3.3
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 111 – 113

Α΄ Ομάδας

1.
Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

(i) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E΄(-4, 0)$ και $E(4, 0)$ και μεγάλο άξονα 10

(ii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E΄(0, -5)$ και $E(0, 5)$ και μεγάλο άξονα 26

(iii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E΄(-12, 0)$ και $E(12, 0)$ και εκκεντρότητα $\frac{12}{13}$

(iv) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E΄(-4, 0)$ και $E(4, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(4, \frac{9}{5})$

(v) Όταν έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, εστίες στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από τα σημεία $M_1(1, 1)$ και $M_2(2, \frac{1}{2})$

Λύση

(i)

Είναι $\gamma = 4$ και $\alpha = \frac{10}{2} = 5$, οπότε $\beta^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$, $C : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

(ii)

Είναι $\gamma = 5$ και $\alpha = \frac{26}{2} = 13$, οπότε $\beta^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$,

$C : \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$

(iii)

Είναι $\gamma = 12$ και $\varepsilon = \frac{12}{13}$, οπότε $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{12}{13} \Rightarrow \frac{12}{\alpha} = \frac{12}{13} \Rightarrow \alpha = 13$.

$\beta^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$, $C : \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$

(iv)

Έστω $C : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha^2 > \beta^2$ και $\beta^2 = \alpha^2 - 4^2 = \alpha^2 - 16$.

$$M \in C \Leftrightarrow \frac{4^2}{\alpha^2} + \frac{\left(\frac{9}{5}\right)^2}{\alpha^2 - 16} = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{\alpha^2} + \frac{\frac{81}{25}}{\alpha^2 - 16} = 1$$

$$\frac{16}{\alpha^2} + \frac{81}{25(\alpha^2 - 16)} = 1$$

$$16 .\, 25\,(\alpha^2 - 16) + 81\,\alpha^2 = 25\,\alpha^2\,(\alpha^2 - 16)$$

$$400\,\alpha^2 - 6400 + 81\,\alpha^2 = 25\,\alpha^4 - 400\,\alpha^2$$

$$25\,\alpha^4 - 881\,\alpha^2 + 6400 = 0$$

$\Delta = 776161 - 640000 = 136161 = 369^2$

$\alpha^2 = \dfrac{881 \pm 369}{50} = \dfrac{1250}{50}$ ή $\dfrac{512}{50}$

- Για $\alpha^2 = \dfrac{1250}{50} = 25$ θα είναι $\beta^2 = \alpha^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$,

  οπότε $C : \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

- Για $\alpha^2 = \dfrac{512}{50}$ θα είναι $\beta^2 = \alpha^2 - 4^2 = \dfrac{512}{50} - 16$

  $= \dfrac{512 - 800}{50}$

  $= -\dfrac{288}{50} < 0$ απορρίπτεται

(v)

Έστω $C : \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha^2 > \beta^2$ (Θέτουμε $\dfrac{1}{\alpha^2} = \mu$ και $\dfrac{1}{\beta^2} = \nu$)

Τότε $C : \mu x^2 + \nu y^2 = 1$

$M_1(1, 1) \in C \Leftrightarrow \mu + \nu = 1$ **(1)**

$M_2(2, \frac{1}{2}) \in C \Leftrightarrow \mu.4 + \nu.\frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow 16\mu + \nu = 4$ **(2)**

$(2) - (1) \Rightarrow 15\mu = 3 \Rightarrow \mu = \dfrac{1}{5}$

$(1) \Rightarrow \dfrac{1}{5} + \nu = 1 \Rightarrow 1 + 5\nu = 5 \Rightarrow 5\nu = 4 \Rightarrow \nu = \dfrac{4}{5}$.

Επομένως $C : \dfrac{1}{5}x^2 + \dfrac{4}{5}y^2 = 1$.

2.i)

Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα της έλλειψης $x^2 + 4y^2 = 4$

Λύση

$x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{1^2} = 1$

$\alpha = 2 \Rightarrow$ Μήκος του μεγάλου άξονα $= 2\alpha = 4$

$\beta = 1 \Rightarrow$ Μήκος του μικρού άξονα $= 2\beta = 2$

$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Rightarrow \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow \gamma = \sqrt{3}$

Εστίες : $E'(-\sqrt{3}, 0)$, $E(\sqrt{3}, 0)$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2.ii)

Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα της έλλειψης $169x^2 + 144y^2 = 24336$

