3.2
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 99 – 100

Α΄ Ομάδας

1.
Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

(i) Όταν έχει εστία το σημείο $E(-1, 0)$

(ii) Όταν έχει διευθετούσα την ευθεία $x = \frac{1}{2}$

(iii) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$

Λύση

(i)
Η εξίσωση της παραβολής θα είναι της μορφής $y^2 = 2px$

$\frac{p}{2} = -1 \Rightarrow p = -2.$ Άρα $y^2 = -4x$

(ii)
Η εξίσωση της παραβολής θα είναι της μορφής $y^2 = 2px$

$-\frac{p}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow p = -1.$ Άρα $y^2 = -2x$

(iii)
Η εξίσωση της παραβολής θα είναι της μορφής $y^2 = 2px$

Επαληθεύεται από το σημείο $A(1, 2) \Rightarrow 2^2 = 2p\cdot 1 \Rightarrow p = 2$

Άρα $y^2 = 4x$

2.

Να βρεθεί η εστία και η διευθετούσα της παραβολής με εξίσωση :

(i) $y^2 = 8x$ **(ii)** $y^2 = -8x$

(iii) $y = \frac{1}{4}x^2$ **(iv)** $y = -\frac{1}{4}x^2$

(v) $y^2 = 4\alpha x$ **(vi)** $y = \frac{1}{4\alpha}x^2$

Λύση

(i)

$2p = 8$ $p = 4$ $\frac{p}{2} = 2$ Άρα $E(2, 0)$ και $\delta :$ $x = -2$

(ii)

$2p = 8$ $p = -4$ $\frac{p}{2} = -2$ Άρα $E(-2, 0)$ και $\delta :$ $x = 2$

(iii)

$y = \frac{1}{4}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4y$

$2p = 4$ $p = 2$ $\frac{p}{2} = 1$ Άρα $E(0, 1)$ και $\delta :$ $y = -1$

(iv)

$y = -\frac{1}{4}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -4y$

$2p = -4$ $p = -2$ $\frac{p}{2} = -1$ Άρα $E(0, -1)$ και $\delta :$ $y = 1$

(v)

$2p = 4\alpha$ $p = 2\alpha$ $\frac{p}{2} = \alpha$ Άρα $E(\alpha, 0)$ και $\delta :$ $x = -\alpha$

(vi)

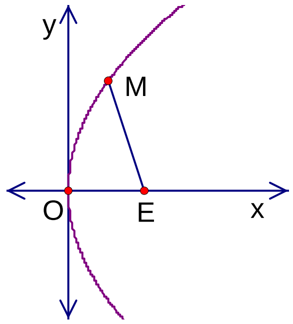
$y = \frac{1}{4\alpha}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4\alpha y$

$2p = 4\alpha$ $p = 2\alpha$ $\frac{p}{2} = \alpha$ Άρα $E(0, \alpha)$ και $\delta :$ $y = -\alpha$

3.

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$. Να αποδειχθεί ότι η κορυφή της παραβολής είναι το πλησιέστερο στην εστία σημείο της.

Λύση



Έστω $M(x, y)$ το τυχαίο σημείο της παραβολής και E η εστία της.

Θα αποδείξουμε ότι $(EM) \geq (EO) \Leftrightarrow$

$(EM)^2 \geq (EO)^2$

$$(x - \frac{p}{2})^2 + (y-0)^2 \geq \left|\frac{p}{2}\right|^2$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 \geq \frac{p^2}{4}$$

$$x^2 - px + y^2 \geq 0 \quad \text{και επειδή} \quad px = \frac{y^2}{2}$$

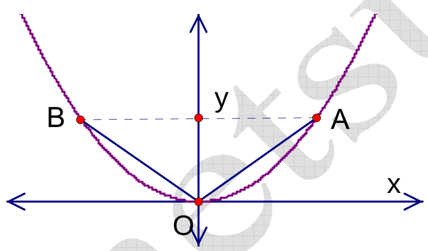
$$x^2 - \frac{y^2}{2} + y^2 \geq 0$$

$$x^2 + \frac{y^2}{2} \geq 0 \quad \text{που ισχύει}$$

4.

Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων A και B της παραβολής $y = \frac{1}{4}x^2$ που έχουν την ίδια τεταγμένη και ισχύει $A\hat{O}B = 90^o$.

Λύση



Επειδή η παραβολή μας είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$, τα σημεία A, B που έχουν την ίδια τεταγμένη y, θα έχουν αντίθετες τετμημένες x, $-x$, αντίστοιχα.

$A \in$ στην παραβολή $\Rightarrow \quad y = \frac{1}{4}x^2$ **(1)**

$A\hat{O}B = 90^o \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \quad \Rightarrow$

$x(-x) + y \cdot y = 0 \quad \Rightarrow$

$x^2 = y^2$

$(1) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{4}y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y - \frac{1}{4}y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$y(1 - \frac{1}{4}y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \quad$ ή $\quad 1 - \frac{1}{4}y = 0$

- Για $y = 0$, η (1) $\Rightarrow \quad x = 0$ απορρίπτεται αφού $A \equiv O$
- Για $1 - \frac{1}{4}y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 4$

  Η (1) $\Rightarrow \quad 4 = \frac{1}{4}x^2 \quad \Rightarrow \quad 16 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \quad$ ή $\quad x = -4$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι $A(4, 4)$ και $B(-4, 4)$

5.

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y = \frac{1}{4}x^2$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

(i) Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 1$
(ii) Όταν είναι κάθετη στην ευθεία $y = -2x$
(iii) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$

Λύση

Η παραβολή γράφεται $x^2 = 4y \Leftrightarrow x^2 = 2\cdot 2y \Rightarrow p = 2$

Η εφαπτομένη της στο σημείο της $\Lambda(x_1, y_1)$ είναι

$$\varepsilon:\ xx_1 = 2(y + y_1) \Leftrightarrow xx_1 = 2y + 2y_1 \Leftrightarrow$$

$$2y = x_1 x - 2y_1 \Leftrightarrow y = \frac{x_1}{2}x - y_1 \quad \textbf{(1)}$$

(i)

$$\varepsilon \parallel y = x + 1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1}{2} = 1 \Leftrightarrow x_1 = 2$$

$\Lambda(x_1, y_1) \in$ στην παραβολή $\Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{4}x_1^2 \Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{4}2^2 = 1$

$(1) \Leftrightarrow \varepsilon:\ y = x - 1$

(ii)

$$\varepsilon \perp y = -2x \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = 1$$

$\Lambda(x_1, y_1) \in$ στην παραβολή $\Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{4}x_1^2 \Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{4}1^2 = \frac{1}{4}$

$(1) \Leftrightarrow \varepsilon:\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

(iii)

$$A(0, -1) \in \varepsilon \Leftrightarrow -1 = \frac{x_1}{2}\cdot 0 - y_1 \Leftrightarrow y_1 = 1$$

$\Lambda(x_1, y_1) \in$ στην παραβολή $\Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{4}x_1^2$

$$1 = \frac{1}{4}x_1^2$$

$$x_1^2 = 4 \Leftrightarrow x_1 = 2 \text{ ή } x_1 = -2$$

$$(1) \Leftrightarrow y = \frac{2}{2}x - 1 \text{ ή } y = \frac{-2}{2}x - 1 \Leftrightarrow$$

$$y = x - 1 \text{ ή } y = -x - 1$$

6.

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής $y = \frac{1}{4}x^2$ στα σημεία $A(4, 4)$ και $B(-1, \frac{1}{4})$ τέμνονται κάθετα και πάνω στη διευθετούσα της.

Λύση

Η παραβολή γράφεται $x^2 = 4y \Leftrightarrow x^2 = 2 \cdot 2y \Rightarrow p = 2$ και $\delta: y = -1$

Εφαπτομένη στο Α $\varepsilon: x \cdot 4 = 2(4 + y) \Leftrightarrow$

$y + 4 = 2x \Leftrightarrow y = 2x - 4.$ **(1)**

Εφαπτομένη στο Β $\eta: x \cdot (-1) = 2(\frac{1}{4} + y) \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{2}x = \frac{1}{4} + y \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ **(2)**

$\lambda_\varepsilon \lambda_\eta = 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1 \Rightarrow \varepsilon \perp \eta$

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2) για να βρούμε το σημείο τομής Κ των ε, η.

