4.3
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 149 – 150

Α΄ Ομάδας

1.
Να βρείτε το πλήθος των θετικών ακεραίων που δεν υπερβαίνουν τον 1000 και διαιρούνται με :
(i) τον 5 **(ii)** τον 25 **(iii)** τον 125 **(iv)** τον 625
Λύση
(i)
Έστω αριθμός α τέτοιος ώστε $0 < \alpha \le 1000$ **(1)** και
$5|\alpha$ δηλαδή $\alpha = 5\kappa$
(1) $\Rightarrow$ $0 < 5\kappa \le 1000$ $\Rightarrow$
$0 < \kappa \le 200$ $\Rightarrow$ $\kappa = 1, 2, \ldots, 200$ (200 το πλήθος τιμές του κ)
Από την $\alpha = 5\kappa$, για κάθε τιμή του κ έχουμε μία τιμή για τον α, άρα έχουμε 200 το πλήθος τιμές του α

(ii)
Έστω αριθμός α τέτοιος ώστε $0 < \alpha \le 1000$ **(1)** και
$25|\alpha$ δηλαδή $\alpha = 25\kappa$
(1) $\Rightarrow$ $0 < 25\kappa \le 1000$ $\Rightarrow$
$0 < \kappa \le 40$ $\Rightarrow$ $\kappa = 1, 2, \ldots, 40$ (40 το πλήθος τιμές του κ)
Από την $\alpha = 25\kappa$, για κάθε τιμή του κ έχουμε μία τιμή για τον α, άρα έχουμε 40 το πλήθος τιμές του α.

(iii)
Έστω αριθμός α τέτοιος ώστε $0 < \alpha \le 1000$ **(1)** και
$125|\alpha$ δηλαδή $\alpha = 125\kappa$
(1) $\Rightarrow$ $0 < 125\kappa \le 1000$ $\Rightarrow$
$0 < \kappa \le 8$ $\Rightarrow$ $\kappa = 1, 2, \ldots, 8$ (8 το πλήθος τιμές του κ)
Από την $\alpha = 125\kappa$, για κάθε τιμή του κ έχουμε μία τιμή για τον α, άρα έχουμε 8 το πλήθος τιμές του α.

(iv)
Έστω αριθμός α τέτοιος ώστε $0 < \alpha \le 1000$ **(1)** και
$625|\alpha$ δηλαδή $\alpha = 625\kappa$
(1) $\Rightarrow$ $0 < 625\kappa \le 1000$ $\Rightarrow$
$0 < \kappa \le \frac{1000}{625} = 1,..$ $\Rightarrow$ $\kappa = 1$ (μία το πλήθος τιμή του κ)
Από την $\alpha = 125\kappa$, θα έχουμε μία τιμή και για τον α.

2.

Αν $\alpha|\beta$ και $\gamma|\delta$, να αποδείξετε ότι $\alpha\gamma|\beta\delta$

Λύση

$$\begin{cases}\alpha|\beta\\ \gamma|\delta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta=\kappa\alpha\\ \delta=\lambda\gamma\end{cases} \Rightarrow \beta\delta=(\kappa\lambda)(\alpha\gamma) \Rightarrow \alpha\gamma|\beta\delta$$

3.

Αν $11|\alpha+2$ και $11|35-\beta$, να αποδείξετε ότι $11|\alpha+\beta$

Λύση

$$\begin{cases}11|\alpha+2\\ 11|35-\beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+2=11\kappa\\ 35-\beta=11\lambda\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=11\kappa-2\\ \beta=35-11\lambda\end{cases} \Rightarrow$$

$$\alpha+\beta=11\kappa-11\lambda+33 \Rightarrow \alpha+\beta=11(\kappa-\lambda+3) \Rightarrow 11|\alpha+\beta$$

4.

Αν η διαφορά δύο ακεραίων είναι άρτιος αριθμός, να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων τους είναι πολλαπλάσιο του 4.

