1.4

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 39 – 40

Α΄ Ομάδας

1.

Ποια είναι η θέση στο καρτεσιανό επίπεδο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει

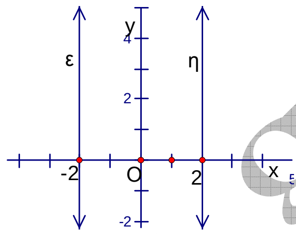
(i) $|x| = 2$ **(ii)** $|x| < 2$ **(iii)** $|y| > 2$ **(iv)** $|x| = |y|$

Λύση

(i)

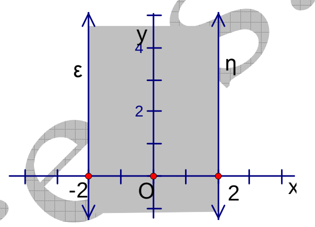
$|x| = 2 \iff x = -2$ ή $x = 2$

Η θέση των σημείων είναι οι ευθείες ε, η.



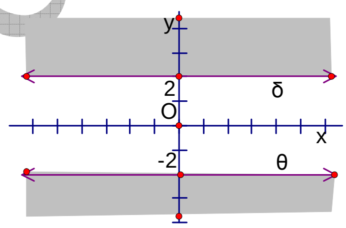
(ii)

$|x| < 2 \iff -2 < x < 2$



(iii)

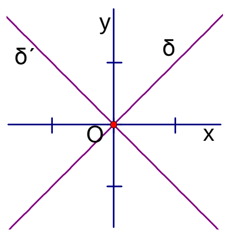
$|y| > 2 \iff y < -2$ ή $y > 2$



(iv)

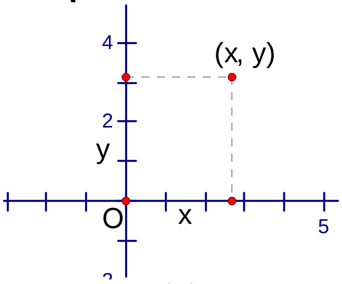
$|x| = |y| \iff y = x$ ή $y = -x$

Η θέση των σημείων είναι οι διχοτόμοι δ, δ΄.



2.
Να βρείτε τις αποστάσεις των παρακάτω σημείων από τους άξονες $x'x$ και $y'y$:
$A(-1, 2)$, $B(3, 4)$, $\Gamma(-5, -6)$, $\Delta(\alpha - 1, \beta + 2)$, $M(x, y)$.

Λύση



Για το τυχαίο σημείο $M(x, y)$ ισχύει
$d(M,\ x'x) = |y|$ και $d(M,\ y'y) = |x|$

$d(A,\ x'x) = |2| = 2$ και $d(A,\ y'y) = |-1| = 1$
$d(B,\ x'x) = |4| = 4$ και $d(B,\ y'y) = |3| = 3$
$d(\Gamma,\ x'x) = |-6| = 6$ και $d(\Gamma,\ y'y) = |-5| = 5$
$d(\Delta,\ x'x) = |\beta + 2|$ και $d(\Delta,\ y'y) = |\alpha - 1|$

3.
Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 4,\ \lambda^2 - 3\lambda + 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Για ποια τιμή του λ είναι :
(i) $\vec{\alpha} = \vec{0}$; (ii) $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} \parallel x'x$

Λύση

(i)
$\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0$ και $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow$
$(\lambda = 2$ ή $\lambda = -2)$ και $(\lambda = 2$ ή $\lambda = 1) \Leftrightarrow \lambda = 2$

(ii)
$\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} \parallel x'x \Leftrightarrow$
$\lambda^2 - 4 \neq 0$ και $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow$
$(\lambda \neq 2$ και $\lambda \neq -2)$ και $(\lambda = 2$ ή $\lambda = 1) \Leftrightarrow \lambda = 1$

4.
Δίνονται τα διανύσματα
$\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 3\lambda + 2,\ 2\lambda^2 - 3\lambda - 2)$ και $\vec{\beta} = (\lambda^2 - 5\lambda + 6,\ -3\lambda^2 + 7\lambda - 2)$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.
Λύση
$\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ και $2\lambda^2 - 3\lambda - 2 = -3\lambda^2 + 7\lambda - 2 \Leftrightarrow$
$2\lambda = 4$ και $5\lambda^2 - 10\lambda = 0 \Leftrightarrow$
$\lambda = 2$ και $\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow$
$\lambda = 2$ και $(\lambda = 2$ ή $\lambda = 0) \Leftrightarrow \lambda = 2$

5.

