4.2
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 145

Α΄ Ομάδας

1.
Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον β σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

(i) $\alpha = 83$ και $\beta = 11$ **(ii)** $\alpha = -83$ και $\beta = 11$
(iii) $\alpha = 83$ και $\beta = -11$ **(iv)** $\alpha = -83$ και $\beta = -11$

Λύση

(i)
Είναι $83 = 11\cdot 7 + 6$ άρα $\Pi = 7$ και $\upsilon = 6$

(ii)
Είναι $83 = 11\cdot 7 + 6 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} -83 &= -11\cdot 7 - 6 \\ &= 11\cdot(-7) - 11 + 11 - 6 \\ &= 11(-7-1) + 5 \\ &= 11\cdot(-8) + 5 \end{aligned}$$

άρα $\Pi = -8$ και $\upsilon = 5$

(iii)
Είναι $83 = 11\cdot 7 + 6 \Rightarrow 83 = -11\cdot(-7) + 6$ άρα $\Pi = -7$ και $\upsilon = 6$

(iv)
Είναι $83 = 11\cdot 7 + 6 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} -83 &= -11\cdot 7 - 11 + 11 - 6 \\ &= -11(7+1) + 5 \\ &= -11\cdot 8 + 5 \end{aligned}$$

άρα $\Pi = 8$ και $\upsilon = 5$

2.
Να αποδείξετε ότι :
(i) Το τετράγωνο ενός ακεραίου α παίρνει τη μορφή :
$\alpha^2 = 3\kappa,\ \kappa\in\mathbb{Z}$ ή $\alpha^2 = 3\kappa + 1,\ \kappa\in\mathbb{Z}$
(ii) Κάθε ακέραιος α της μορφής $\alpha = 6\kappa + 5,\ \kappa\in\mathbb{Z}$ μπορεί να πάρει τη μορφή $\alpha = 3\lambda + 2,\ \lambda\in\mathbb{Z}$. Ισχύει το αντίστροφο;

Λύση

(i)
Ο ακέραιος α διαιρούμενος με τον 3 θα είναι $\alpha = 3\mu$ ή $\alpha = 3\mu + 1$ ή $\alpha = 3\mu + 2$

- Όταν $\alpha = 3\mu$ τότε $\alpha^2 = (3\mu)^2 = 9\mu^2 = 3\cdot 3\mu^2 = 3\kappa$ (όπου $3\mu^2 = \kappa$)

- Όταν $\alpha = 3\mu + 1$ τότε
$$\alpha^2 = (3\mu + 1)^2 = 9\mu^2 + 6\mu + 1 = 3(3\mu^2 + 2\mu) + 1 = 3\kappa + 1 \quad (\text{όπου } 3\mu^2 + 2\mu = \kappa)$$
- Όταν $\alpha = 3\mu + 2$ τότε
$$\alpha^2 = (3\mu + 2)^2 = 9\mu^2 + 12\mu + 4 = 9\mu^2 + 12\mu + 3 + 1 = 3(3\mu^2 + 4\mu + 1) + 1 = 3\kappa + 1 \quad (\text{όπου } 3\mu^2 + 4\mu + 1 = \kappa)$$

(ii)
$\alpha = 6\kappa + 5 = 6\kappa + 3 + 2 = 3(2\kappa + 1) + 2 = 3\lambda + 2$ (όπου $2\kappa + 1 = \lambda$)
Αν ίσχυε το αντίστροφο, τότε θα ήταν $3\lambda + 2 = 6\kappa + 5$
$3\lambda = 6\kappa + 3$
$\lambda = 2\kappa + 1$ που μπορεί να είναι άτοπο.

3.
Αν α είναι ένας περιττός ακέραιος, να αποδείξετε ότι
$$\frac{\alpha^2 + (\alpha+2)^2 + (\alpha+4)^2 + 1}{12} \in \mathbb{Z}$$

Λύση
Έστω $\alpha = 2\mu + 1$, τότε
$$\frac{\alpha^2 + (\alpha+2)^2 + (\alpha+4)^2 + 1}{12} =$$
$$= \frac{1}{12}[(2\mu + 1)^2 + (2\mu + 3)^2 + (2\mu + 5)^2 + 1]$$
$$= \frac{1}{12}(4\mu^2 + 4\mu + 1 + 4\mu^2 + 12\mu + 9 + 4\mu^2 + 20\mu + 25 + 1)$$
$$= \frac{1}{12}(12\mu^2 + 36\mu + 36) = \mu^2 + 3\mu + 3 \in \mathbb{Z}$$

4.

