1.3
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 26 - 29

Α΄ Ομάδας

1.
Αν $\vec{\alpha}$ είναι ένα διάνυσμα, τι μπορείτε να πείτε για το μέτρο και την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{\alpha}_0 = \frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}$;

Λύση

$$|\vec{\alpha}_0| = \left|\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}\right| = \left|\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\right| |\vec{\alpha}| = \frac{1}{|\vec{\alpha}|}|\vec{\alpha}| = 1$$

Επειδή $\frac{1}{|\vec{\alpha}|} > 0$, το διάνυσμα $\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}$ θα έχει ίδια κατεύθυνση με το $\vec{\alpha}$.

2.
Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ σε κάθε μια από τις περιπτώσεις:

(i) $\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{\alpha}) = \frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{\beta})$ (ii) $\vec{x}+3(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = 4(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) - 3\vec{x}$

Λύση

(i)

$$\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{\alpha}) = \frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{\beta}) \Leftrightarrow 3(\vec{x}+\vec{\alpha}) = 2(\vec{x}+\vec{\beta})$$
$$3\vec{x}+3\vec{\alpha} = 2\vec{x}+2\vec{\beta}$$
$$3\vec{x}-2\vec{x} = 2\vec{\beta} - 3\vec{\alpha}$$
$$\vec{x} = 2\vec{\beta} - 3\vec{\alpha}$$

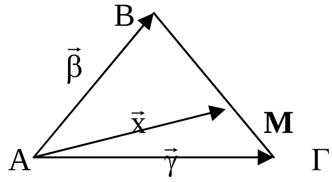
(ii)

$$\vec{x}+3(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = 4(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) - 3\vec{x} \Leftrightarrow \vec{x}+3\vec{\alpha}+3\vec{\beta} = 4\vec{\alpha}-4\vec{\beta}-3\vec{x}$$
$$4\vec{x} = \vec{\alpha} - 7\vec{\beta}$$
$$\vec{x} = \frac{1}{4}\vec{\alpha} - \frac{7}{4}\vec{\beta}$$

3.

Αν στο διπλανό σχήμα είναι (ΒΜ) = 2(ΜΓ),

να αποδείξετε ότι $\vec{x} = \frac{1}{3}(\vec{\beta} + 2\vec{\gamma})$



Λύση

Σημείο αναφοράς το Α.

Τα διανύσματα $\overrightarrow{ΒΜ}$, $\overrightarrow{ΜΓ}$ έχουν ίδια φορά, άρα η ισότητα (ΒΜ) = 2(ΜΓ) γίνεται

$$\overrightarrow{ΒΜ} = 2\overrightarrow{ΜΓ} \Leftrightarrow \overrightarrow{ΑΜ} - \overrightarrow{ΑΒ} = 2(\overrightarrow{ΑΓ} - \overrightarrow{ΑΜ}) \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{ΑΜ} - \overrightarrow{ΑΒ} = 2\overrightarrow{ΑΓ} - 2\overrightarrow{ΑΜ} \Leftrightarrow$$

$$3\overrightarrow{ΑΜ} = 2\overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΑΒ} \Leftrightarrow$$

$$3\vec{x} = \vec{\beta} + 2\vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{x} = \frac{1}{3}(\vec{\beta} + 2\vec{\gamma})$$

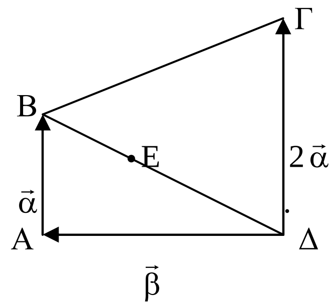
4.

Στο διπλανό σχήμα έχουμε ΔΕ = 2ΕΒ, $\overrightarrow{ΑΒ} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{ΔΓ} = 2\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{ΔΑ} = \vec{\beta}$.

(i) Να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{ΔΒ}$, $\overrightarrow{ΕΒ}$, $\overrightarrow{ΓΒ}$, $\overrightarrow{ΑΕ}$ και $\overrightarrow{ΕΓ}$.