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, 1)$ και $\vec{\beta} = (4, x)$ να είναι ομόρροπα.

Λύση

$\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ομόρροπα $\Leftrightarrow$ $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ με $\lambda \geq 0$

$(x, 1) = \lambda\,(4, x)$ με $\lambda \geq 0$

$x = 4\lambda$ και $1 = \lambda x$ με $\lambda \geq 0$

$x = 4\lambda$ και $1 = \lambda \cdot 4\lambda$ με $\lambda \geq 0$

$x = 4\lambda$ και $\lambda^2 = \frac{1}{4}$ με $\lambda \geq 0$

$x = 4\lambda$ και $\lambda = \frac{1}{2}$

$x = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

6.

Αν $\vec{u} = (3, 4)$, ποιο διάνυσμα είναι συγγραμμικό με το $\vec{u}$ και έχει διπλάσιο μέτρο από το $\vec{u}$;

Λύση

Έστω $\vec{w}$ το ζητούμενο διάνυσμα.

$\vec{w} \parallel \vec{u} \Rightarrow \vec{w} = \lambda\,\vec{u}$ **(1)** $\Rightarrow |\vec{w}| = |\lambda\vec{u}| \Rightarrow |\vec{w}| = |\lambda|\,|\vec{u}|$ **(2)**

Αλλά $|\vec{w}| = 2|\vec{u}|$

(2) $\Rightarrow 2|\vec{u}| = |\lambda|\,|\vec{u}| \Rightarrow |\lambda| = 2 \Rightarrow \lambda = 2$ ή $\lambda = -2$

(1) $\Rightarrow \vec{w} = 2(3, 4) = (6, 8)$ ή $\vec{w} = -2(3, 4) = (-6, -8)$

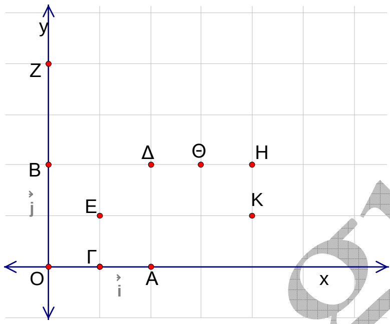
7.

Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων είναι $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$. Να εκφράσετε ως συνάρτηση των $\vec{i}$ και $\vec{j}$:

α) Τα διανύσματα θέσεως των σημείων Γ, Δ, Ε, Ζ, Κ και Η..

β) Τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{H\Delta}$, $\overrightarrow{K\Delta}$, $\overrightarrow{H\Theta}$, $\overrightarrow{ZA}$ και $\overrightarrow{KZ}$.

Λύση



α) $\overrightarrow{O\Gamma} = \frac{1}{2}\vec{i}$, $\overrightarrow{O\Delta} = \vec{i} + \vec{j}$,

$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$, $\overrightarrow{OZ} = 2\vec{j}$,

$\overrightarrow{OK} = 2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$, $\overrightarrow{OH} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

β) $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{O\Gamma}$

$= \vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{2}\vec{i} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$

$\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OK} = \vec{i} - (2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j})$

$= \vec{i} - 2\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} = -\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$

$\overrightarrow{H\Delta} = \overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{OH} = \vec{i} + \vec{j} - (2\vec{i} + \vec{j}) = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{i} - \vec{j} = -\vec{i}$

$\overrightarrow{K\Delta} = \overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{OK} = \vec{i} + \vec{j} - (2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} = -\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$

$\overrightarrow{H\Theta} = \overrightarrow{O\Theta} - \overrightarrow{OH} = \frac{3}{2}\vec{i} + \vec{j} - (2\vec{i} + \vec{j}) = \frac{3}{2}\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{i} - \vec{j} = -\frac{1}{2}\vec{i}$

$\overrightarrow{ZA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OZ} = \vec{i} - 2\vec{j}$

$\overrightarrow{KZ} = \overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OK} = 2\vec{j} - (2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}) = 2\vec{j} - 2\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} = -2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$

8.

