1.5
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 47 – 50
Α΄ Ομάδας

1.

Αν $\vec{\alpha} = (-1, 3)$ και $\vec{\beta} = (2, 5)$, τότε

(i) Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha}\,\vec{\beta}$, $(2\vec{\alpha}).(-3\vec{\beta})$ και $(\vec{\alpha}-\vec{\beta}).(3\vec{\alpha}+\vec{\beta})$

(ii) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους κ, $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u} = (\kappa, \lambda)$ και $\vec{\beta}$ να είναι ίσο με μηδέν. Ποια η σχέση όλων των διανυσμάτων $\vec{u}$ στην περίπτωση αυτή;

Λύση

(i)

$\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = (-1)\cdot 2 + 3\cdot 5 = -2 + 15 = 13$

$(2\vec{\alpha})\cdot(-3\vec{\beta}) = -6\,(\vec{\alpha}\,\vec{\beta}) = -6\cdot 13 = -78$

$\vec{\alpha}-\vec{\beta} = (-1, 3) - (2, 5) = (-1-2,\ 3-5) = (-3,\ -2)$

$3\vec{\alpha}+\vec{\beta} = 3\,(-1, 3) + (2, 5) = (-3, 9) + (2, 5) = (-1, 14)$

Άρα $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(3\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = (-3,\ -2)\cdot(-1, 14) = 3 - 28 = -25$

(ii)

$\vec{u}\cdot\vec{\beta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\kappa + 5\lambda = 0$

Είναι $\vec{u} \perp \vec{\beta}$, άρα τα διανύσματα $\vec{u}$ είναι μεταξύ τους συγγραμμικά.

2.

Αν $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (4, 2)$ και $\vec{w} = (6, 0)$, να υπολογίστε τις παραστάσεις :

$\vec{u}\cdot(7\vec{v} + \vec{w})$, $\quad |\vec{u}|(\vec{v}\cdot\vec{w})$, $\quad |(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}|$ και $(|\vec{u}|\,\vec{v})\cdot\vec{w}$

Λύση

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 4 + 4 = 8$ $\qquad |\vec{u}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

$\vec{u}\cdot\vec{w} = 6 + 0 = 6$ $\qquad |\vec{w}| = \sqrt{6^2+0^2} = 6$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = 24 + 0 = 24$

$\vec{u}(7\vec{v} + \vec{w}) = 7(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \vec{u}\cdot\vec{w} = 7\cdot 8 + 6 = 56 + 6 = 62$

$|\vec{u}|(\vec{v}\cdot\vec{w}) = \sqrt{5}\cdot 24 = 24\sqrt{5}$

$|(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}| = |8\,\vec{w}| = 8\,|\vec{w}| = 8\cdot 6 = 48$

$(|\vec{u}|\,\vec{v})\cdot\vec{w} = (\sqrt{5}\,\vec{v})\cdot\vec{w} = \sqrt{5}\,(\vec{v}\cdot\vec{w}) = \sqrt{5}\cdot 24 = 24\sqrt{5}$

3.

Αν $\vec{\alpha} = (1, 0)$ και $\vec{\beta} = (1, 1)$, να βρείτε τον $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

(i) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

(ii) Τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

Λύση

(i)

$\vec{\alpha} \perp \vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}) = 0$

$\vec{\alpha}^2 + \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) = 0$

$1 + \lambda(1 + 0) = 0$

$1 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -1$

(ii)

$\vec{\beta} \perp \vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\beta} \cdot (\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}) = 0$

$\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} + \lambda\, \vec{\beta}^2 = 0$

$(1 + 0) + \lambda\,(1^2 + 1^2) = 0$

$1 + 2\lambda = 0$

$2\lambda = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{2}$

4.

Να βρείτε τα διανύσματα που είναι κάθετα στο $\vec{u} = (3, -2)$ και έχουν μέτρο ίσο με 1.

Λύση

Έστω $\vec{v} = (x, y)$ το ζητούμενο διάνυσμα.