Μπορεί ο αριθμός 25 να γραφεί ως άθροισμα 10 προσθετέων, καθένας από τους οποίους να είναι όσος με 1 ή 3 ή 5;

Λύση

Έστω ότι γράφεται χρησιμοποιώντας λ φορές το 1, μ φορές το 3 και ν φορές το 5

Τότε $25 = \lambda\cdot 1 + \mu\cdot 3 + \nu\cdot 5$ **(1)** και $\lambda + \mu + \nu = 10 \Rightarrow \lambda = 10 - \mu - \nu$.

$(1) \Rightarrow 25 = 10 - \mu - \nu + 3\mu + 5\nu$

$15 = 2\mu + 4\nu$

$15 = 2(\mu + 2\nu)$ άτοπο αφού ο 15 είναι περιττός και ο $2(\mu + 2\nu)$ άρτιος.

Β΄ Ομάδας

1.

Για ποιες τιμές του θετικού ακεραίου β το πηλίκο της διαίρεσης του 660 με τον β είναι ίσο με 17; Ποιο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης αυτής σε καθεμιά περίπτωση;

Λύση

Θα έχουμε $660 = 17\beta + \upsilon$, με $0 \le \upsilon < \beta \Rightarrow$

$660 - 17\beta = \upsilon$, με $0 \le \upsilon < \beta \Rightarrow$

$0 \le 660 - 17\beta < \beta \Rightarrow$

$0 \le 660 - 17\beta$ και $660 - 17\beta < \beta \Rightarrow$

$17\beta \le 660$ και $660 < 18\beta \Rightarrow$

$\beta \le \dfrac{660}{17}$ και $\beta > \dfrac{660}{18} \Rightarrow$

$\beta \le 38,\dots$ και $\beta > 36,\dots \Rightarrow$

$\beta \le 38$ και $\beta \ge 37 \Rightarrow \beta = 37$ ή 38

Από την ισότητα $\upsilon = 660 - 17\beta$, βρίσκουμε το υπόλοιπο σε καθεμιά περίπτωση.

- $\upsilon = 660 - 17\cdot 37 = 31$
- $\upsilon = 660 - 17\cdot 38 = 14$

2.

Αν α, β, γ είναι περιττοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.

Έχει ακέραιες λύσεις η εξίσωση $x^2 + 3^{1997}x + 2001 = 0$;

Λύση

Αποδεικνύουμε ότι το τετράγωνο άρτιου είναι άρτιος και
το τετράγωνο περιττού είναι περιττός

$\alpha = 2\kappa \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = 4\kappa^2 = 2(2\kappa^2) = 2\nu$

$\alpha = 2\kappa + 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 = 2(2\kappa^2 + 2\kappa) + 1 = 2\mu + 1$

- Έστω ότι η εξίσωση έχει ρίζα x άρτιο.
  Τότε x^2 άρτιος $\Rightarrow$
  αx^2 άρτιος $\Rightarrow$
  $\alpha x^2 + \beta x$ άρτιος $\Rightarrow$
  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ περιττός $\Rightarrow$ 0 περιττός, που είναι άτοπο

- Έστω ότι η εξίσωση έχει ρίζα x περιττό.
  Τότε x^2 περιττός
  αx^2 περιττός $\Rightarrow$
  $\alpha x^2 + \beta x$ άρτιος $\Rightarrow$
  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ περιττός $\Rightarrow$ 0 περιττός, που είναι άτοπο

Αποδεικνύουμε ότι το γινόμενο περιττών είναι περιττός.

$\alpha\cdot\beta = (2\kappa + 1)(2\mu + 1) = 4\kappa\mu + 2\kappa + 2\mu + 1 = 2(2\kappa\mu + \kappa + \mu) + 1 = 2\lambda + 1$

$\alpha\beta\gamma = (\alpha\beta)\gamma$ κ.λ.π για οσουσδήποτε παράγοντες

$3^{1997} = 3\cdot3\cdot3 \, . \; . \; . \cdot 3 =$ περιττός

Η εξίσωση $x^2 + 3^{1997}x + 2001 = 0$ είναι της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με α, β, γ περιττούς, άρα δεν έχει ακέραιες λύσεις.

3.

Αν α, β είναι δύο περιττοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι

(i) $\dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{8} \in \mathbb{Z}$ και **(ii)** $\dfrac{\alpha^4 + \beta^4 - 2}{16} \in \mathbb{Z}$

Λύση

Από την εφαρμογή (2) είναι $\alpha^2 = 8\lambda + 1$ και $\beta^2 = 8\mu + 1$

(i)

$$\alpha^2 - \beta^2 = 8(\lambda - \mu) \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha^2 - \beta^2}{8} = \lambda - \mu \in \mathbb{Z}$$

(ii)

$$\alpha^4 + \beta^4 - 2 = (8\lambda + 1)^2 + (8\mu + 1)^2 - 2$$
$$= 64\lambda^2 + 16\lambda + 1 + 64\mu^2 + 16\mu + 1 - 2 = 16(\quad \kappa \quad)$$

4.