(ii) Από τις εκφράσεις των $\overrightarrow{ΑΕ}$ και $\overrightarrow{ΕΓ}$ ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τα σημεία Α, Ε και Γ;

Λύση



(i)

$\overrightarrow{ΔΒ} = \overrightarrow{ΔΑ} + \overrightarrow{ΑΒ} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$

Τα διανύσματα $\overrightarrow{ΔΕ}$, $\overrightarrow{ΕΒ}$ έχουν ίδια φορά,

άρα η ισότητα ΔΕ = 2ΕΒ γίνεται $\overrightarrow{ΔΕ} = 2\overrightarrow{ΕΒ}$

Είναι $\overrightarrow{ΔΕ} + \overrightarrow{ΕΒ} = \overrightarrow{ΔΒ} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{ΕΒ} + \overrightarrow{ΕΒ} = \overrightarrow{ΔΒ}$

$$3\overrightarrow{ΕΒ} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$$

$$\overrightarrow{ΕΒ} = \frac{1}{3}(\vec{\beta} + \vec{\alpha})$$

$$\overrightarrow{ΓΒ} = \overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{ΔΑ} + \overrightarrow{ΑΒ} = -2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\alpha} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$$

$$\overrightarrow{ΑΕ} = \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΕ} = \vec{\alpha} - \overrightarrow{ΕΒ} = \vec{\alpha} - \frac{1}{3}(\vec{\beta} + \vec{\alpha})$$

$$= \frac{1}{3}(3\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\alpha}) = \frac{1}{3}(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$$

$$\overrightarrow{ΕΓ} = \overrightarrow{ΕΒ} + \overrightarrow{ΒΓ} = \frac{1}{3}(\vec{\beta} + \vec{\alpha}) - \overrightarrow{ΓΒ}$$

$$= \frac{1}{3}(\vec{\beta} + \vec{\alpha}) - (\vec{\beta} - \vec{\alpha})$$

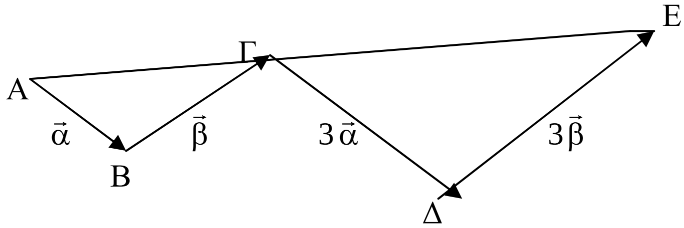
$$= \frac{1}{3}(\vec{\beta} + \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} + 3\vec{\alpha}) = \frac{1}{3}(4\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = \frac{2}{3}(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$$

(ii)

Από τις εκφράσεις των $\overrightarrow{ΑΕ}$ και $\overrightarrow{ΕΓ}$ που βρήκαμε $\Rightarrow$ $\overrightarrow{ΕΓ} = 2\overrightarrow{ΑΕ}$ $\Rightarrow$ τα σημεία Α, Ε, Γ είναι συνευθειακά.

5.

Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ και Ε είναι συνευθειακά.



Λύση

$\overrightarrow{ΑΓ} = \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΓ} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

$\overrightarrow{ΓΕ} = \overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{ΔΕ} = 3\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = 3(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

Άρα $\overrightarrow{ΓΕ} = 3\overrightarrow{ΑΓ} \Rightarrow$ τα σημεία Α, Γ και Ε είναι συνευθειακά.

6.

Αν $\overrightarrow{ΑΚ} + 3\overrightarrow{ΒΚ} - 2\overrightarrow{ΒΑ} = \overrightarrow{ΒΛ} + 3\overrightarrow{ΑΜ}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά.

Λύση

Σημείο αναφοράς το Κ.