Λύση

$$169x^2 + 144y^2 = 24336 \Leftrightarrow \frac{169x^2}{24336} + \frac{144y^2}{24336} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{24336}{169}} + \frac{y^2}{\frac{24336}{144}} = 1$$

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{12^2} + \frac{y^2}{13^2} = 1$$

$\beta = 12 \Rightarrow$ Μήκος του μικρού άξονα $= 2\beta = 24$

$\alpha = 13 \Rightarrow$ Μήκος του μεγάλου άξονα $= 2\alpha = 26$

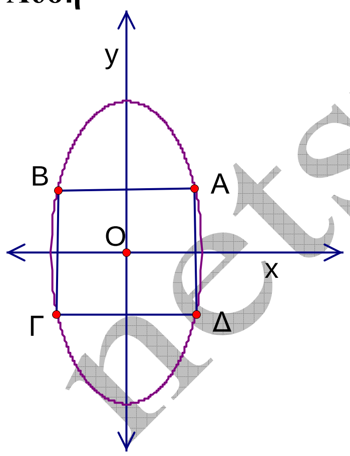
$$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Rightarrow \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 169 - 144 = 25 \Rightarrow \gamma = 5$$

Εστίες : Ε΄(0, -5), Ε(0,5) και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{13}$

3.

Να εγγράψετε στην έλλειψη $4x^2 + y^2 = 4$ τετράγωνο με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες.

Λύση



Έστω ΑΒΓΔ το ζητούμενο τετράγωνο με $A(x_1, y_1)$

Επειδή οι άξονες είναι άξονες συμμετρίας, θα είναι $B(-x_1, y_1)$, $\Gamma(-x_1, -y_1)$, $\Delta(x_1, -y_1)$

$$AB = A\Delta \Rightarrow 2x_1 = 2y_1 \Rightarrow x_1 = y_1$$

$A \in$ στην έλλειψη $\Rightarrow$

$$4x_1^2 + y_1^2 = 4$$
$$4x_1^2 + x_1^2 = 4$$
$$5x_1^2 = 4$$
$$x_1^2 = \frac{4}{5}$$
$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

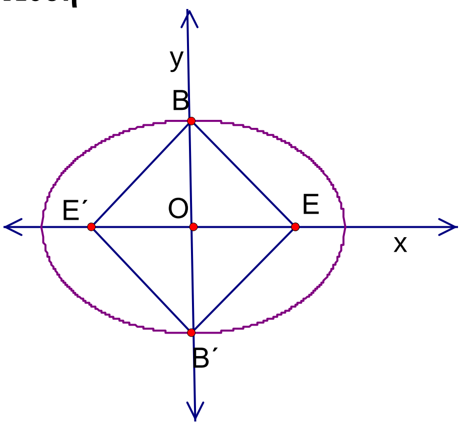
Άρα $A\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $B\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$,

$\Gamma\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $\Delta\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

4.

Αν Ε΄, Ε είναι οι εστίες και Β΄Β ο μικρός άξονας της έλλειψης $x^2+2y^2=4$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΒ΄Ε΄ είναι τετράγωνο.

Λύση



$$x^2+2y^2=4 \iff \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$$

Είναι $\alpha^2=4$ και $\beta^2=2$, $\beta=\sqrt{2}$

$\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=4-2=2 \Rightarrow \gamma=\sqrt{2}$

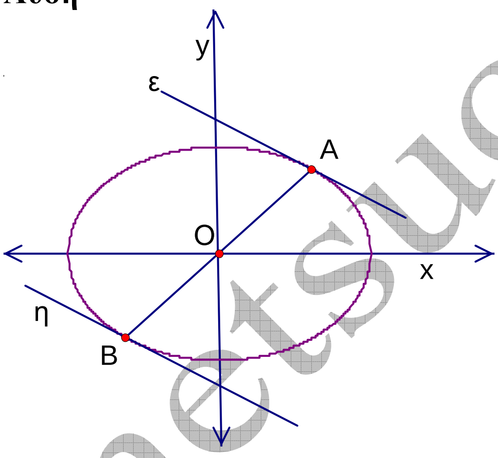
Β΄Β $=2\sqrt{2}$ = Ε΄Ε

Οι διαγώνιοι, λοιπόν, του τετραπλεύρου είναι ίσες, διχοτομούνται και είναι κάθετες, άρα είναι τετράγωνο.

5.