Εξισώνουμε τα δεύτερα μέλη $2x - 4 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$8x - 16 = -2x - 1 \Leftrightarrow$

$10x = 15 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

(1) $\Rightarrow y = 2 \cdot \frac{3}{2} - 4 \Rightarrow y = -1.$ δηλαδή $K(\frac{3}{2}, -1)$

Άρα το Κ ανήκει στη διευθετούσα

Β΄ Ομάδας

1.

Να αποδειχθεί ότι ο κύκλος $(x-3)^2 + y^2 = 8$ εφάπτεται της παραβολής $y^2 = 4x$.
(Δηλαδή έχουν τις ίδιες εφαπτόμενες στα κοινά σημεία τους)

Λύση

$$\begin{cases}(x-3)^2+y^2=8\\ y^2=4x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-6x+9+4x=8\\ y^2=4x\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-2x+1=0\\ y^2=4x\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-1)^2=0\\ y^2=4x\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-1=0\\ y^2=4x\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=1\\ y^2=4x\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=1\\ y^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=2 \quad ή \quad y=-2\end{cases}$$

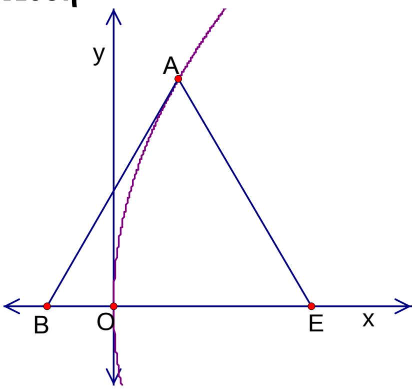
Τα σημεία τομής είναι $A(1, 2)$, $B(1, -2)$
Η εφαπτομένη της παραβολής στο A είναι $\varepsilon: \ y\cdot 2 = 2(x+1) \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$.
Το κέντρο του κύκλου είναι $K(3, 0)$ και η ακτίνα $r = \sqrt{8}$

$d(K, \varepsilon) = \dfrac{|1\cdot 3 - 1\cdot 0 + 1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{16}{2}} = \sqrt{8} = r$ άρα η ε εφάπτεται και του κύκλου
Ομοίως στο σημείο B.

2.

Έστω η παραβολή $y^2 = 12x$. Αν η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $A(1, 2\sqrt{3})$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Β, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΕΑΒ είναι ισόπλευρο.

Λύση



$y^2 = 12x \iff y^2 = 2{\cdot}6\,x$

άρα $p = 6$ και $E(3, 0)$

Εφαπτομένη στο Α $\varepsilon:\ y{\cdot}2\sqrt{3} = 6(x + 1)$

Για $y = 0$ δίνει $x = -1$. Άρα $B(-1, 0)$

$(EA)^2 = (1-3)^2 + (2\sqrt{3} - 0)^2 = 4 + 12 = 16$

$(EB)^2 = 4^2 = 16$

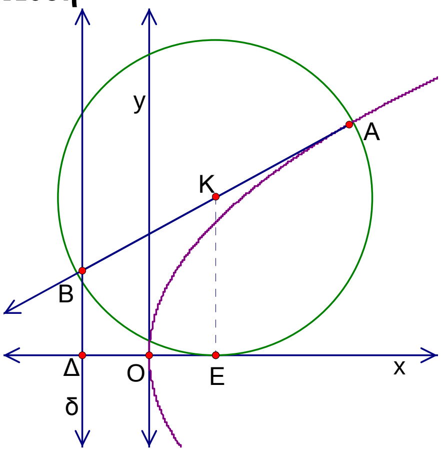
$(AB)^2 = (-1-1)^2 + \{0 - 2\sqrt{3}\}^2 = 4 + 12 = 16$

Άρα $(EA) = (EB) = (AB)$

3.