$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$3x - 2y = 0$

$2y = 3x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{2}x \qquad$ **(1)**

$|\vec{v}| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

$x^2 + y^2 = 1 \quad \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$x^2 + \frac{9}{4}x^2 = 1$

$13x^2 = 4$

$x^2 = \frac{4}{13} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{\sqrt{13}}$ ή $x = -\frac{2}{\sqrt{13}}$

Για $x = \frac{2}{\sqrt{13}}$, η (1) $\Leftrightarrow$ $y = \frac{3}{\sqrt{13}}$, και

για $x = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ θα είναι $y = -\frac{3}{\sqrt{13}}$

Άρα $\vec{v} = (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$ ή $\vec{v} = (-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}})$

5.

Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$, να υπολογίσετε τον $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

Λύση

$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\kappa\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = 0$

$3\kappa\vec{\alpha}^2 + 6\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \kappa\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 2\vec{\beta}^2 = 0$ **(1)**

Αλλά $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2 = 4$, $\vec{\beta}^2 = |\vec{\beta}|^2 = 9$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\,\text{συν}\frac{\pi}{3} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$

(1) $\iff 3\kappa \cdot 4 + 6 \cdot 3 - \kappa \cdot 3 - 2 \cdot 9 = 0$

$12\kappa + 18 - 3\kappa - 18 = 0$

$9\kappa = 0 \iff \kappa = 0.$

6.

Αν $\vec{\alpha} = (\kappa, 1)$ και $\vec{\beta} = (4, 3)$, να βρείτε τον $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει :

(i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ **(ii)** $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{4}$ **(iii)** $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$

Λύση

(i)

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow 4\kappa + 3 = 0$

$4\kappa = -3 \Leftrightarrow \kappa = -\frac{3}{4}$

(ii)

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\,\text{συν}\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 4\kappa + 3 = \sqrt{\kappa^2+1}\,\sqrt{4^2+3^2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

$8k + 6 = 5\sqrt{2}\,\sqrt{\kappa^2+1}$ **(1)**

Περιορισμός : $8\kappa + 6 \geq 0 \Leftrightarrow 8\kappa \geq -6 \Leftrightarrow \kappa \geq -\frac{3}{4}$

(1) $\Leftrightarrow (8\kappa+6)^2 = 50(\kappa^2+1)$

$64\kappa^2 + 96\kappa + 36 = 50\kappa^2 + 50$

$14\kappa^2 + 96\kappa - 14 = 0$

$7\kappa^2 + 48\kappa - 7 = 0$

$\Delta = 48^2 + 4.\,49 = 2304 + 196 = 2500$, $\kappa = \frac{-48 \pm 50}{14} = \frac{2}{14}$ ή $\frac{-98}{14} = \frac{1}{7}$ ή -7

Λόγω του περιορισμού θα έχουμε $\kappa = \frac{1}{7}$

(iii)

$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \kappa & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3\kappa - 4 = 0 \Leftrightarrow \kappa = \frac{4}{3}$

7.

Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha} \hat{\ } \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$, να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

Λύση

Έστω θ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$, $\vec{v}$. Τότε $\quad συνθ = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$ **(1)**

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha} - \vec{\beta})\\ &= 2\vec{\alpha}^2 - 2\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 4\vec{\beta}^2\\ &= 2|\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 4\,|\vec{\beta}|^2\\ &= 2\cdot 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\cdot 1\\ &= 2 - 1 - 4 = -3\end{aligned}$$

$$* \quad \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\,συν\frac{2\pi}{3} = 1\cdot 1\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}|\vec{u}|^2 = \vec{u}^2 &= \left(2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}\right)^2\\ &= 4\left(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\right)^2\\ &= 4(\vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2)\\ &= 4(1 - 2 + 4) = 12. \qquad \text{Άρα } |\vec{u}| = 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{v}|^2 = \vec{v}^2 &= \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)^2\\ &= \vec{\alpha}^2 - 2\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2\\ &= 1 + 1 + 1 = 3. \qquad \text{Άρα } |\vec{v}| = \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$(1) \Rightarrow \quad συνθ = \frac{-3}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \quad θ = \frac{2\pi}{3}$$

8.

Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά, να αποδείξετε ότι :

$$\vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \Leftrightarrow συν(\vec{\alpha} \hat{\ } \vec{\beta}) = \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$$

Λύση

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \Leftrightarrow \quad & \vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 0\\ & \vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0\\ & \vec{\alpha}^2 = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\\ & |\vec{\alpha}|^2 = |\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\,συν(\vec{\alpha} \hat{\ } \vec{\beta}) \Leftrightarrow συν(\vec{\alpha} \hat{\ } \vec{\beta}) = \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}\end{aligned}$$

9.

Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = |\vec{\alpha}|\,\vec{\beta} + |\vec{\beta}|\,\vec{\alpha}$ και $\vec{v} = |\vec{\alpha}|\,\vec{\beta} - |\vec{\beta}|\,\vec{\alpha}$ είναι κάθετα

Λύση

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (|\vec{\alpha}|\,\vec{\beta} + |\vec{\beta}|\,\vec{\alpha})\cdot(|\vec{\alpha}|\,\vec{\beta} - |\vec{\beta}|\,\vec{\alpha}) \\ &= |\vec{\alpha}|^2\,\vec{\beta}^2 - |\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}) + |\vec{\beta}|\,|\vec{\alpha}|\,(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) - |\vec{\beta}|^2\,\vec{\alpha}^2 \\ &= |\vec{\alpha}|^2\,|\vec{\beta}|^2 - |\vec{\alpha}|^2\,|\vec{\beta}|^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{u}\perp\vec{v}\end{aligned}$$

10.

Να αποδείξετε ότι για δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, το διάνυσμα $\vec{v} = \vec{\beta}^2\,\vec{\alpha} - (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$.

Λύση

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot\vec{\beta} &= [\vec{\beta}^2\,\vec{\alpha} - (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}\,]\,.\,\vec{\beta} \\ &= \vec{\beta}^2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) - (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})(\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}) \\ &= \vec{\beta}^2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) - (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{v}\perp\vec{\beta}\end{aligned}$$

11.

Δίνονται τα σημεία Α(3, –2), Β(6, – 4), Γ(1, 5) και Δ(–1, 2). Να υπολογίσετε

(i) Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

(ii) Τι συμπεραίνετε για τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$;

Λύση

(i)

$\overrightarrow{AB} = (6 - 3,\ -4 + 2) = (3,\ -2)$

$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = (-1 - 1,\ 2 - 5) = (-2,\ -3)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta} = 3(-2) + (-2)(-3) = -6 + 6 = 0$

(ii)

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta} = 0 \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

12.

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -4)$ και $\vec{\beta} = (-8, 5)$. Να αναλύσετε το $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{\alpha}$.

Λύση

Έστω $\vec{u}, \vec{v}$ οι συνιστώσες, με $\vec{u} \parallel \vec{\alpha}$, $\vec{v} \perp \vec{\alpha}$ και $\vec{\beta} = \vec{u} + \vec{v}$

$\vec{u} \parallel \vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \lambda\vec{\alpha}$

$\vec{v} \perp \vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}\cdot\vec{\alpha} = 0$

$$\vec{\beta} = \vec{u} + \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot(\vec{u} + \vec{v})$$

$$2(-8) + (-4)\,5 = \vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\alpha} + \vec{v})$$

$$-16 - 20 = \lambda\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha}\cdot\vec{v}$$

$$-36 = \lambda\,(4 + 16) + 0$$

$$-36 = 20\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{9}{5}$$

Άρα $\vec{u} = -\frac{9}{5}\vec{\alpha} = -\frac{9}{5}(2, -4) = \left(-\frac{18}{5}, \frac{36}{5}\right)$

$$\vec{\beta} = \vec{u} + \vec{v} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{v} = \vec{\beta} - \vec{u} = (-8, 5) - \left(-\frac{18}{5}, \frac{36}{5}\right) = \left(-8 + \frac{18}{5}, 5 - \frac{36}{5}\right) = \left(-\frac{22}{5}, -\frac{11}{5}\right)$$

13.

Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου που κατασκευάζεται με τα διανύσματα $5\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$, αν $|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 45^o$.