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες μιας έλλειψης στα άκρα μιας διαμέτρου της είναι παράλληλες. (Διάμετρος μιας έλλειψης λέγεται το τμήμα που συνδέει δύο σημεία της έλλειψης και διέρχεται από την αρχή των αξόνων)

Λύση



Έστω ΑΒ η διάμετρος και ε, η οι εφαπτόμενες στα Α, Β της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $A(x_1, y_1)$, $y_1 \neq 0$

Λόγω της συμμετρίας ως προς την αρχή Ο, θα είναι $B(-x_1,-y_1)$.

$$\varepsilon: \frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1 \iff$$

$$\beta^2 x_1 x+\alpha^2 y_1 y-\alpha^2\beta^2=0 \quad \mathbf{(1)}$$

$$\eta: \frac{x(-x_1)}{\alpha^2}+\frac{y(-y_1)}{\beta^2}=1 \iff$$

$$-\beta^2 x_1 x-\alpha^2 y_1 y-\alpha^2\beta^2=0 \iff$$

$$\beta^2 x_1 x+\alpha^2 y_1 y+\alpha^2\beta^2=0 \quad \mathbf{(2)}$$

Από τις (1), (2) βλέπουμε ότι $\lambda_\varepsilon=\lambda_\eta$, άρα $\varepsilon \parallel \eta$.

Αν $y_1=0$ τότε οι εφαπτομένες είναι κατακόρυφες με εξισώσεις $x=\alpha$ και $x=-\alpha$ δηλαδή πάλι παράλληλες

6.

Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $3x^2 + y^2 = 4$, οι οποίες :

(i) είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = -3x + 1$

(ii) είναι κάθετες στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$

(iii) διέρχονται από το σημείο $M(0, 4)$

Λύση

(i)

Έστω $\varepsilon: \ 3x_1x + y_1y = 4$ ζητούμενη εφαπτομένη, όπου $\Lambda(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής.

ε παράλληλη στην ευθεία $y = -3x + 1 \ \Leftrightarrow \ \lambda_\varepsilon = -3$

$$-\frac{3x_1}{y_1} = -3$$

$$x_1 = y_1$$

$\Lambda(x_1, y_1) \in$ στην έλλειψη $\Leftrightarrow \ 3x_1^2 + y_1^2 = 4$

$$3x_1^2 + x_1^2 + = 4$$

$$4x_1^2 = 4$$

$$x_1^2 = 1 \ \Leftrightarrow \ x_1 = 1 \ \text{ή} \ x_1 = -1$$

Για $x_1 = 1$ θα είναι $y_1 = 1$, οπότε $\varepsilon: \ 3\cdot 1x + 1y = 4 \ \Leftrightarrow \ 3x + y = 4$

Για $x_1 = -1$ θα είναι $y_1 = -1$, οπότε $\varepsilon: \ 3\cdot(-1)x + (-1)y = 4 \ \Leftrightarrow \ -3x - y = 4$

(ii)

Έστω $\varepsilon: \ 3x_1x + y_1y = 4$ ζητούμενη εφαπτομένη, όπου $\Lambda(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής.

ε κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x \ \Leftrightarrow \ \lambda_\varepsilon \cdot \frac{1}{2} = -1$

$$-\frac{3x_1}{y_1} \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$2y_1 = 3x_1$$

$$y_1 = \frac{3}{2}x_1$$

$\Lambda(x_1, y_1) \in$ στην έλλειψη $\Leftrightarrow \ 3x_1^2 + y_1^2 = 4$

$$3x_1^2 + \frac{9}{4}x_1^2 = 4$$

$$12x_1^2 + 9x_1^2 \ 16$$

$$21x_1^2 = 16 \ \Leftrightarrow \ x_1 = \frac{4}{\sqrt{21}} \ \text{ή} \ x_1 = -\frac{4}{\sqrt{21}}$$

- Για $x_1 = \frac{4}{\sqrt{21}}$ θα είναι $y_1 = \frac{3}{2}\frac{4}{\sqrt{21}} = \frac{6}{\sqrt{21}}$ Τότε

  $\varepsilon: \ 3\frac{4}{\sqrt{21}}x + \frac{6}{\sqrt{21}}y = 4 \ \Leftrightarrow \ 12x + 6y = 4\sqrt{21} \ \Leftrightarrow \ 6x + 3y - 2\sqrt{21} = 0$

- Για $x_1 = -\frac{4}{\sqrt{21}}$ θα είναι $y_1 = \frac{3}{2}(-\frac{4}{\sqrt{21}}) = -\frac{6}{\sqrt{21}}$ Τότε

$$\varepsilon: \ 3(-\frac{4}{\sqrt{21}})x - \frac{6}{\sqrt{21}}y = 4 \ \Leftrightarrow \ -12x - 6y = 4\sqrt{21} \ \Leftrightarrow \ 6x + 3y + 2\sqrt{21} = 0$$

(iii)

Έστω $\varepsilon: \ 3x_1x + y_1y = 4$ ζητούμενη εφαπτομένη, όπου $\Lambda(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής.