Έστω η παραβολή $y^2 = 4x$. Αν η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $A(3, 2\sqrt{3})$ τέμνει τη διευθετούσα στο σημείο Β, να αποδειχθεί ότι ο κύκλος με διάμετρο ΑΒ εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στην εστία της παραβολής.

Λύση



$y^2 = 4x. \Leftrightarrow y^2 = 2 \cdot 2\,x$ άρα

$E(1, 0)$ και $\delta: \; x = -1$

Εφαπτομένη στο Α $\quad \varepsilon: \; y \cdot 2\sqrt{3} = 2(x + 3)$

Για $x = -1$ δίνει $2\sqrt{3}\,y = 2(-1 + 3)$

$2\sqrt{3}\,y = 4$

$y = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Άρα $B(-1, \dfrac{2\sqrt{3}}{3})$.

Το κέντρο Κ του κύκλου διαμέτρου ΑΒ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

$x_K = \dfrac{3-1}{2} = 1 \qquad y_K = \dfrac{2\sqrt{3} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

Είναι $x_K = 1 = x_E \;\Rightarrow\; KE \perp x'x$

Αρκεί να είναι και $(KE) = (KA) \;\Leftrightarrow$

$(KE)^2 = (KA)^2$

$(1-1)^2 + (0 - \dfrac{4\sqrt{3}}{3})^2 = (3-1)^2 + (2\sqrt{3} - \dfrac{4\sqrt{3}}{3})^2$

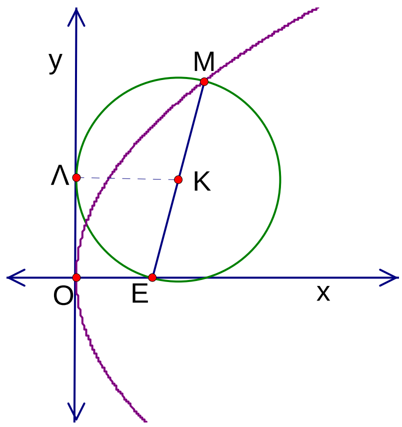
$\dfrac{16}{3} = 4 + (\dfrac{2\sqrt{3}}{3})^2$

$\dfrac{16}{3} = 4 + \dfrac{4}{3}$ που ισχύει

4.

Έστω Μ ένα σημείο της παραβολής $y^2 = 2px$. Να αποδειχθεί ότι ο κύκλος με διάμετρο ΕΜ, όπου Ε η εστία της παραβολής, εφάπτεται στον άξονα $y'y$.

Λύση



Έστω $M(x, y)$ σημείο της παραβολής, οπότε $y^2 = 2px$

Το κέντρο Κ του κύκλου διαμέτρου ΕΜ είναι το μέσο του τμήματος ΕΜ.

$$x_K = \frac{x + \frac{p}{2}}{2} = \frac{2x+p}{4} \quad \text{και} \quad y_K = \frac{y+0}{2} = \frac{y}{2}$$

Φέρουμε $K\Lambda \perp y'y \quad \Rightarrow \quad \Lambda\left(0, \frac{y}{2}\right)$

Αρκεί να είναι $\quad (KE) = (K\Lambda) \quad \Leftrightarrow$

$$(KE)^2 = (K\Lambda)^2$$

$$\left(\frac{p}{2} - \frac{2x+p}{4}\right)^2 + \left(0 - \frac{y}{2}\right)^2 = \left(0 - \frac{2x+p}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{2} - \frac{y}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{2p-2x-p}{4}\right)^2 + \frac{y^2}{4} = \left(\frac{2x+p}{4}\right)^2$$

$$\frac{(p-2x)^2}{16} + \frac{4y^2}{16} = \frac{(2x+p)^2}{16}$$

$$p^2 - 4px + 4x^2 + 4y^2 = 4x^2 + 4px + p^2$$

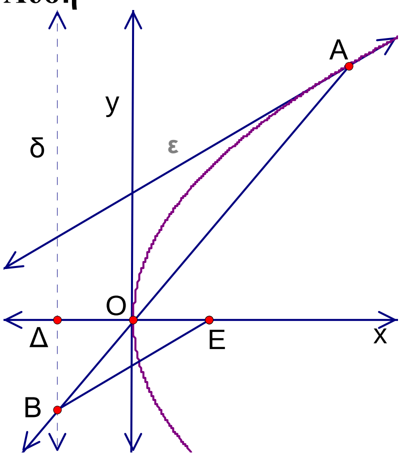
$$4y^2 = 8px$$

$$y^2 = 2px \quad \text{που ισχύει}$$

5.