$\overrightarrow{ΑΚ} + 3\overrightarrow{ΒΚ} - 2\overrightarrow{ΒΑ} = \overrightarrow{ΒΛ} + 3\overrightarrow{ΑΜ} \quad \Rightarrow$

$-\overrightarrow{ΚΑ} - 3\overrightarrow{ΚΒ} - 2(\overrightarrow{ΚΑ} - \overrightarrow{ΚΒ}) = \overrightarrow{ΚΛ} - \overrightarrow{ΚΒ} + 3(\overrightarrow{ΚΜ} - \overrightarrow{ΚΑ}) \quad \Rightarrow$

$-\overrightarrow{ΚΑ} - 3\overrightarrow{ΚΒ} - 2\overrightarrow{ΚΑ} + 2\overrightarrow{ΚΒ} = \overrightarrow{ΚΛ} - \overrightarrow{ΚΒ} + 3\overrightarrow{ΚΜ} - 3\overrightarrow{ΚΑ} \quad \Rightarrow$

$\vec{0} = \overrightarrow{ΚΛ} + 3\overrightarrow{ΚΜ} \quad \Rightarrow$

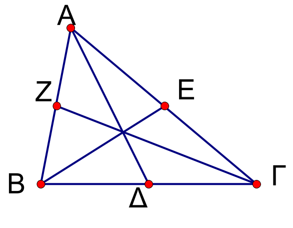
$\overrightarrow{ΚΛ} = -3\overrightarrow{ΚΜ} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{ΚΛ} \parallel \overrightarrow{ΚΜ} \quad \Rightarrow$ Κ, Λ και Μ συνευθειακά.

7.

Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι

$\overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΒΕ} + \overrightarrow{ΓΖ} = \vec{0}$

Λύση



$\overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΒΕ} + \overrightarrow{ΓΖ} =$

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΓ}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ΒΑ} + \overrightarrow{ΒΓ}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ΓΒ} + \overrightarrow{ΓΑ}) =$

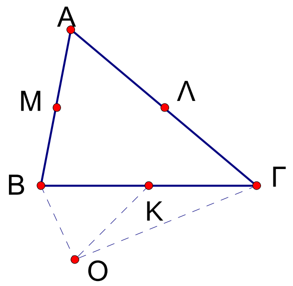
$\frac{1}{2}(\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΒΑ} + \overrightarrow{ΒΓ} + \overrightarrow{ΓΒ} + \overrightarrow{ΓΑ}) = \frac{1}{2}\vec{0} = \vec{0}$

8.

Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, αντιστοίχως, τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Ο ισχύει :

$\overrightarrow{ΟΑ} + \overrightarrow{ΟΒ} + \overrightarrow{ΟΓ} = \overrightarrow{ΟΚ} + \overrightarrow{ΟΛ} + \overrightarrow{ΟΜ}$

Λύση

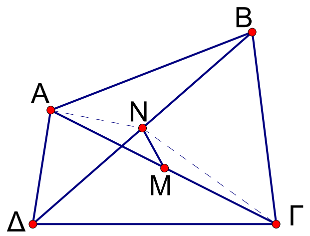


$$\overrightarrow{ΟΚ} + \overrightarrow{ΟΛ} + \overrightarrow{ΟΜ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ΟΒ} + \overrightarrow{ΟΓ}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ΟΑ} + \overrightarrow{ΟΓ}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ΟΑ} + \overrightarrow{ΟΒ}) =$$
$$= \frac{1}{2}(2\overrightarrow{ΟΑ} + 2\overrightarrow{ΟΒ} + 2\overrightarrow{ΟΓ}) =$$
$$= \overrightarrow{ΟΑ} + \overrightarrow{ΟΒ} + \overrightarrow{ΟΓ}$$

9.

Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ, αντιστοίχως, ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΓΒ} + \overrightarrow{ΓΔ} = 4\,\overrightarrow{ΜΝ}$.

Λύση



$\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΔ} = 2\,\overrightarrow{ΑΝ}$

$\overrightarrow{ΓΒ} + \overrightarrow{ΓΔ} = 2\,\overrightarrow{ΓΝ}$

Άρα $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΓΒ} + \overrightarrow{ΓΔ} = 2(\overrightarrow{ΑΝ} + \overrightarrow{ΓΝ})$ **(1)**

$\overrightarrow{ΝΑ} + \overrightarrow{ΝΓ} = 2\,\overrightarrow{ΝΜ} \Rightarrow \overrightarrow{ΑΝ} + \overrightarrow{ΓΝ} = 2\,\overrightarrow{ΜΝ}$

$(1) \Rightarrow \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΓΒ} + \overrightarrow{ΓΔ} = 4\,\overrightarrow{ΜΝ}$.