$M(0, 4) \in \varepsilon \ \Leftrightarrow \ 3x_1 \cdot 0 + y_1 \cdot 4 = 4 \ \Leftrightarrow \ y_1 = 1$

$\Lambda(x_1, y_1) \in$ στην έλλειψη $\Leftrightarrow$
$$3x_1^2 + y_1^2 = 4$$
$$3x_1^2 + 1^2 = 4$$
$$3x_1^2 = 3$$
$$x_1^2 = 1 \ \Leftrightarrow \ x_1 = 1 \ \text{ή} \ x_1 = -1$$

Για $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, είναι $\varepsilon: \ 3 \cdot 1x + 1y = 4 \ \Leftrightarrow \ 3x + y = 4$

Για $x_1 = -1$, $y_1 = 1$, είναι $\varepsilon: \ 3 \cdot (-1)x + 1y = 4 \ \Leftrightarrow \ -3x + y = 4$

7.

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της έλλειψης $x^2 + 4y^2 = 100$ στα σημεία της $M_1(4\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $M_2(-4\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $M_3(-4\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ και $M_4(4\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ σχηματίζουν τετράγωνο με διαγώνιες τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Λύση

ε: εφαπτομένη στο M_1: $4\sqrt{5}\,x + 4\sqrt{5}\,y = 100$

ζ: εφαπτομένη στο M_1: $-4\sqrt{5}\,x + 4\sqrt{5}\,y = 100$

η: εφαπτομένη στο M_3: $-4\sqrt{5}\,x - 4\sqrt{5}\,y = 100$

θ: εφαπτομένη στο M_4: $4\sqrt{5}\,x - 4\sqrt{5}\,y = 100$

Σημεία τομής της ε με τους άξονες

Για $y = 0$ βρίσκουμε $4\sqrt{5}\,x = 100 \ \Rightarrow \ x = \frac{25}{\sqrt{5}}$ $\quad K(\frac{25}{\sqrt{5}}, 0)$

Για $x = 0$ βρίσκουμε $\sqrt{5}\,y = 100 \ \Rightarrow \ y = \frac{100}{\sqrt{5}}$ $\quad \Lambda(0, \frac{100}{\sqrt{5}})$

Ομοίως βρίσκουμε τα σημεία τομής των ζ, η, θ με τους άξονες και διαπιστώνουμε ότι ανά δύο τέμνουν κάθε άξονα στο ίδιο σημείο. Άρα οι άξονες είναι διαγώνιοι.

Λόγω της συμμετρίας της έλλειψης ως προς την αρχή των αξόνων, οι διαγώνιοι είναι κάθετες και σαν τμήματα διχοτομούνται. Άρα το $M_1 M_1 M_3 M_4$ είναι ρόμβος.

$$\lambda_\varepsilon \lambda_\zeta = -\frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \ \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = -1 \cdot 1 = -1 \ \Rightarrow \ \varepsilon \perp \zeta$$ άρα ο ρόμβος είναι τετράγωνο.

Β΄ Ομάδας

1.

Να αποδείξετε ότι το σημείο $M\left(\frac{\alpha(1-t^2)}{1+t^2}, \frac{2\beta t}{1+t^2}\right)$ ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, για όλες τις τιμές του $t\in\mathbb{R}$.

Λύση

Η εξίσωση της έλλειψης γράφεται $\beta^2 x^2+\alpha^2 y^2=\alpha^2\beta^2$

$M\in$ στην έλλειψη $\Leftrightarrow$ $\beta^2\left(\frac{\alpha(1-t^2)}{1+t^2}\right)^2+\alpha^2\left(\frac{2\beta t}{1+t^2}\right)^2=\alpha^2\beta^2$

$$\beta^2\frac{\alpha^2(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}+\alpha^2\frac{4\beta^2t^2}{(1+t^2)^2}=\alpha^2\beta^2$$

$$\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}+\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}=1$$

$$(1-t^2)^2+4t^2=(1+t^2)^2$$

$$1-2t^2+t^4+4t^2=1+2t^2+t^4$$ που ισχύει

2.

Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ευθειών
$\alpha y=\lambda\beta(\alpha+x)$ και $\lambda\alpha y=\beta(\alpha-x)$, $0<\beta<\alpha$,
ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, για όλες τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

Λύση

Οι συντελεστές διεύθυνσης των δύο ευθειών είναι $\lambda_1=\frac{\lambda\beta}{\alpha}$ και $\lambda_2=-\frac{\beta}{\lambda\alpha}$ με

$\lambda_1\neq\lambda_2 \Leftrightarrow \frac{\lambda\beta}{\alpha}\neq-\frac{\beta}{\lambda\alpha} \Leftrightarrow \lambda^2\neq-1$ το οποίο είναι προφανές άρα οι δύο ευθείες έχουν ένα κοινό σημείο έστω $M(x_1, y_1)$ τότε

$\alpha y_1=\lambda\beta(\alpha+x_1)$ και $\lambda\alpha y_1=\beta(\alpha-x_1)$,
Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις εξισώσεις των ευθειών.

$$\lambda\alpha^2y_1^2=\lambda\beta^2(\alpha^2-x_1^2) \Rightarrow \alpha^2y_1^2=\beta^2\alpha^2-\beta^2x_1^2 \Rightarrow$$

$$\alpha^2y_1^2+\beta^2x_1^2=\beta^2\alpha^2 \Rightarrow \frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2}=1$$

Άρα το σημείο τομής $M(x_1, y_1)$ των δύο ευθειών ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$

3.

Αν $M(x, y)$ είναι ένα σημείο της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, να αποδείξετε ότι

$$(ME') = \alpha + \varepsilon x \qquad \text{και} \quad (ME) = \alpha - \varepsilon x$$

Λύση

$(ME')^2 = (-\gamma - x)^2 + (0 - y)^2 = \gamma^2 + 2\gamma x + x^2 + y^2$

$(ME)^2 = (\gamma - x)^2 + (0 - y)^2 = \gamma^2 - 2\gamma x + x^2 + y^2$

Άρα $(ME')^2 - (ME)^2 = 4\gamma x \quad \Rightarrow$

$[(ME') - (ME)]\,[(ME') + (ME)] = 4\gamma x$ αλλά $(ME') + (ME) = 2\alpha$ **(1)**

Άρα $[(ME') - (ME)]\,2\alpha = 4\gamma x \quad \Rightarrow \quad (ME') - (ME) = 2\frac{\gamma}{\alpha}x = 2\varepsilon x$ **(2)**

(1) + (2) $\Rightarrow \quad 2\,(ME') = 2(\alpha + \varepsilon x) \quad \Rightarrow \quad (ME') = \alpha + \varepsilon x$

(1) - (2) $\Rightarrow \quad 2\,(ME) = 2(\alpha - \varepsilon x) \quad \Rightarrow \quad (ME) = \alpha - \varepsilon x$

4.

Αν $d,\ d'$ είναι οι αποστάσεις των σημείων $\Gamma(0, \gamma)$ και $\Gamma'(0, -\gamma)$ από την εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ σε ένα σημείο της $M_1(x_1,\ y_1)$, να αποδείξετε ότι $d^2+d'^2=2\alpha^2$

Λύση

Η εξίσωση της έλλειψης γράφεται $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M_1 γράφεται $\beta^2x_1x+\alpha^2y_1y-\alpha^2\beta^2=0$

$$d^2=\frac{\left|\beta^2x_1\cdot 0+\alpha^2y_1\gamma-\alpha^2\beta^2\right|^2}{(\beta^2x_1)^2+(\alpha^2y_1)^2}=\frac{\alpha^4(\gamma y_1-\beta^2)^2}{(\beta^2x_1)^2+(\alpha^2y_1)^2}=\frac{\alpha^4(\gamma^2y_1^2-2\gamma y_1\beta^2+\beta^4)}{(\beta^2x_1)^2+(\alpha^2y_1)^2}$$

$$d'^2=\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ =\frac{\alpha^4(\gamma^2y_1^2+2\gamma y_1\beta^2+\beta^4)}{(\beta^2x_1)^2+(\alpha^2y_1)^2}$$