Έστω η παραβολή $y^2 = 2\rho x$ και η εφαπτομένη της ε σε ένα σημείο $A(x_1, y_1)$ αυτής. Αν η ευθεία ΟΑ τέμνει τη διευθετούσα της παραβολής στο σημείο Β, να αποδειχθεί ότι $BE \parallel \varepsilon$.

Λύση



$\varepsilon: \quad y_1 y = p(x + x_1) \quad \Leftrightarrow$

$$y = \frac{p}{y_1}x + \frac{px_1}{y_1}$$

$OA: \quad y - 0 = \dfrac{y_1 - 0}{x_1 - 0}(x - 0) \quad \Leftrightarrow$

$$y = \frac{y_1}{x_1}x$$

Σύστημα των $\delta: \; x = -\dfrac{p}{2}$ και ΟΑ,

για να βρούμε τις συντεταγμένες του Β.

Είναι $x_B = -\dfrac{p}{2}$

Η $y = \dfrac{y_1}{x_1}x \quad \Rightarrow \quad y_B = \dfrac{y_1}{x_1}\left(-\dfrac{p}{2}\right) = -\dfrac{py_1}{2x_1}$

Αρκεί να είναι $\lambda_{BE} = \lambda_\varepsilon \quad \Leftrightarrow$

$$\frac{0 + \dfrac{py_1}{2x_1}}{\dfrac{p}{2} + \dfrac{p}{2}} = \frac{\rho}{y_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\dfrac{py_1}{2x_1}}{p} = \frac{p}{y_1}$$

$$\frac{y_1}{2x_1} = \frac{p}{y_1}$$

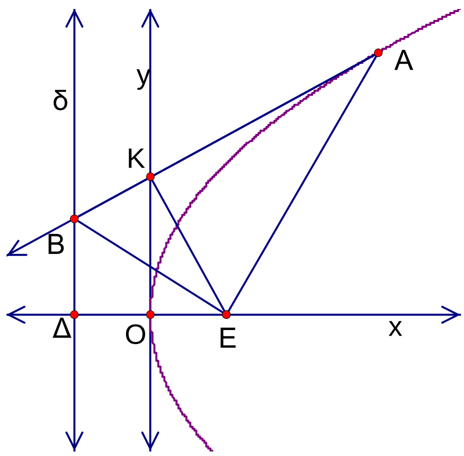
$y_1^2 = 2p\,x_1$ το οποίο ισχύει, αφού το Α ανήκει στην παραβολή.

6.

Αν η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της Α τέμνει τη διευθετούσα στο Β και τον άξονα $y'y$ στο σημείο Κ, να αποδειχθεί ότι

(i) $A\hat{E}B = 90^o$ **(ii)** $EK \perp AB$ και **(iii)** $(EK)^2 = (KA)(KB)$

Λύση



Εφαπτομένη στο $A(x_1, y_1)$

$\varepsilon: \quad y_1 y = p(x + x_1)$

Για $x_K = 0$ έχουμε

$K \in \varepsilon \Rightarrow y_1 y_K = p(0 + x_1) \Rightarrow$

$$y_K = \frac{px_1}{y_1}$$

Για $x_B = -\frac{p}{2}$ έχουμε

$B \in \varepsilon \Rightarrow y_1 y_B = p(-\frac{p}{2} + x_1)$

$$y_1 y_B = \frac{p(2x_1 - p)}{2}$$

$$y_B = \frac{p(2x_1 - p)}{2y_1}$$

(i)

$A\hat{E}B = 90^o \Leftrightarrow \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = 0 \Leftrightarrow$

$$\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)\left(-\frac{p}{2} - \frac{p}{2}\right) + (y_1 - 0)\left(\frac{p(2x_1 - p)}{2y_1} - 0\right) = 0$$

$$\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)(-p) + \frac{p(2x_1 - p)}{2} = 0$$

$$\frac{2x_1 - p}{2}(-1) + \frac{2x_1 - p}{2} = 0 \quad \text{που ισχύει}$$

(ii)