Για ποιες τιμές του ακεραίου κ ο αριθμός $\frac{3\kappa+4}{5}$ είναι ακέραιος ;

Λύση

Από την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε

$\kappa = 5\lambda + \upsilon$ με $\upsilon = 0, 1, 2, 3, 4$

$\frac{3\kappa+4}{5} = \frac{3(5\lambda+\upsilon)+4}{5} = \frac{15\lambda+3\upsilon+4}{5} = 3\lambda + \frac{3\upsilon+4}{5}$ με $\upsilon = 0, 1, 2, 3, 4$

- Για $\upsilon = 0$ θα είναι $\frac{3\kappa+4}{5} = 3\lambda + \frac{4}{5} \notin \mathbb{Z}$
- Για $\upsilon = 1$ θα είναι $\frac{3\kappa+4}{5} = 3\lambda + \frac{3+4}{5} = 3\lambda + \frac{7}{5} \notin \mathbb{Z}$
- Για $\upsilon = 2$ θα είναι $\frac{3\kappa+4}{5} = 3\lambda + \frac{3\cdot 2+4}{5} = 3\lambda + 2 \in \mathbb{Z}$
- Για $\upsilon = 3$ θα είναι $\frac{3\kappa+4}{5} = 3\lambda + \frac{3\cdot 3+4}{5} = 3\lambda + \frac{13}{5} \notin \mathbb{Z}$
- Για $\upsilon = 4$ θα είναι $\frac{3\kappa+4}{5} = 3\lambda + \frac{3\cdot 4+4}{5} = 3\lambda + \frac{16}{5} \notin \mathbb{Z}$

Επομένως $\kappa = 5\lambda + 2$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

5.

Να αποδείξετε ότι :

(i) Το τετράγωνο ενός άρτιου είναι της μορφής $\alpha^2 = 4\lambda,\ \lambda \in \mathbb{Z}$, ενώ το τετράγωνο ενός περιττού είναι της μορφής $\alpha^2 = 4\lambda + 1,\ \lambda \in \mathbb{Z}$.

(ii) Αν α, β είναι περιττοί ακέραιοι, τότε η εξίσωση $x^2 = \alpha^2 + \beta^2$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

(iii) Κανένας από τους όρους της αριθμητικής προόδου 6, 10, 14, 18, 22, . . . δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού.

Λύση

(i)

$\alpha = 2\kappa \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = 4\kappa^2 = 4\lambda$, όπου $\kappa^2 = \lambda$

$\alpha = 2\kappa + 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 = 4(\kappa^2 + \kappa) + 1 = 4\lambda + 1$, όπου $\kappa^2 + \kappa = \lambda$

(ii)

Από (i) είναι $\alpha^2 = 4\lambda + 1$ και $\beta^2 = 4\mu + 1$, άρα $\alpha^2 + \beta^2 = 4(\lambda + \mu) + 2$.

Έστω ότι η εξίσωση έχει ακέραια ρίζα x. Τότε $x^2 = 4\kappa$ ή $4\kappa + 1$

- Όταν $x^2 = 4\kappa$, η εξίσωση $\Rightarrow$ $4\kappa = 4(\lambda + \mu) + 2$
  $4(\kappa - \lambda - \mu) = 2$
  $\kappa - \lambda - \mu = \frac{1}{2}$ άτοπο
- Όταν $x^2 = 4\kappa + 1$, η εξίσωση $\Rightarrow$ $4\kappa + 1 = 4(\lambda + \mu) + 2$
  $4(\kappa - \lambda - \mu) = 1$
  $\kappa - \lambda - \mu = \frac{1}{4}$ άτοπο

(iii)

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 6 + (\nu - 1)4 = 6 + 4\nu - 4 = 4\nu + 2.$

Έστω ότι υπάρχει ακέραιος x τέτοιος, ώστε $x^2 = \alpha_\nu = 4\nu + 2.$ **(1)**

- Όταν $x^2 = 4\kappa$, η (1) $\Rightarrow$ $4\kappa = 4\nu + 2$
  $4(\kappa - \nu) = 2$
  $\kappa - \nu = \frac{1}{2}$ άτοπο
- Όταν $x^2 = 4\kappa + 1$, , η (1) $\Rightarrow$ $4\kappa + 1 = 4\nu + 2$
  $4(\kappa - \nu) = 1$
  $\kappa - \nu = \frac{1}{4}$ άτοπο