10.

Δίνεται το μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΒ}$ και σημείο Γ τέτοιο ώστε να ισχύει

$\overrightarrow{ΑΓ} = λ\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΒΓ} = μ\overrightarrow{ΑΒ}$. Να αποδείξετε ότι $λ - μ = 1$.

Λύση

Σημείο αναφοράς το Α

$\overrightarrow{ΒΓ} = μ\overrightarrow{ΑΒ} \Rightarrow \overrightarrow{ΑΓ} - \overrightarrow{ΑΒ} = μ\overrightarrow{ΑΒ} \Rightarrow$

$λ\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΑΒ} = μ\overrightarrow{ΑΒ} \Rightarrow$

$(λ - 1)\overrightarrow{ΑΒ} = μ\overrightarrow{ΑΒ}$ και επειδή $\overrightarrow{ΑΒ} \neq \vec{0}$, θα είναι

$λ - 1 = μ$ άρα $λ - μ = 1$.

11.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν $\overrightarrow{ΑΔ} = κ\overrightarrow{ΑΒ} + λ\overrightarrow{ΑΓ}$ και $\overrightarrow{ΑΕ} = λ\overrightarrow{ΑΒ} + κ\overrightarrow{ΑΓ}$ να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ΔΕ} \parallel \overrightarrow{ΒΓ}$.

Λύση

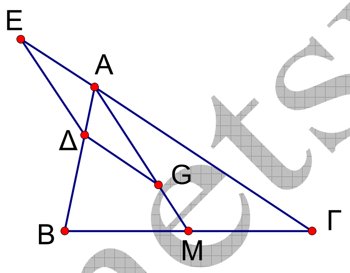
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{ΔΕ} = \overrightarrow{ΑΕ} - \overrightarrow{ΑΔ} &= λ\overrightarrow{ΑΒ} + κ\overrightarrow{ΑΓ} - (κ\overrightarrow{ΑΒ} + λ\overrightarrow{ΑΓ}) \\
&= λ\overrightarrow{ΑΒ} + κ\overrightarrow{ΑΓ} - κ\overrightarrow{ΑΒ} - λ\overrightarrow{ΑΓ} \\
&= (λ - κ)\overrightarrow{ΑΒ} - (λ - κ)\overrightarrow{ΑΓ} \\
&= (λ - κ)(\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΑΓ}) \\
&= (λ - κ)\overrightarrow{ΓΒ} \\
&= (κ - λ)\overrightarrow{ΒΓ} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{ΔΕ} \parallel \overrightarrow{ΒΓ}.
\end{aligned}$$

Β΄ Ομάδας

1.

Στο διπλανό σχήμα είναι $\overrightarrow{ΑΔ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΕ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{ΑΓ}$. Αν G είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο AGΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overrightarrow{ΕΔ} = \overrightarrow{AG}$

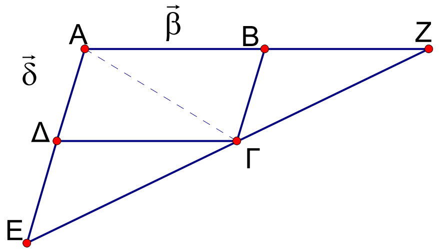
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{ΕΔ} &= \overrightarrow{ΑΔ} - \overrightarrow{ΑΕ} \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{ΑΒ} + \frac{1}{3}\overrightarrow{ΑΓ} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΓ})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{ΑΜ} \\
&= \frac{2}{3}\,\frac{1}{2}(\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΓ}) \\
&= \frac{1}{3}(\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΓ})
\end{aligned}$$

2.

Θεωρούμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και δύο σημεία Ε και Ζ τέτοια, ώστε $\overrightarrow{AE} = \kappa\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AZ} = \lambda\overrightarrow{AB}$, όπου $\lambda = \dfrac{\kappa}{\kappa-1}$, με $\kappa \neq 1$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ε, Γ και Ζ είναι συνευθειακά.