Λύση

Έστω $\alpha-\beta=2\mu$ τότε $\alpha=2\mu+\beta$

$\alpha^2-\beta^2=(2\mu+\beta)^2-\beta^2=4\mu^2+4\mu\beta+\beta^2-\beta^2=4(\mu^2+\mu\beta)=\pi o\lambda\ 4$

5.

Αν $m|\alpha$ και $m>1$, να αποδείξετε ότι m δε διαιρεί τον $\alpha+1$.

Λύση

Αν ο m διαιρούσε τον $\alpha+1$, επειδή διαιρεί και τον α, θα διαιρούσε και τη διαφορά τους δηλαδή τον 1, που είναι άτοπο.

6.

Να αποδείξετε ότι $2|(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$ για όλους τους ακέραιους α, β, γ.

Λύση

- Όταν δύο τουλάχιστον από τους α, β, γ είναι άρτιοι.
  Τότε μία τουλάχιστον διαφορά τους είναι άρτιος, άρα και το γινόμενο των διαφορών τους.
- Όταν δύο τουλάχιστον από τους α, β, γ είναι περιττοί.
  Τότε μία τουλάχιστον διαφορά τους είναι άρτιος, άρα και το γινόμενο των διαφορών τους.

Β΄ Ομάδας

1.

Έστω α ένας περιττός ακέραιος. Να αποδείξετε ότι

(i) Το τετράγωνο του α είναι της μορφής $\alpha^2 = 4\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

(ii) $32 \mid (\alpha^2 + 3)(\alpha^2 + 7)$

Λύση

(i)

Έστω $\alpha = 2\mu + 1$. Τότε $\alpha^2 = 4\mu^2 + 4\mu + 1 = 4(\mu^2 + \mu) + 1 = 4\lambda + 1$.

(ii)

$$
\begin{aligned}
(\alpha^2 + 3)(\alpha^2 + 7) &= (4\lambda + 1 + 3)(4\lambda + 1.+7) \\
&= (4\lambda + 4)(4\lambda + 8) \\
&= 4(\lambda + 1)\,4(\lambda + 2) \\
&= 16(\lambda + 1)(\lambda + 2) \overset{*}{=} 16\cdot 2\rho = 32\rho
\end{aligned}
$$

* Το γινόμενο δύο ή περισσότερων διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος.

2.

Να αποδείξετε ότι ο 4 δε διαιρεί τον $\alpha^2 + 2$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Λύση

- Όταν $\alpha = 2\mu$. Τότε $\alpha^2 + 2 = 4\mu^2 + 2$ αφήνει υπόλοιπο 2.
- Όταν $\alpha = 2\mu + 1$.
  Τότε $\alpha^2 + 2 = 4\mu^2 + 4\mu + 1 + 2 = 4(\mu^2 + \mu) + 3$ αφήνει υπόλοιπο 3

3.

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι, που να είναι και οι δύο τετράγωνα ακεραίων.

Λύση

Έστω ότι υπάρχουν οι α, $\alpha + 1$ τέτοιοι ώστε $x^2 = \alpha$ και $y^2 = \alpha + 1$, όπου $x, y \in \mathbb{Z}$

Τότε $y^2 = x^2 + 1 \Rightarrow y^2 - x^2 = 1$

$(y - x)(y + x) = 1$

$y - x = 1$ και $y + x = 1$

$(+)$: $2y = 2 \Rightarrow y = 1$

$(-)$: $2x = 0 \Rightarrow x = 0$ άτοπο

4.

Αν $\beta \mid \alpha$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι $(2^{\beta}-1) \mid (2^{\alpha}-1)$

Λύση

$\beta \mid \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \lambda\beta$

$$\begin{aligned} 2^{\alpha}-1 &= 2^{\lambda\beta}-1 \\ &= \left(2^{\beta}\right)^{\lambda} - 1^{\lambda} \\ &= (2^{\beta}-1)\left[\left(2^{\beta}\right)^{\lambda-1} + \left(2^{\beta}\right)^{\lambda-2} + \ . \ . \ . \ + 2^{\beta}\right] = (2^{\beta}-1)\cdot\nu, \quad \text{όπου } \nu \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

5.

Να αποδείξετε ότι

(i) Το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 6.