Δίνονται τα σημεία $A(-1, 6)$ και $B(-9, -2)$. Να βρείτε

(i) Το σημείο του άξονα $x'x$ που ισαπέχει από τα A και B.

(ii) Το σημείο του άξονα $y'y$ που ισαπέχει από τα A και B.

Λύση

(i)

Έστω $M(x, 0)$ το ζητούμενο σημείο.

$$(MA) = (MB) \Leftrightarrow (MA)^2 = (MB)^2$$

$$(x+1)^2 + (0-6)^2 = (x+9)^2 + (0+2)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + 36 = x^2 + 18x + 81 + 4$$

$$16x = -48$$

$x = -3$. Άρα $M(-3, 0)$

(ii)

Έστω $M(0, y)$ το ζητούμενο σημείο.

$$(MA) = (MB) \Leftrightarrow (MA)^2 = (MB)^2$$

$$(0+1)^2 + (y-6)^2 = (0+9)^2 + (y+2)^2$$

$$1 + y^2 - 12y + 36 = 81 + y^2 + 4y + 4$$

$$16y = -48$$

$y = -3$. Άρα $M(0, -3)$.

Β΄ Ομάδας

1.

Αν τα σημεία $K\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$, $\Lambda\left(3,\frac{7}{2}\right)$, $M\left(4,\frac{5}{2}\right)$, $N(3,1)$ και $\Xi\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ και ΕΑ, αντιστοίχως, του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ, να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του πενταγώνου.

Λύση

Έστω $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $\Gamma(x_3,y_3)$, $\Delta(x_4,y_4)$ και $E(x_5,y_5)$ οι κορυφές του πενταγώνου.

Για τις τετμημένες θα έχουμε

$$x_1+x_2=2\cdot\frac{3}{2}=3$$
$$x_2+x_3=2\cdot 3=6$$
$$x_3+x_4=2\cdot 4=8$$
$$x_4+x_5=2\cdot 3=6$$
$$x_5+x_1=2\cdot\frac{3}{2}=3$$

Προσθέτουμε κατά μέλη:

$$2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+2x_5=26 \Rightarrow$$
$$(x_1+x_2)+(x_3+x_4)+x_5=13 \Rightarrow$$
$$3+8+x_5=13 \Rightarrow x_5=2$$

$$x_5+x_1=3 \Rightarrow 2+x_1=3 \Rightarrow x_1=1$$
$$x_1+x_2=3 \Rightarrow 1+x_2=3 \Rightarrow x_2=2$$
$$x_2+x_3=6 \Rightarrow 2+x_3=6 \Rightarrow x_3=4$$
$$x_3+x_4=8 \Rightarrow 4+x_4=8 \Rightarrow x_4=4$$

Ομοίως, για τις τεταγμένες βρίσκουμε $y_1=1$, $y_2=4$, $y_3=3$, $y_4=2$ και $y_5=0$.

2.

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων οι τετμημένες δύο σημείων Α και Β είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-(\lambda^2-4\lambda+3)x-17=0$. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε το μέσο του τμήματος ΑΒ να έχει τετμημένη 4.

Λύση

Επειδή $\gamma=-17<0$, η εξίσωση έχει ρίζες, έστω x_1, x_2.

Έστω Μ το μέσο του ΑΒ. Τότε $x_1+x_2=2x_M \Leftrightarrow$

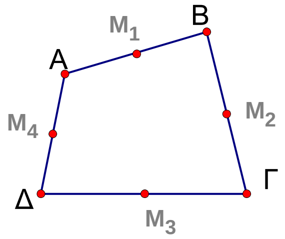
$$\frac{\lambda^2-4\lambda+3}{1}=8$$
$$\lambda^2-4\lambda+3=8$$
$$\lambda^2-4\lambda-5=0 \Leftrightarrow \lambda=5 \text{ ή } -1$$

3.