$EK \perp AB \Leftrightarrow \overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$$\left(0 - \frac{p}{2}\right)\left(-\frac{p}{2} - x_1\right) + \left(\frac{px_1}{y_1} - 0\right)\left(\frac{p(2x_1 - p)}{2y_1} - y_1\right) = 0$$

$$\frac{p}{2}\,\frac{p + 2x_1}{2} + \frac{px_1}{y_1}\,\frac{p(2x_1 - p) - 2y_1^2}{2y_1} = 0$$

$$\frac{p + 2x_1}{2} + \frac{x_1 p(2x_1 - p) - 2x_1 y_1^2}{y_1^2} = 0$$

$$p y_1^2 + 2x_1 y_1^2 + 4p x_1^2 - 2p^2 x_1 - 4x_1 y_1^2 = 0$$

(αλλά $y_1^2 = 2p x_1$)

$$p2p x_1 + 2x_1 2p x_1 + 4p x_1^2 - 2p^2 x_1 - 4x_1 2p x_1 = 0$$

$$2p^2 x_1 + 4p x_1^2 + 4p x_1^2 - 2p^2 x_1 - 8p x_1^2 = 0 \quad \text{που ισχύει}$$

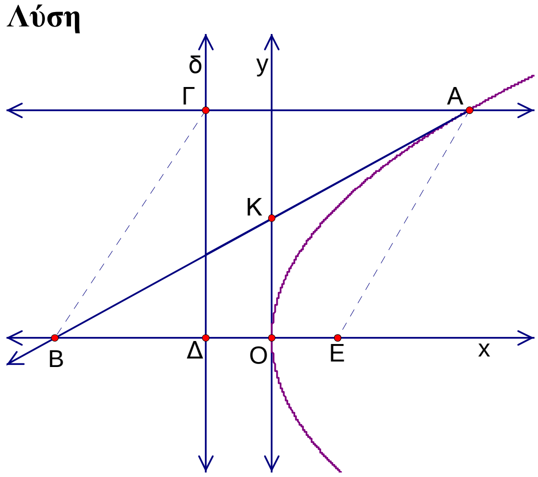
(iii)

Τρίγωνο ΕΑΒ ορθογώνιο στο Ε με ύψος ΕΚ $\Rightarrow \quad (EK)^2 = (KA)(KB)$

7.

Έστω η παραβολή $y^2 = 2px$ και ένα σημείο της $A(x_1,\ y_1)$, Φέρνουμε την εφαπτομένη της παραβολής στο Α, που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο Β και την παράλληλη από το Α στον άξονα $x'x$, που τέμνει τη διευθετούσα στο Γ. Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι ρόμβος με κέντρο στον άξονα $y'y$.

Λύση



Εφαπτομένη στο $A(x_1,\ y_1)$:

$\varepsilon:\ y_1 y = p(x + x_1)$

Για $y_B = 0$ έχουμε

$B \in \varepsilon \quad \Rightarrow \quad y_1 \cdot 0 = \rho(x_B + x_1) \Rightarrow$

$x_B + x_1 = 0 \quad \Rightarrow$

$x_B = -x_1$

Είναι $\Gamma(-\frac{p}{2},\ y_1)$

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} = \frac{y_1 - 0}{-\frac{p}{2} + x_1} \quad \text{και} \quad \lambda_{EA} = \frac{y_A - y_E}{x_A - x_E} = \frac{y_1 - 0}{x_1 - \frac{p}{2}} \quad \Rightarrow$$

$\lambda_{B\Gamma} = \lambda_{EA} \quad \Rightarrow \quad B\Gamma \parallel EA.$ Άρα ΑΕΒΓ παραλληλόγραμμο

.