(ii) $6 \mid \alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{Z}$.

(iii) $6 \mid (\alpha^3+3\alpha^2-4\alpha)$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Λύση

(i)

Έστω $\alpha-1, \ \alpha, \ \alpha+1$ οι τρεις διαδοχικοί ακέραιοι

Είναι $\alpha = 6\mu + \upsilon$ με $\upsilon = 0, \ 1, \ 2, \ . \ . \ . \ , 5$

- Όταν $\upsilon = 0$, οπότε $\alpha = 6\mu$

  $(\alpha-1)\alpha(\alpha+1) = (\alpha-1)\,6\mu\,(\alpha+1) = 6(\quad\rho\quad)$, όπου $\rho \in \mathbb{Z}$
- Όταν $\upsilon = 1$, οπότε $\alpha = 6\mu + 1$

  $(\alpha-1)\alpha(\alpha+1) = (6\mu)(6\mu+1)(6\mu+2) = 6(\quad\kappa\quad)$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$
- Όταν $\upsilon = 2$, οπότε $\alpha = 6\mu + 2$

  $(\alpha-1)\alpha(\alpha+1) = (6\mu+1)(6\mu+2)(6\mu+3)$

  $= (6\mu+1)\,2(3\mu+1)\,3(2\mu+1) = 6(\quad\lambda\quad)$, όπου $\lambda \in \mathbb{Z}$

Ομοίως για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

(ii)

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha+1)(2\alpha+1) &= \alpha(\alpha+1)(\alpha+\alpha+2-1) \\ &= \alpha(\alpha+1)[(\alpha-1)+(\alpha+2)] \\ &= \alpha(\alpha+1)(\alpha-1) + \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \\ &\overset{(i)}{=} \text{πολ}\,6 + \text{πολ}\,6 = \text{πολ}\,6 \end{aligned}$$

(iii)

Από (i) είναι $(\alpha-1)\alpha(\alpha+1) = \text{πολ}\,6 \quad \Rightarrow$

$\alpha(\alpha^2-1) = \text{πολ}\,6$

$\alpha^3 - \alpha = \text{πολ}\,6$

$$\begin{aligned} \alpha^3+3\alpha^2-4\alpha &= \alpha^3+3\alpha^2-3\alpha-\alpha \\ &= (\alpha^3-\alpha) + 3\alpha(\alpha-1) \\ &\overset{*}{=} \text{πολ}\,6 + 3\cdot 2\mu = \text{πολ}\,6 + \text{πολ}\,6 = \text{πολ}\,6 \end{aligned}$$

$*$ Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος.

6.i)

Να αποδείξετε ότι $3 \mid (\nu^3 + 2\nu)$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι $\nu^3 + 2\nu = \pi o\lambda 3$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

Ελέγχουμε αν ισχύει για $\nu = 0$: $0^3 + 2 \cdot 0 = 0 = 3 \cdot 0 = \pi o\lambda 3$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο ν θετικό ακέραιο : $\nu^3 + 2\nu = \pi o\lambda 3$ **(1)**

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον $\nu + 1$, δηλαδή ότι

$(\nu+1)^3 + 2(\nu + 1) = \pi o\lambda 3$

Είναι $(\nu+1)^3 + 2(\nu + 1) = \nu^3 + 3\nu^2 + 3\nu + 1 + 2\nu + 2$

$$= (\nu^3 + 2\nu) + (3\nu^2 + 3\nu + 3)$$

$$\overset{(1)}{=} \pi o\lambda 3 + 3(\ \kappa\ )$$

$$= \pi o\lambda 3 + \pi o\lambda 3 = \pi o\lambda 3$$

6.ii)

Να αποδείξετε ότι $5 \mid (3 \cdot 27^\nu + 2 \cdot 2^\nu)$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι $3 \cdot 27^\nu + 2 \cdot 2^\nu = \pi o\lambda 5$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

Ελέγχουμε αν ισχύει για $\nu = 0$: $3 \cdot 27^0 + 2 \cdot 2^0 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5 = \pi o\lambda 5$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο ν θετικό ακέραιο : $3 \cdot 27^\nu + 2 \cdot 2^\nu = \pi o\lambda 5$ **(1)**