Λύση

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\,\text{συν}\,45^o = 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$$

$$|\vec{\delta}_1|^2 = \vec{\delta}_1^2 = \left((5\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) + (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})\right)^2$$

$$= \left(6\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)^2$$

$$= 36\vec{\alpha}^2 - 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2$$

$$= 36\cdot 8 - 12\cdot 6 + 9$$

$$= 288 - 72 + 9 = 225 \quad \Rightarrow \quad |\vec{\delta}_1| = 15$$

$$|\vec{\delta}_2|^2 = \vec{\delta}_2^2 = \left((5\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) - (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})\right)^2$$

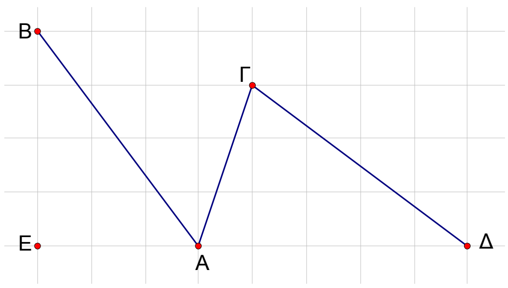
$$= \left(4\vec{\alpha} + 5\vec{\beta}\right)^2$$

$$= 16\vec{\alpha}^2 + 40\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 25\vec{\beta}^2$$

$$= 16\cdot 8 + 40\cdot 6 + 25\cdot 9$$

$$= 128 + 240 + 225 = 593 \quad \Rightarrow \quad |\vec{\delta}_2| = \sqrt{593}$$

14.



Για τα διανύσματα του διπλανού σχήματος, να υπολογίσετε την παράσταση
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

Λύση

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta} &= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}) \\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta} \\ &= \overrightarrow{A\Delta}\cdot \text{προβ}_{\overrightarrow{A\Delta}}\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AE} = -(A\Delta)\cdot(AE) = -5\cdot 3 = -15\end{aligned}$$

Άλλος τρόπος, με συντεταγμένες.

$\overrightarrow{AB} = (-3, 4)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (1, 3)$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = (4, -3)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = -3 + 12 = 9$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -12 - 12 = -24$

Άρα $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta} = 9 - 24 = -15$

15.

Να εξετάσετε πότε ισχύει : **(i)** $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ **(ii)** $\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big| = |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$

Λύση

(i)

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 = (|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|)^2$$

$$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2 = (|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|)^2$$

$$\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}| + |\vec{\beta}|^2$$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$$

(ii)

$$\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big| = |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \Leftrightarrow \big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big|^2 = |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2$$

$$\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big|^2 = (\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2$$

$$|\vec{\alpha}|^2 - 2|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}| + |\vec{\beta}|^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2$$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$$

Β΄ Ομάδας

1.

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά και μη συγγραμμικά. Να αποδείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ ισχύει :

$$\lambda^2\,\vec{\alpha}^2 + 2\lambda\mu(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + \mu^2\,\vec{\beta}^2 \geq 0$$

Πότε ισχύει το “ = ” ;

Λύση

$\lambda^2\,\vec{\alpha}^2 + 2\lambda\mu(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + \mu^2\,\vec{\beta}^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}\right)^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda^2\,\vec{\alpha}^2 + 2\lambda\mu(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + \mu^2\,\vec{\beta}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\vec{\alpha} = -\mu\vec{\beta}$$

Αν ήταν $\lambda \neq 0$, τότε $\vec{\alpha} = -\dfrac{\mu}{\lambda}\vec{\beta} \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ που είναι άτοπο. Άρα $\lambda = 0$

Ομοίως αν ήταν $\mu \neq 0$ οπότε το = ισχύει όταν $\lambda = \mu = 0$

2.

Να αποδείξετε ότι :

(i) $|\vec{u}+\vec{v}|^2 + |\vec{u}-\vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$ (ii) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{4}|\vec{u}+\vec{v}|^2 - \dfrac{1}{4}|\vec{u}-\vec{v}|^2$

Λύση

(i)

$$\begin{aligned} |\vec{u}+\vec{v}|^2 + |\vec{u}-\vec{v}|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})^2 + (\vec{u}-\vec{v})^2 \\ &= |\vec{u}|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 \\ &= 2\,|\vec{u}|^2 + 2\,|\vec{v}|^2 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}|\vec{u}+\vec{v}|^2 - \frac{1}{4}|\vec{u}-\vec{v}|^2 &= \frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v})^2 - \frac{1}{4}(\vec{u}-\vec{v})^2 \\ &= \frac{1}{4}(|\vec{u}|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2) - \frac{1}{4}(|\vec{u}|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2) \\ &= \frac{1}{4}(|\vec{u}|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} - |\vec{v}|^2) \\ &= \frac{1}{4}\cdot 4(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v} \end{aligned}$$

3.

