3.1
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 87 – 89

Α΄ Ομάδας

1.
Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

(i) Όταν διέρχεται από το σημείο $Α(1, \sqrt{3})$

(ii) Όταν διέρχεται από το σημείο $Α(α – β,\ α + β)$

(iii) Όταν εφάπτεται της ευθείας $x – y = 2$

(iv) Όταν εφάπτεται της ευθείας $αx + βy = α^2 + β^2$

Λύση

(i)

$ρ = (ΟΑ) = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2.$

Εξίσωση του κύκλου : $x^2 + y^2 = 2^2$

(ii)

$ρ = (ΟΑ) = \sqrt{(α-β)^2 + (α+β)^2} = \sqrt{α^2 - 2αβ + β^2 + α^2 + 2αβ + β^2} = \sqrt{2α^2 + 2β^2}$

Εξίσωση του κύκλου : $x^2 + y^2 = 2α^2 + 2β^2$

(iii)

ρ = απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία $x – y – 2 = 0$ =

$$\frac{|1\cdot 0 - 1\cdot 0 - 2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Εξίσωση του κύκλου : $x^2 + y^2 = 2$

(iv)

ρ = απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία $αx + βy – (α^2 + β^2) = 0$ =

$$\frac{|α\cdot 0 - β\cdot 0 - (α^2+β^2)|}{\sqrt{α^2+β^2}} = \frac{α^2+β^2}{\sqrt{α^2+β^2}} = \sqrt{α^2+β^2}$$

Εξίσωση του κύκλου : $x^2 + y^2 = α^2 + β^2$

2.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

(i) Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 3$

(ii) Όταν είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$

(iii) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(5, 0)$

Λύση

(i)

Έστω $\varepsilon: \; xx_1 + yy_1 = 5$ η ζητούμενη εφαπτομένη, όπου $E(x_1, \; y_1)$ το σημείο επαφής.

ε || στην ευθεία $y = 2x + 3 \;\Rightarrow\; \lambda_\varepsilon = -\frac{x_1}{y_1} = 2 \;\Rightarrow\; x_1 = -2y_1$ **(1)**

Ε∈ στον κύκλο $\;\Rightarrow\; x_1^2 + y_1^2 = 5 \;\overset{(1)}{\Rightarrow}\; 4y_1^2 + y_1^2 = 5 \quad 5y_1^2 = 5 \quad y_1^2 = 1$

$y_1 = 1$ ή $y_1 = -1$

Για $y_1 = 1$, η (1) $x_1 = -2$, οπότε $\varepsilon: \; -2x + y = 5$

Για $y_1 = -1$, η (1) $x_1 = 2$, οπότε $\varepsilon: \; 2x - y = 5$

(ii)

Έστω $\varepsilon: \; xx_1 + yy_1 = 5$ η ζητούμενη εφαπτομένη, όπου $E(x_1, \; y_1)$ το σημείο επαφής.

ε ⊥ στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x \;\Rightarrow\; \lambda_\varepsilon = -\frac{x_1}{y_1} = -2 \;\Rightarrow\; x_1 = 2y_1$

Συνεχίζουμε όπως στην περίπτωση (i) και βρίσκουμε

$\varepsilon: \; 2x + y = 5$ ή $\varepsilon: \; -2x - y = 5$

(iii)

Έστω $\varepsilon: \; xx_1 + yy_1 = 5$ η ζητούμενη εφαπτομένη, όπου $E(x_1, \; y_1)$ το σημείο επαφής.

Α∈ ε $\;\Rightarrow\; 5x_1 + 0.y_1 = 5 \;\Rightarrow\; x_1 = 1$ **(2)**

Ε∈ στον κύκλο $\;\Rightarrow\; x_1^2 + y_1^2 = 5 \;\overset{(2)}{\Rightarrow}\; 1 + y_1^2 = 5 \;\Rightarrow\; y_1^2 = 4$

$y_1 = 2$ ή $y_1 = -2$

Άρα $\varepsilon: \; x + 2y = 5$ ή $\varepsilon: \; x - 2y = 5$

3.