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον $\nu + 1$, δηλαδή ότι

$3 \cdot 27^{\nu+1} + 2 \cdot 2^{\nu+1} = \pi o\lambda 5$

Είναι $3 \cdot 27^{\nu+1} + 2 \cdot 2^{\nu+1} = 3 \cdot 27 \cdot 27^\nu + 2 \cdot 2 \cdot 2^\nu$

$$= 3 \cdot 27^\nu (25 + 2) + 4 \cdot 2^\nu$$

$$= 3 \cdot 27^\nu \cdot 25 + 6 \cdot 27^\nu + 4 \cdot 2^\nu$$

$$= 5(\ \lambda\ ) + 2(3 \cdot 27^\nu + 2 \cdot 2^\nu)$$

$$\overset{(1)}{=} 5(\ \lambda\ ) + 2 \cdot \pi o\lambda 5 = \pi o\lambda 5$$

6.iii)

Να αποδείξετε ότι $14 \mid (3^{4\nu+2}+5^{2\nu+1})$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι $3^{4\nu+2}+5^{2\nu+1} = \text{πολ}14$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

Ελέγχουμε αν ισχύει για $\nu = 0$: $3^{4\cdot 0+2}+5^{2\cdot 0+1} = 9 + 5 = 14 = \text{πολ}14$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο ν θετικό ακέραιο : $3^{4\nu+2}+5^{2\nu+1} = \text{πολ}14$ **(1)**

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον ν + 1, δηλαδή ότι

$$3^{4(\nu+1)+2}+5^{2(\nu+1)+1} = \text{πολ}14$$

Είναι
$$\begin{aligned}
3^{4(\nu+1)+2}+5^{2(\nu+1)+1} &= 3^{4\nu+4+2}+5^{2\nu+2+1}\\
&= 3^4\, 3^{4\nu+2} + 5^2\, 5^{2\nu+1}\\
&= 81\cdot 3^{4\nu+2} + 25\cdot 5^{2\nu+1}\\
&= (25+56)\, 3^{4\nu+2} + 25\cdot 5^{2\nu+1}\\
&= 25\cdot 3^{4\nu+2} + 56\cdot 3^{4\nu+2} + 25\cdot 5^{2\nu+1}\\
&= 25(3^{4\nu+2} + 5^{2\nu+1}) + 14\cdot 4\cdot 3^{4\nu+2}\\
&\overset{(1)}{=} 25\cdot\text{πολ}14 + \text{πολ}14 = \text{πολ}14
\end{aligned}$$

7.

Έστω α, β, κ, $\lambda \in \mathbb{Z}$ με $\kappa \neq \lambda$. Αν $(\kappa-\lambda) \mid (\kappa\alpha+\lambda\beta)$, να αποδείξετε ότι $(\kappa-\lambda) \mid (\lambda\alpha+\kappa\beta)$.

Λύση

$(\kappa-\lambda) \mid (\kappa\alpha+\lambda\beta) \Rightarrow \kappa\alpha+\lambda\beta = \text{πολ}(\kappa-\lambda)$

Είναι
$$\begin{aligned}
\lambda\alpha+\kappa\beta &= \lambda\alpha+\kappa\beta+\kappa\alpha-\kappa\alpha+\lambda\beta-\lambda\beta\\
&= (\kappa\alpha+\lambda\beta) + (\lambda\alpha-\kappa\alpha) + (\kappa\beta-\lambda\beta)\\
&= \text{πολ}(\kappa-\lambda) - \alpha(\kappa-\lambda) + \beta(\kappa-\lambda)\\
&= \text{πολ}(\kappa-\lambda) + (\kappa-\lambda)(\beta-\alpha)\\
&= \text{πολ}(\kappa-\lambda) + \text{πολ}(\kappa-\lambda) = \text{πολ}(\kappa-\lambda) \Rightarrow (\kappa-\lambda) \mid (\lambda\alpha+\kappa\beta).
\end{aligned}$$