Δίνονται τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Να αποδείξετε ότι **:**

(i) Ο φορέας του διανύσματος $\vec{u} = |\vec{\beta}|\,\vec{\alpha} + |\vec{\alpha}|\,\vec{\beta}$ διχοτομεί τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(ii) Ο φορέας του διανύσματος $\vec{v} = |\vec{\beta}|\,\vec{\alpha} - |\vec{\alpha}|\,\vec{\beta}$ διχοτομεί την παραπληρωματική γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Λύση

(i)

Αρκεί να δειχθεί ότι συν$(\vec{u}\,\hat{}\,\vec{\alpha})$ = συν$(\vec{u}\,\hat{}\,\vec{\beta})$

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{\alpha}}{|\vec{u}||\vec{\alpha}|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{u}||\vec{\beta}|}$$

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$$

$$\frac{(|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta})\cdot\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} = \frac{(|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta})\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$$

$$\frac{|\vec{\beta}|\vec{\alpha}^2+|\vec{\alpha}|(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha})}{|\vec{\alpha}|} = \frac{|\vec{\beta}|(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}^2}{|\vec{\beta}|}$$

$$\frac{|\vec{\beta}||\vec{\alpha}|^2+|\vec{\alpha}|(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha})}{|\vec{\alpha}|} = \frac{|\vec{\beta}|(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|^2}{|\vec{\beta}|}$$

$$|\vec{\beta}||\vec{\alpha}| + (\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}) = (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + |\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}| \quad \text{που ισχύει}$$

(ii)

Αρκεί να δειχθεί ότι $\vec{v}\perp\vec{u}$, δηλαδή $\vec{v}\cdot\vec{u} = 0$

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = (|\vec{\beta}|\,\vec{\alpha} - |\vec{\alpha}|\,\vec{\beta})\,(|\vec{\beta}|\,\vec{\alpha} + |\vec{\alpha}|\,\vec{\beta})$$

$$= (|\vec{\beta}|\,\vec{\alpha})^2 - (|\vec{\alpha}|\,\vec{\beta})^2$$

$$= |\vec{\beta}|^2\,\vec{\alpha}^2 - |\vec{\alpha}|^2\,\vec{\beta}^2$$

$$= |\vec{\beta}|^2\,|\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\alpha}|^2\,|\vec{\beta}|^2 = 0$$

4.

Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $|\vec{\gamma}| = 3$ και $2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, να υπολογίσετε τα :

(i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$, $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$

(ii) συν($\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}$), συν($\vec{\beta}\,\hat{}\,\vec{\gamma}$), συν($\vec{\gamma}\,\hat{}\,\vec{\alpha}$),

και να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = -2\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma} = 3\vec{\beta}$

Λύση

(i)

$2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} = -\vec{\gamma}$

$(2\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = (-\vec{\gamma})^2$

$4\vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = \vec{\gamma}^2$

$4{\cdot}4 + 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 1 = 9$

$4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -8 \Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -2$

Ομοίως βρίσκουμε $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = 3$ και $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} = -6$

(ii)

συν($\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}$) $= \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|} = \dfrac{-2}{2.1} = -1$ και ομοίως συν($\vec{\beta}\,\hat{}\,\vec{\gamma}$) $= 1$, συν($\vec{\gamma}\,\hat{}\,\vec{\alpha}$) $= -1$,

συν($\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}$) $= -1 \Rightarrow (\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) = 180^o$

$\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$,

οπότε η σχέση $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|$ γίνεται $\vec{\alpha} = -2\vec{\beta}$.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $\vec{\gamma} = 3\vec{\beta}$.

5.

Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\kappa, \lambda)$ και $\vec{\beta} = (\mu, \nu)$ είναι κάθετα και έχουν μέτρα ίσα με τη μονάδα, να δείξετε ότι $(\kappa\nu - \lambda\mu)^2 = 1$.