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες του κύκλου $x^2 + y^2 = 2$ στα σημεία Α(1, 1), Β(–1, 1), Γ(–1, –1) και Δ(1, –1) σχηματίζουν τετράγωνο με διαγώνιες τους άξονες $x'x$ και $y'y$. Ποιο είναι το εμβαδόν του τετραγώνου αυτού;

Λύση

Εφαπτομένη στο Α(1, 1) $x + y = 2$.

Τέμνει τους άξονες στα Κ(2, 0), Λ(0, 2)

Εφαπτομένη στο Β(–1, 1) $-x + y = 2$

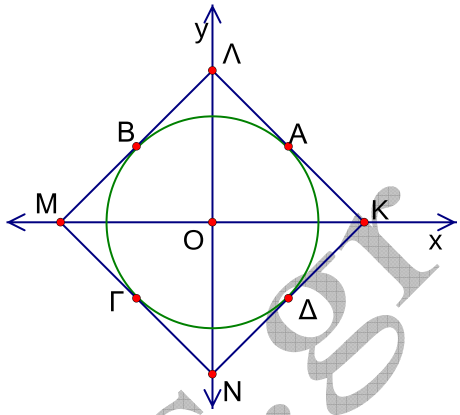
Τέμνει τους άξονες στα Λ(0, 2), Μ(–2, 0)

Εφαπτομένη στο Γ(–1, –1) $-x - y = 2$

Τέμνει τους άξονες στα Μ(–2, 0), Ν(0, –2)

Εφαπτομένη στο Δ(1, –1) $x - y = 2$

Τέμνει τους άξονες στα Ν(0, –2), Ν(2, 0)



Το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο διότι οι διαγώνιές του διχοτομούνται, είναι ίσες και κάθετες.

4.

Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που έχει μέσο το σημείο Μ(1, –1)

Λύση

Η ζητούμενη χορδή ε θα είναι κάθετη στην ΟΜ.

Είναι $\lambda_{OM} = \dfrac{-1-0}{1-0} = -1$. Άρα $\lambda_\varepsilon = 1$.

Επομένως ε : $y - (-1) = 1(x - 1) \Leftrightarrow y + 1 = x - 1 \Leftrightarrow y = x - 2$

5.

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

(i) Όταν έχει κέντρο Κ(0, 1) και διέρχεται από το σημείο $Α(\sqrt{3}\,, 0)$

(ii) Όταν έχει διάμετρο το τμήμα με άκρα Α(–1, 2) και Β(7, 8)

(iii) Όταν έχει ακτίνα ρ = 5 και τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία Α(1, 0) και Β(7, 0)

(iv) Όταν διέρχεται από τα σημεία Α(4, 0) και Β(8, 0) και έχει το κέντρο του στην ευθεία y = x

(v) Όταν τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία Α(4, 0) και Β(8, 0) και τον άξονα $y'y$ στα σημεία Γ(0, –2) και Δ(0, μ)

(vi) Όταν εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο Α(3, 0) και διέρχεται από το σημείο Β(1, 2)

(vii) Όταν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας 3x + 4y = 12 στο σημείο Α(0, 3)

Λύση

(i)

$\rho^2 = (ΚΑ)^2 = (0-1)^2 + (\sqrt{3}-0)^2 = 1 + 3 = 4$

Η εξίσωση του κύκλου είναι $(x-0)^2 + (y-1)^2 = 4$

(ii)

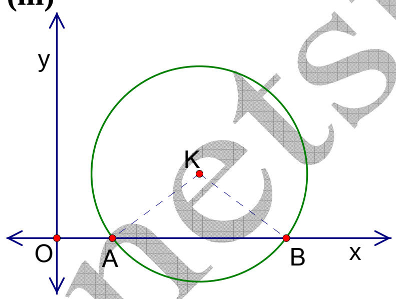
Το κέντρο Κ του κύκλου θα είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

$Κ\left(\frac{7-1}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = Κ(3, 5)$

$\rho^2 = (ΚΑ)^2 = (-1-3)^2 + (2-5)^2 = 16 + 9 = 25$

Η εξίσωση του κύκλου είναι $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$

(iii)



Έστω $Κ(x_0, y_0)$ το κέντρο του κύκλου.