Αρκεί να δειχθεί ότι $d^2+d'^2=2\alpha^2 \quad \Leftrightarrow$

$$\frac{\alpha^4(\gamma^2y_1^2-2\gamma y_1\beta^2+\beta^4)}{(\beta^2x_1)^2+(\alpha^2y_1)^2}+\frac{\alpha^4(\gamma^2y_1^2+2\gamma y_1\beta^2+\beta^4)}{(\beta^2x_1)^2+(\alpha^2y_1)^2}=2\alpha^2$$

$$\frac{\alpha^4(\gamma^2y_1^2-2\gamma y_1\beta^2+\beta^4+\gamma^2y_1^2+2\gamma y_1\beta^2+\beta^4)}{(\beta^2x_1)^2+(\alpha^2y_1)^2}=2\alpha^2$$

$$\frac{\alpha^4(2\gamma^2y_1^2+2\beta^4)}{\beta^4x_1^{\ 2}+\alpha^4y_1^{\ 2}}=2\alpha^2$$

$$\frac{2\alpha^4(\gamma^2y_1^2+\beta^4)}{\beta^4x_1^{\ 2}+\alpha^4y_1^{\ 2}}=2\alpha^2$$

$$\frac{\alpha^2(\gamma^2y_1^2+\beta^4)}{\beta^4x_1^{\ 2}+\alpha^4y_1^{\ 2}}=1$$

$\alpha^2\gamma^2y_1^2+\alpha^2\beta^4=\beta^4x_1^2+\alpha^4y_1^2$

$\alpha^2\beta^4=\beta^4x_1^2+\alpha^4y_1^2-\alpha^2\gamma^2y_1^2$

$\alpha^2\beta^4=\beta^4x_1^2+\alpha^2y_1^2(\alpha^2-\gamma^2)$

$\alpha^2\beta^4=\beta^4x_1^2+\alpha^2y_1^2\beta^2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2\beta^2=\beta^2x_1^2+\alpha^2y_1^2$ που ισχύει, αφού το σημείο M_1 ανήκει στην έλλειψη.

5.

Έστω $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ δύο σημεία της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και τα σημεία $N_1(\varepsilon x_1, 0)$ και $N_2(\varepsilon x_2, 0)$. Να αποδείξετε ότι $(M_1 N_2) = (M_2 N_1)$

Λύση

$$(M_1 N_2) = (M_2 N_1) \Leftrightarrow (M_1 N_2)^2 = (M_2 N_1)^2$$

$$(\varepsilon x_2 - x_1)^2 + (0 - y_1)^2 = (\varepsilon x_1 - x_2)^2 + (0 - y_2)^2$$

$$\varepsilon^2 x_2^2 - 2\varepsilon x_2 x_1 + x_1^2 + y_1^2 = \varepsilon^2 x_1^2 - 2\varepsilon x_1 x_2 + x_2^2 + y_2^2$$

$$x_1^2 + y_1^2 - \varepsilon^2 x_1^2 = x_2^2 + y_2^2 - \varepsilon^2 x_2^2$$

$$x_1^2(1-\varepsilon^2) + y_1^2 = x_2^2(1-\varepsilon^2) + y_2^2$$

$$x_1^2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} + y_1^2 = x_2^2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} + y_2^2$$

$$\beta^2 x_1^2 + \alpha^2 y_1^2 = \beta^2 x_2^2 + \alpha^2 y_2^2 \qquad \textbf{(A)}$$

Αποδεικνύουμε την ισότητα (A)

$M_1 \in$ στην έλλειψη $\Rightarrow \beta^2 x_1^2 + \alpha^2 y_1^2 = \alpha^2 \beta^2$

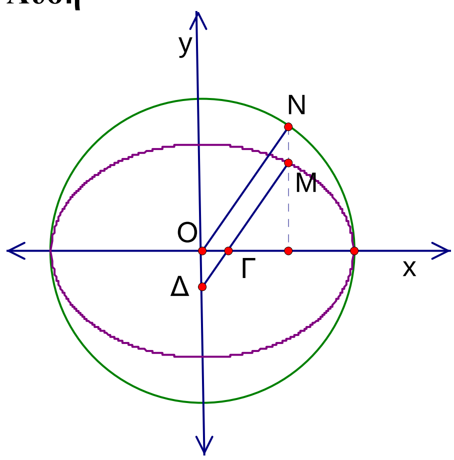
$M_2 \in$ στην έλλειψη $\Rightarrow \beta^2 x_2^2 + \alpha^2 y_2^2 = \alpha^2 \beta^2$

Άρα $\beta^2 x_1^2 + \alpha^2 y_1^2 = \beta^2 x_2^2 + \alpha^2 y_2^2$

6.

Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και ένα σημείο της Μ. Έστω επιπλέον, ο κύκλος $x^2 + y^2 = \alpha^2$ και το σημείο του Ν, που έχει την ίδια τετμημένη με το Μ. Από το Μ φέρνουμε παράλληλη προς την ΟΝ, που τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Γ και Δ αντιστοίχως .Να αποδείξετε ότι ΜΓ = β και ΜΔ = α.

Λύση



Έστω $M(\mu, \lambda)$ και $N(\mu, \nu)$

$M \in$ στην έλλειψη $\Rightarrow$
$\beta^2\mu^2 + \alpha^2\lambda^2 = \alpha^2\beta^2$ **(1)**

$N \in$ στον κύκλο $\Rightarrow$ $\mu^2 + \nu^2 = \alpha^2$ **(2)**

$M\Delta \parallel ON \Rightarrow \lambda_{M\Delta} = \frac{\nu}{\mu}$

Ευθεία ΜΔ : $y - \lambda = \frac{\nu}{\mu}(x - \mu)$

Για $y = 0$ δίνει $-\lambda = \frac{\nu}{\mu}(x - \mu) \Rightarrow$

$-\lambda\mu = \nu x - \nu\mu \Rightarrow x = \frac{\nu\mu - \lambda\mu}{\nu}$ Άρα $\Gamma(\frac{\nu\mu - \lambda\mu}{\nu}, 0)$

Για $x = 0$ δίνει $y - \lambda = -\nu \Rightarrow y = \lambda - \nu$ Άρα $\Delta(0, \lambda - \nu)$

Αρκεί να αποδείξουμε $M\Gamma = \beta \Leftrightarrow$

$$(M\Gamma)^2 = \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\nu\mu - \lambda\mu}{\nu} - \mu\right)^2 + (0 - \lambda)^2 = \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\nu\mu - \lambda\mu - \nu\mu}{\nu}\right)^2 + \lambda^2 = \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{-\lambda\mu}{\nu}\right)^2 + \lambda^2 = \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\lambda^2\mu^2}{\nu^2} + \lambda^2 = \beta^2 \Leftrightarrow \lambda^2\mu^2 + \lambda^2\nu^2 = \nu^2\beta^2 \quad \textbf{(A)}$$

Αποδεικνύουμε την ισότητα (Α)

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} \beta^2\mu^2 + (\mu^2 + \nu^2)\lambda^2 = (\mu^2 + \nu^2)\beta^2 \Rightarrow$$
$$\beta^2\mu^2 + \mu^2\lambda^2 + \nu^2\lambda^2 = \mu^2\beta^2 + \nu^2\beta^2 \Rightarrow$$
$$\mu^2\lambda^2 + \nu^2\lambda^2 = \nu^2\beta^2$$

Για την ισότητα ΜΔ = α :
ΟΔΜΝ παραλληλόγραμμο $\Rightarrow$ ΜΔ = ΝΟ = ακτίνα α.

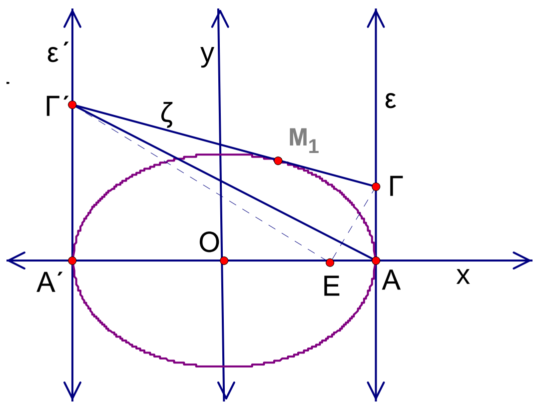
7.

Έστω ε και ε΄ οι εφαπτόμενες της έλλειψης $C: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ 0<\beta<\alpha$ στις κορυφές της $A(\alpha, 0)$ και $A'(-\alpha, 0)$, αντιστοίχως, και ζ η εφαπτομένη της C σε ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$. Αν η ζ τέμνει τις ε και ε΄ στα σημεία Γ και Γ΄, αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι :

(i) $(A\Gamma)(A'\Gamma')=\beta^2$

(ii) ο κύκλος με διάμετρο το ΓΓ΄ διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης.