Λύση



Έστω $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\delta}$ τότε

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta} + \vec{\delta}$$

$$\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{A\Gamma} = \kappa\vec{\delta} - (\vec{\beta} + \vec{\delta}) = \kappa\vec{\delta} - \vec{\beta} - \vec{\delta} = (\kappa-1)\vec{\delta} - \vec{\beta} \qquad \mathbf{(1)}$$

$$\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AE} = \lambda\vec{\beta} - \kappa\vec{\delta} = \frac{\kappa}{\kappa-1}\vec{\beta} - \kappa\vec{\delta} = \frac{\kappa}{\kappa-1}[\vec{\beta} - (\kappa-1)\vec{\delta}] =$$

$$= -\frac{\kappa}{\kappa-1}[(\kappa-1)\vec{\delta} - \vec{\beta}] \qquad \mathbf{(2)}$$

(1), (2) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{EZ} = -\dfrac{\kappa}{\kappa-1}\overrightarrow{\Gamma E}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{EZ} \parallel \overrightarrow{\Gamma E}$ $\Rightarrow$ Ε, Γ, Ζ συνευθειακά

3.

Να αποδείξετε ότι, αν ισχύουν δύο από τις σχέσεις $x\overrightarrow{KA} + y\overrightarrow{KB} + z\overrightarrow{K\Gamma} = \vec{0}$, $x\overrightarrow{\Lambda A} + y\overrightarrow{\Lambda B} + z\overrightarrow{\Lambda\Gamma} = \vec{0}$, $x + y + z = 0$, τότε θα ισχύει και η τρίτη. (Δίνεται $K \neq \Lambda$)

Λύση

- Υποθέσεις : $x\overrightarrow{KA} + y\overrightarrow{KB} + z\overrightarrow{K\Gamma} = \vec{0}$ και $x\overrightarrow{\Lambda A} + y\overrightarrow{\Lambda B} + z\overrightarrow{\Lambda\Gamma} = \vec{0}$

  Αφαιρούμε κατά μέλη

  $x(\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{\Lambda A}) + y(\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{\Lambda B}) + z(\overrightarrow{K\Gamma} - \overrightarrow{\Lambda\Gamma}) = \vec{0} \Rightarrow$

  $x(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{A\Lambda}) + y(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{B\Lambda}) + z(\overrightarrow{K\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Lambda}) = \vec{0} \Rightarrow$

  $x\overrightarrow{K\Lambda} + y\overrightarrow{K\Lambda} + z\overrightarrow{K\Lambda} = \vec{0} \Rightarrow$

  $(x + y + z)\overrightarrow{K\Lambda} = \vec{0} \Rightarrow x + y + z = 0$

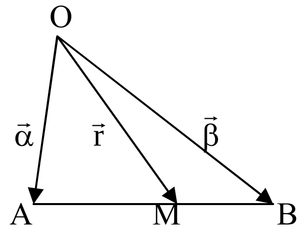
- Υποθέσεις : $x\overrightarrow{KA} + y\overrightarrow{KB} + z\overrightarrow{K\Gamma} = \vec{0}$ και $x + y + z = 0$

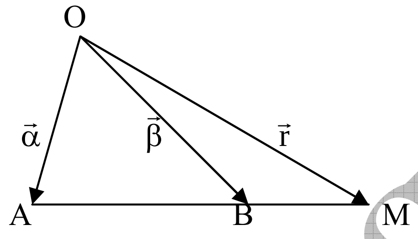
$$\begin{aligned} x\overrightarrow{\Lambda A} + y\overrightarrow{\Lambda B} + z\overrightarrow{\Lambda\Gamma} &= x(\overrightarrow{\Lambda K} + \overrightarrow{KA}) + y(\overrightarrow{\Lambda K} + \overrightarrow{KB}) + z(\overrightarrow{\Lambda K} + \overrightarrow{K\Gamma}) \\ &= x\overrightarrow{\Lambda K} + x\overrightarrow{KA} + y\overrightarrow{\Lambda K} + y\overrightarrow{KB} + z\overrightarrow{\Lambda K} + z\overrightarrow{K\Gamma} \\ &= (x + y + z)\overrightarrow{\Lambda K} + (x\overrightarrow{KA} + y\overrightarrow{KB} + z\overrightarrow{K\Gamma}) \\ &= 0.\overrightarrow{\Lambda K} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

- Η τρίτη περίπτωση είναι όμοια με τη δεύτερη

4.

Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{r}$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων Α, Β και Μ αντιστοίχως και $\frac{MA}{MB} = \frac{\kappa}{\lambda}$, να αποδείξετε ότι, αν το Μ είναι εσωτερικό σημείο του ΑΒ, τότε $\vec{r} = \frac{\lambda\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}}{\lambda+\kappa}$, ενώ αν το Μ είναι εξωτερικό σημείο του ΑΒ, τότε $\vec{r} = \frac{\lambda\vec{\alpha}-\kappa\vec{\beta}}{\lambda+\kappa}$.





Λύση

Είναι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

- Όταν το Μ είναι εσωτερικό σημείο του ΑΒ

$$\frac{MA}{MB} = \frac{\kappa}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad MA = \frac{\kappa}{\lambda} MB$$

$$\overrightarrow{MA} = -\frac{\kappa}{\lambda}\overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = -\frac{\kappa}{\lambda}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$$

$$\lambda\vec{\alpha} - \lambda\vec{r} = -\kappa\vec{\beta} + \kappa\vec{r}$$

$$\lambda\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta} = \kappa\vec{r} + \lambda\vec{r}$$

$$(\kappa+\lambda)\,\vec{r} = \lambda\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \frac{\lambda\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}}{\lambda+\kappa}$$

- Όταν το Μ είναι εξωτερικό σημείο του ΑΒ

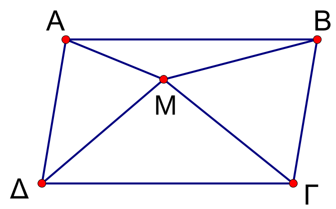
  Είναι $\overrightarrow{MA} = \frac{\kappa}{\lambda}\overrightarrow{MB}$ και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο

5.

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε σημείο Μ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$\overrightarrow{ΜΑ}+\overrightarrow{ΜΒ}+\overrightarrow{ΜΓ}=\overrightarrow{ΜΔ}$.

Λύση



Σημείο αναφοράς το Α.

$\overrightarrow{ΜΑ}+\overrightarrow{ΜΒ}+\overrightarrow{ΜΓ}=\overrightarrow{ΜΔ} \Leftrightarrow$

$-\overrightarrow{ΑΜ}+\overrightarrow{ΑΒ}-\overrightarrow{ΑΜ}+\overrightarrow{ΑΓ}-\overrightarrow{ΑΜ}=\overrightarrow{ΑΔ}-\overrightarrow{ΑΜ} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{ΑΒ}+\overrightarrow{ΑΓ}-\overrightarrow{ΑΔ}=2\overrightarrow{ΑΜ} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{ΑΒ}+\overrightarrow{ΔΓ}=2\overrightarrow{ΑΜ} \Leftrightarrow$

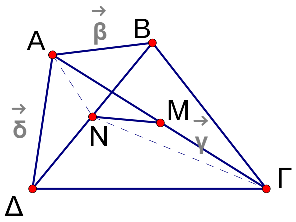
$2\overrightarrow{ΑΒ}=2\overrightarrow{ΑΜ} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{ΑΒ}=\overrightarrow{ΑΜ} \Leftrightarrow Μ\equiv Β$. Το ζητούμενο σημείο είναι το Β

6.

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Μ και Ν τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι αν $4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{B\Gamma}$, τότε το τετράπλευρο αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση



Με σημείο αναφοράς το Α, ορίζουμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ θεωρώντας τα διανύσματα

$\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\gamma}$, $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\delta}$.