Δίνονται τα σημεία $M_1(\kappa_1, \lambda_1)$, $M_2(\kappa_2, \lambda_2)$, $M_3(\kappa_3, \lambda_3)$ και $M_4(\kappa_4, \lambda_4)$. Να αποδείξετε ότι, αν τα σημεία αυτά είναι τα μέσα των διαδοχικών πλευρών ενός τετραπλεύρου, τότε ισχύει $\kappa_1+\kappa_3=\kappa_2+\kappa_4$ και $\lambda_1+\lambda_3=\lambda_2+\lambda_4$.

Λύση

Έστω $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $\Gamma(x_3,y_3)$, $\Delta(x_4,y_4)$ οι κορυφές του τετραπλεύρου



Για τις τετμημένες θα έχουμε

$2\kappa_1 = x_1+x_2$ **(1)**

$2\kappa_2 = x_2+x_3$ **(2)**

$2\kappa_3 = x_3+x_4$ **(3)**

$2\kappa_4 = x_4+x_1$ **(4)**

$(1)+(3) \Rightarrow 2\kappa_1+2\kappa_3 = x_1+x_2+x_3+x_4$

$(2)+(4) \Rightarrow 2\kappa_2+2\kappa_4 = x_2+x_3+x_4+x_1$

Άρα $2\kappa_1+2\kappa_3 = 2\kappa_2+2\kappa_4 \Rightarrow \kappa_1+\kappa_3=\kappa_2+\kappa_4$

Ομοίως για τις τεταγμένες

4.

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α_1, α_2, β_1, β_2, x, y να αποδείξετε

ότι $\sqrt{(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2} + \sqrt{(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2} \geq \sqrt{(\alpha_2-\alpha_1)^2+(\beta_2-\beta_1)^2}$

Λύση

Θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha_1,\beta_1)$, $B(\alpha_2,\beta_2)$ και Γ(x, y)

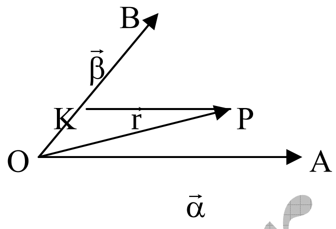
Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε (ΑΓ) + (ΒΓ) ≥ (ΑΒ) $\Rightarrow$

$$\sqrt{(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2} + \sqrt{(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2} \geq \sqrt{(\alpha_2-\alpha_1)^2+(\beta_2-\beta_1)^2}$$

5.

Δίνονται δύο μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ενός επιπέδου. Να αποδείξετε ότι οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{r}$ του επιπέδου αυτού μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ κατά μοναδικό τρόπο.

Λύση



Έστω $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$.

Φέρουμε $PK \parallel OA$ τότε $\overrightarrow{KP} = \lambda\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OK} = \mu\vec{\beta}$

και $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KP} \Rightarrow \vec{r} = \mu\vec{\beta} + \lambda\vec{\alpha}$ **(1)**

Έστω ότι είναι και $\vec{r} = \mu'\vec{\beta} + \lambda'\vec{\alpha}$ **(2)**

(1), (2) $\Rightarrow$ $\mu\vec{\beta} + \lambda\vec{\alpha} = \mu'\vec{\beta} + \lambda'\vec{\alpha}$

$\mu\vec{\beta} - \mu'\vec{\beta} = \lambda'\vec{\alpha} - \lambda\vec{\alpha}$

$(\mu - \mu')\vec{\beta} = (\lambda' - \lambda)\vec{\alpha}$ **(3)**

Αν ήταν $\mu - \mu' \neq 0$, η (3) $\Rightarrow$ $\vec{\beta} = \dfrac{\lambda' - \lambda}{\mu - \mu'}\vec{\alpha}$ $\Rightarrow$

$\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}$ συγγραμμικά, που είναι άτοπο.

Άρα $\mu - \mu' = 0 \Rightarrow \mu' = \mu$.

Η (3) $\Rightarrow$ $\vec{0} = (\lambda' - \lambda)\vec{\alpha} \Rightarrow \lambda' - \lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$.

Αν ήταν $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ συγγραμμικά, που είναι άτοπο.

Άρα $\lambda' - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda' = \lambda$