Λύση



$\zeta: \ \beta^2 x_1 x + \alpha^2 y_1 y = \alpha^2 \beta^2$

Συντεταγμένες του Γ :

Για $x=\alpha$, η ζ δίνει

$\beta^2 x_1 \alpha + \alpha^2 y_1 y = \alpha^2 \beta^2 \Rightarrow$

$\beta^2 x_1 + \alpha y_1 y = \alpha \beta^2 \Rightarrow$

$\alpha y_1 y = \alpha\beta^2 - \beta^2 x_1 \Rightarrow y = \frac{\beta^2(\alpha - x_1)}{\alpha y_1}$

Άρα $\Gamma\left(\alpha, \frac{\beta^2(\alpha-x_1)}{\alpha y_1}\right)$

Ομοίως βρίσκουμε $\Gamma'\left(-\alpha, \frac{\beta^2(\alpha+x_1)}{\alpha y_1}\right)$

(i)

$(A\Gamma)(A'\Gamma')=\beta^2 \Leftrightarrow \left|\frac{\beta^2(\alpha-x_1)}{\alpha y_1}\right|\left|\frac{\beta^2(\alpha+x_1)}{\alpha y_1}\right| = \beta^2 \Leftrightarrow$

$\beta^2 \left|\alpha^2 - x_1^2\right| = \alpha^2 y_1^2 \Leftrightarrow$ $\qquad -\alpha \le x_1 \le \alpha$

$\beta^2(\alpha^2 - x_1^2) = \alpha^2 y_1^2 \Leftrightarrow$ $\qquad |x_1| \le \alpha$

$\beta^2\alpha^2 - \beta^2 x_1^2 = \alpha^2 y_1^2 \Leftrightarrow$ $\qquad x_1^2 \le \alpha^2$

$\beta^2\alpha^2 = \alpha^2 y_1^2 + \beta^2 x_1^2$

ισχύει αφού $M_1 \in$ στην έλλειψη

(ii)

Ο κύκλος με διάμετρο το ΓΓ΄ διέρχεται από την εστία $E(\gamma, 0)$ της έλλειψης $\Leftrightarrow$

$$\Gamma'\hat{E}\Gamma = 90^o \Leftrightarrow \overrightarrow{E\Gamma} \perp \overrightarrow{E\Gamma'} \Leftrightarrow \overrightarrow{E\Gamma}\cdot\overrightarrow{E\Gamma'} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-\gamma)(-\alpha-\gamma) + \left(\frac{\beta^2(\alpha-x_1)}{\alpha y_1} - 0\right)\left(\frac{\beta^2(\alpha+x_1)}{\alpha y_1} - 0\right) = 0$$

$$\gamma^2 - \alpha^2 + \frac{\beta^4(\alpha^2 - x_1^2)}{\alpha^2 y_1^2} = 0$$

$$-\beta^2 + \frac{\beta^4(\alpha^2 - x_1^2)}{\alpha^2 y_1^2} = 0$$

$$-1+\frac{\beta^2(\alpha^2-x_1^2)}{\alpha^2 y_1^2}=0$$

$$-\alpha^2\, y_1^2+\beta^2\,\alpha^2-\beta^2\, x_1^2=0$$

$$\beta^2\,\alpha^2=\alpha^2\, y_1^2+\beta^2\, x_1^2$$

που ισχύει αφού $M_1 \in$ στην έλλειψη

8.

Έστω η έλλειψη $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ και η εφαπτομένη στο σημείο της $M_1(x_1,\ y_1)$.

Αν η εφαπτομένη τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Γ(p, 0) και Δ0, q),

να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha^2}{p^2}+\dfrac{\beta^2}{q^2}=1$.

Λύση

$M_1(x_1,\ y_1) \in$ στην έλλειψη $\Rightarrow \dfrac{x_1^2}{\alpha^2}+\dfrac{y_1^2}{\beta^2}=1$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\beta^2\, x_1 x+\alpha^2\, y_1 y=\alpha^2\,\beta^2$

Γ(p, 0) $\in$ στην εφαπτομένη $\Rightarrow \beta^2\, x_1 p+\alpha^2\, y_1\cdot 0=\alpha^2\,\beta^2 \Rightarrow$

$$x_1 p=\alpha^2 \Rightarrow \frac{1}{p}=\frac{x_1}{\alpha^2}$$

Δ0, q) $\in$ στην εφαπτομένη $\Rightarrow \beta^2\, x_1\cdot 0+\alpha^2\, y_1 q=\alpha^2\,\beta^2 \Rightarrow$

$$y_1 q=\beta^2 \Rightarrow \frac{1}{q}=\frac{y_1}{\beta^2}$$

$$\frac{\alpha^2}{p^2}+\frac{\beta^2}{q^2}=\alpha^2\frac{x_1^2}{\alpha^4}+\beta^2\frac{y_1^2}{\beta^4}=\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2}=1$$