Είναι $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB} = \vec{\gamma} - \vec{\beta}$

$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\delta} - \vec{\gamma}$

$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta}) = \frac{1}{2}(\vec{\beta} + \vec{\delta})$

$$\overrightarrow{\Gamma N} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}) = \frac{1}{2}(\vec{\beta} - \vec{\gamma} + \vec{\delta} - \vec{\gamma})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{\beta} - 2\vec{\gamma} + \vec{\delta})$$

$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{N\Gamma}) = \frac{1}{2}[-\frac{1}{2}(\vec{\beta} + \vec{\delta}) - \frac{1}{2}(\vec{\beta} - 2\vec{\gamma} + \vec{\delta})]$$

$$= -\frac{1}{4}(\vec{\beta} + \vec{\delta} + \vec{\beta} - 2\vec{\gamma} + \vec{\delta})$$

$$= -\frac{1}{4}(2\vec{\beta} - 2\vec{\gamma} + 2\vec{\delta})$$

$$= -\frac{1}{2}(\vec{\beta} - \vec{\gamma} + \vec{\delta}) \qquad \textbf{(1)}$$

$$4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{B\Gamma} \Rightarrow 4[\frac{1}{2}(\vec{\beta} - \vec{\gamma} + \vec{\delta})] = \vec{\delta} - (\vec{\gamma} - \vec{\beta})$$

$$2\vec{\beta} - 2\vec{\gamma} + 2\vec{\delta} = \vec{\delta} - \vec{\gamma} + \vec{\beta}$$

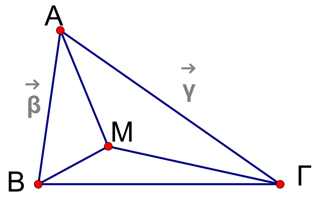
$$\vec{\beta} - \vec{\gamma} + \vec{\delta} = \vec{0}$$

(1) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{NM} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $N \equiv M$ $\Rightarrow$ οι διαγώνιοι διχοτομούνται άρα είναι παραλληλόγραμμο.

8.

Δίνονται τα σημεία Α, Β και Γ. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ το διάνυσμα $3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι σταθερό.

Λύση

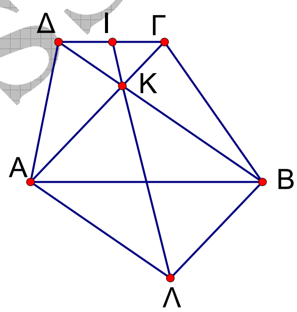


Με σημείο αναφοράς το Α, ορίζουμε τα σημεία Β και Γ θεωρώντας τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\gamma}$.

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{M\Gamma} &= 3(-\overrightarrow{AM})-5(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM})+2(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AM})\\ &= -3\overrightarrow{AM}-5\vec{\beta}+5\overrightarrow{AM}+2\vec{\gamma}-2\overrightarrow{AM}\\ &= 2\vec{\gamma}-5\vec{\beta} \quad \text{που είναι σταθερό}\end{aligned}$$

9.

Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο με (ΑΒ) = 2(ΓΔ), το ΚΑΛΒ παραλληλόγραμμο και το Ι μέσο του ΓΔ. Να αποδείξετε ότι



(i) $\overrightarrow{K\Gamma}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}$ και $\overrightarrow{K\Delta}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{KB}$

(ii) τα σημεία Ι, Κ, Λ είναι συνευθειακά.

Λύση

(i)

Τα τρίγωνα ΚΓΔ, ΚΑΒ είναι όμοια $\Rightarrow$

$$\frac{K\Gamma}{KA}=\frac{K\Delta}{KB}=\frac{\Delta\Gamma}{AB}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$(K\Gamma)=\frac{1}{2}(KA)$ και $(K\Delta)=\frac{1}{2}(KB)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{K\Gamma}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}$ και $\overrightarrow{K\Delta}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{KB}$

(ii)

$$\overrightarrow{KI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{K\Gamma}+\overrightarrow{K\Delta})=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{KB}\right)=-\frac{1}{4}(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB})=-\frac{1}{4}\overrightarrow{K\Lambda}\Rightarrow$$

$\overrightarrow{KI}\parallel\overrightarrow{K\Lambda}$ $\Rightarrow$ Ι, Κ, Λ συνευθειακά.