Λύση

$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Rightarrow \kappa\mu + \lambda\nu = 0 \Rightarrow (\kappa\mu + \lambda\nu)^2 = 0 \Rightarrow$

$\kappa^2\mu^2 + 2\kappa\mu\lambda\nu + \lambda^2\nu^2 = 0$ **(1)**

$|\vec{\alpha}| = 1 \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2 = 1 \Rightarrow \kappa^2 + \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda^2 = 1 - \kappa^2$

$|\vec{\beta}| = 1 \Rightarrow |\vec{\beta}|^2 = 1 \Rightarrow \mu^2 + \nu^2 = 1 \Rightarrow \nu^2 = 1 - \mu^2$

(1) $\Rightarrow \kappa^2(1 - \nu^2) + 2\kappa\mu\lambda\nu + \lambda^2(1 - \mu^2) = 0$

$\kappa^2 - \kappa^2\nu^2 + 2\kappa\mu\lambda\nu + \lambda^2 - \lambda^2\mu^2 = 0$

$(\kappa^2 + \lambda^2) - (\kappa^2\nu^2 - 2\kappa\mu\lambda\nu + \lambda^2\mu^2) = 0$

$1 - (\kappa\nu - \lambda\mu)^2 = 0 \Rightarrow 1 = (\kappa\nu - \lambda\mu)^2$

6.

Να αποδείξετε ότι $\quad -1 \le \dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}} \le 1$

Λύση

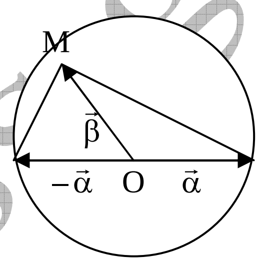
Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ και $\vec{v} = (\gamma, \delta)$.

Τότε $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}$

Αλλά $-1 \le \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \le 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \le \dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}} \le 1$

7.

Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και κέντρου Ο παίρνουμε σημείο Μ.



(i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

(ii) Να βρείτε το γινόμενο $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$.
Τι συμπεραίνετε για τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{MA}$ και $\overrightarrow{MB}$; Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί;

Λύση

(i)

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = -\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

(ii)

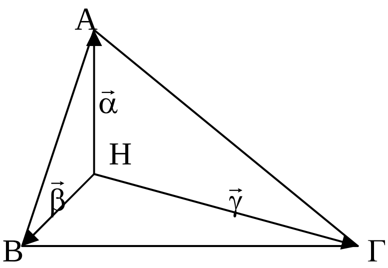
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= -(\vec{\alpha}+\vec{\beta})(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) \\ &= -(\vec{\alpha}^2-\vec{\beta}^2) \\ &= \vec{\beta}^2-\vec{\alpha}^2 \\ &= |\vec{\beta}|^2-|\vec{\alpha}|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \quad \text{άρα} \quad \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) = 90^o .\end{aligned}$$

Επομένως αποδείχθηκε η πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας **:**
Η γωνία, που βαίνει σε ημικύκλιο, είναι ορθή.

8.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα δύο ύψη του ΒΕ και ΓΖ τέμνονται στο Η.

Έστω $\overrightarrow{HA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{HB} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{H\Gamma} = \vec{\gamma}$.



(i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

(ii) Να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} = \vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

(iii) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} = \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$.
Με τη βοήθεια της ισότητας αυτής να δείξετε ότι $AH \perp B\Gamma$.
Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί;

Λύση

(i)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

$\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{H\Gamma} - \overrightarrow{HA} = \vec{\gamma} - \vec{\alpha}$

$\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{H\Gamma} - \overrightarrow{HB} = \vec{\gamma} - \vec{\beta}$

(ii)

$\overrightarrow{H\Gamma} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{H\Gamma}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$\vec{\gamma}\cdot(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) = 0$

$\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta} - \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} = 0 \Rightarrow \vec{\gamma}\cdot\vec{\beta} = \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$ **(1)**

Ομοίως $\overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{A\Gamma} \Rightarrow \vec{\gamma}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ **(2)**

(iii)

(1), (2) $\Rightarrow \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

$\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} - \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$

$\vec{\alpha}.(\vec{\gamma} - \vec{\beta}) = 0$

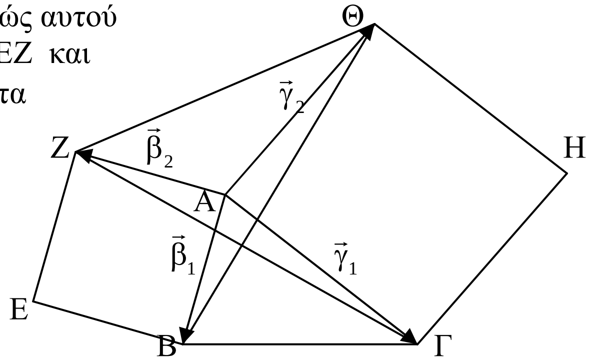
$\overrightarrow{HA}\cdot(\overrightarrow{H\Gamma} - \overrightarrow{HB}) = 0$

$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = 0 \Rightarrow AH \perp B\Gamma$.