Για να είναι ρόμβος, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$(\Gamma A) = (EA) \quad \Leftrightarrow \quad (\Gamma A)^2 = (EA)^2$

$$\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2 + (y_1 - y_1)^2 = \left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + (y_1 - 0)^2$$

$$x_1^2 + p x_1 + \frac{p^2}{4} = x_1^2 - p x_1 + \frac{p^2}{4} + y_1^2$$

$$2 p x_1 = y_1^2 \quad \text{που ισχύει}$$

Το κέντρο του ρόμβου είναι το μέσο Κ της διαγωνίου ΒΑ

$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{x_1 - x_1}{2} = 0.$ Άρα το Κ ανήκει στον άξονα $y'y$.

8.

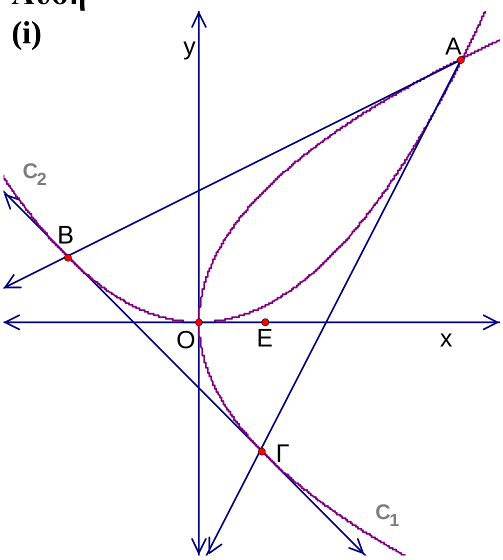
Δίνονται οι παραβολές $C_1: \ y^2 = 2px$ και $C_2: \ x^2 = 2py$.

(i) Να αποδείξετε ότι οι C_1 και C_2 τέμνονται στα σημεία $O(0, 0)$ και $A(2\rho, 2\rho)$.

(ii) Αν οι εφαπτόμενες των C_1 και C_2 στο A τέμνουν τις C_2 και C_1 στα σημεία B και Γ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι η ΒΓ είναι κοινή εφαπτομένη των C_1 και C_2.

Λύση

(i)



Σύστημα των C_1, C_2

$$\begin{cases} y^2=2px \\ x^2=2py \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2p}y^2 \\ x^2=2py \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2p}y^2 \\ \frac{1}{4p^2}y^4=2py \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2p}y^2 \\ y^4=8p^3y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2p}y^2 \\ y^4-8p^3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2p}y^2 \\ y(y^3-8p^3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2p}y^2 \\ y=0 \ \text{ ή } \ y^3-8p^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2p}y^2 \\ y=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=\frac{1}{2p}y^2 \\ y^3-8p^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2p}0^2 \\ y=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=\frac{1}{2p}y^2 \\ y^3=(2p)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=\frac{1}{2p}y^2 \\ y=2p \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=\frac{1}{2p}4p^2 \\ y=2p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=2p \\ y=2p \end{cases}$$

(ii)

Εφαπτομένη ΑΒ της C_1 στο $A(2p, 2p)$: $2py = p(x + 2p) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + p$

Σύστημα των C_2, ΑΒ ώστε να βρούμε τις συντεταγμένες του Β.

$$x^2 = 2py \Leftrightarrow x^2 = 2p(\frac{1}{2}x + p) \Leftrightarrow$$

$$x^2 = px + 2p^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - px - 2p^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$x = -p$ ή $x = 2p$ απορρίπτεται αφού $2p = x_A$

Η $y = \frac{1}{2}x + p \Rightarrow y = \frac{1}{2}(-p) + p \Rightarrow y = \frac{p}{2}$ Άρα $B(-p, \frac{p}{2})$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε $\Gamma(\frac{p}{2}, -p)$

Εφαπτομένη της C_2 στο B : $-px = p(y + \frac{p}{2}) \Leftrightarrow -2x = 2y + p$ **(1)**

Εφαπτομένη της C_1 στο Γ : $-py = p(x + \frac{p}{2}) \Leftrightarrow -2y = 2x + p \Leftrightarrow$

$-2x = 2y + p$ **(2)**

Από τις (1), (2) συμπεραίνουμε ότι πρόκειται για την ίδια ευθεία.