow{ΑΛ}| = |\overrightarrow{ΚΜ}|$ και $\overrightarrow{ΑΛ} \perp \overrightarrow{ΚΜ}$.



Λύση

Οι συντεταγμένες των άλλων κορυφών φαίνονται στο σχήμα.

Κ μέσο του ΟΕ $\Rightarrow$ $Κ(\frac{α}{2}, \frac{α}{2})$

Λ μέσο του ΒΓ $\Rightarrow$ $Λ(-\frac{β}{2}, \frac{β}{2})$

Μ μέσο του ΘΓ $\Rightarrow$ $Μ(\frac{α-β}{2}, \frac{-α-β}{2})$

$$\overrightarrow{ΑΛ} = (-\frac{β}{2} - α,\ \frac{β}{2} - 0) = (-\frac{β+2α}{2},\ \frac{β}{2}) = \frac{1}{2}(-β-2α,\ β)$$

$$\overrightarrow{ΚΜ} = (\frac{α-β}{2} - \frac{α}{2},\ \frac{-α-β}{2} - \frac{α}{2}) = (-\frac{β}{2},\ \frac{-2α-β}{2}) = \frac{1}{2}(-β,\ -2α-β)$$

$$|\overrightarrow{ΑΛ}| = |\overrightarrow{ΚΜ}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{ΑΛ}|^2 = |\overrightarrow{ΚΜ}|^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4}[(-β-2α)^2 + β^2] = \frac{1}{4}[(-β)^2 + (-2α-β)^2]$$ που ισχύει

$$\overrightarrow{ΑΛ} \cdot \overrightarrow{ΚΜ} = \frac{1}{4}[(-β-2α)(-β) + β(-2α-β)] = \frac{1}{4}[(β+2α)β - β(2α+β)] = 0$$

Άρα $\overrightarrow{ΑΛ} \perp \overrightarrow{ΚΜ}$.