Αποδείχθηκε ότι : τα ύψη τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο

9.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και εξωτερικώς αυτού κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΕΖ και ΑΓΗΘ. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Theta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma}$ ως συνάρτηση των $\vec\beta_1$, $\vec\beta_2$, $\vec\gamma_1$, $\vec\gamma_2$ και να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{B\Theta}\cdot\overrightarrow{Z\Gamma}$.
Τι συμπεραίνετε για τα τμήματα ΒΘ και ΓΖ;



Λύση

$\overrightarrow{B\Theta} = \overrightarrow{A\Theta} - \overrightarrow{AB} = \vec\gamma_2 - \vec\beta_1$

$\overrightarrow{Z\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AZ} = \vec\gamma_1 - \vec\beta_2$

$$\overrightarrow{B\Theta}\cdot\overrightarrow{Z\Gamma} = (\vec\gamma_2 - \vec\beta_1)\cdot(\vec\gamma_1 - \vec\beta_2) = \vec\gamma_2\cdot\vec\gamma_1 - \vec\gamma_2\cdot\vec\beta_2 - \vec\beta_1\cdot\vec\gamma_1 + \vec\beta_1\cdot\vec\beta_2$$

$$= 0 - |\vec\gamma_2|\,|\vec\beta_2|\,\text{συν}(\vec\gamma_2 \,\hat{,}\, \vec\beta_2) - |\vec\beta_1|\,|\vec\gamma_1|\,\text{συν}(\vec\beta_1 \,\hat{,}\, \vec\gamma_1) + 0$$

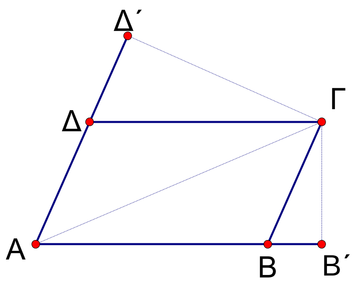
$$= -\,(A\Gamma)\,(AB)\,\text{συν}(\pi - \hat{A}) - (AB)\,(A\Gamma)\,\text{συν}\,\hat{A}$$

$$= (AB)\,(A\Gamma)\,\text{συν}\,\hat{A} - (AB)\,(A\Gamma)\,\text{συν}\,\hat{A} = 0$$

Συμπεραίνουμε $B\Theta \perp \Gamma Z$.

10.

Στο διπλανό σχήμα, το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και τα Β΄, Δ΄ οι προβολές του Γ στις ΑΒ και ΑΔ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Delta'} = \overrightarrow{A\Gamma}^2$



Λύση

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Delta'} =$

$\overrightarrow{AB}\cdot \text{προβ}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta}\cdot \text{προβ}_{\overrightarrow{A\Delta}}\overrightarrow{A\Gamma} =$

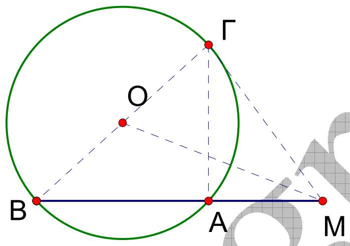
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta})\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}^2$

11.

Δίνεται κύκλος (O, R) και σημείο M του επιπέδου του. Αν μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από το M τέμνει τον κύκλο στα A και B, να αποδείξετε ότι το γινόμενο $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ είναι σταθερό. (Το γινόμενο αυτό λέγεται δύναμη του σημείου M ως προς τον κύκλο O).

Λύση

Φέρουμε τη διάμετρο ΒΟΓ και τα τμήματα ΓΑ, ΓΜ, ΟΜ.



$\hat{A} = 90^o \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \pi\rho o\beta_{\overrightarrow{MB}} \overrightarrow{M\Gamma}$

Άρα $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{M\Gamma}$

$= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})(\overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OM})$

$= (-\overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OM})(\overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OM})$

$= -(\overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{OM})(\overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OM})$

$= -(\overrightarrow{O\Gamma}^2 - \overrightarrow{OM}^2) = (OM)^2 - R^2$ = σταθερό.