$(ΚΑ)^2 = (ΚΒ)^2 \Rightarrow$

$(x_0-1)^2 + (y_0-0)^2 = (x_0-7)^2 + (y_0-0)^2 \Rightarrow$

$x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2 = x_0^2 - 14x_0 + 49 + y_0^2 \Rightarrow$

$12x_0 = 48 \Rightarrow x_0 = 4$ **(1)**

$(ΚΑ) = 5 \Rightarrow (ΚΑ)^2 = 25 \Rightarrow (x_0-1)^2 + (y_0-0)^2 = 25 \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$9 + y_0^2 = 25 \Rightarrow$

$y_0^2 = 16 \Rightarrow y_0 = 4$ ή -4

Η εξίσωση του κύκλου είναι $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 25$ ή $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 25$

(iv)

Έστω $Κ(x_0, y_0)$ το κέντρο του κύκλου.

$(ΚΑ)^2 = (ΚΒ)^2 \Rightarrow (x_0-4)^2 + (y_0-0)^2 = (x_0-8)^2 + (y_0-0)^2 \Rightarrow$

$x_0^2 - 8x_0 + 16 + y_0^2 = x_0^2 - 16x_0 + 64 + y_0^2 \Rightarrow$

$$8x_0 = 48 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 6$$

Επειδή $K \in$ στην ευθεία $y = x$, θα είναι $y_0 = x_0 = 6$

$\rho^2 = (KA)^2 = (4-6)^2 + (0-6)^2 = 4 + 36 = 40$

Η εξίσωση του κύκλου είναι $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 40$

(v)

Έστω $K(x_0, y_0)$ το κέντρο του κύκλου.

$(KA)^2 = (KB)^2 \quad \Rightarrow \quad (x_0-4)^2 + (y_0-0)^2 = (x_0-8)^2 + (y_0-0)^2 \quad \Rightarrow$

$x_0^2 - 8x_0 + 16 + y_0^2 = x_0^2 - 16x_0 + 64 + y_0^2 \quad \Rightarrow$

$8x_0 = 48 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 6$ **(2)**

$(KA)^2 = (K\Gamma)^2 \quad \Rightarrow \quad (x_0-4)^2 + (y_0-0)^2 = (x_0-0)^2 + (y_0+2)^2 \quad \Rightarrow$

$x_0^2 - 8x_0 + 16 + y_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + 4y_0 + 4 \quad \Rightarrow$

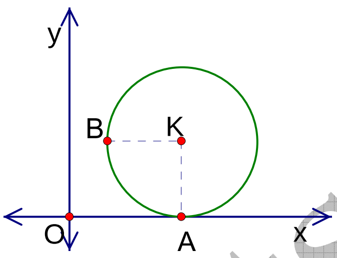
$12 = 8x_0 + 4y_0 \quad \Rightarrow$

$3 = 2x_0 + y_0 \overset{(2)}{\Rightarrow} 3 = 12 + y_0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = -9$

$\rho^2 = (KA)^2 = (x_0-4)^2 + (y_0-0)^2 = (6-4)^2 + (-9)^2 = 4 + 81 = 85$

Η εξίσωση του κύκλου είναι $(x-6)^2 + (y+9)^2 = 85$

(vi)



Έστω $K(x_0, y_0)$ το κέντρο του κύκλου.

$KA \perp x'x \quad \Rightarrow \quad x_0 = 3$

$(KA)^2 = (KB)^2 \quad \Rightarrow$

$(x_0-3)^2 + (y_0-0)^2 = (x_0-1)^2 + (y_0-2)^2 \quad \Rightarrow$

$x_0^2 - 6x_0 + 9 + y_0^2 = x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2 - 4y_0 + 4$

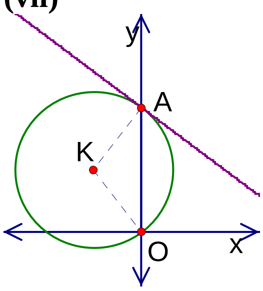
$\Rightarrow$

$-4x_0 + 4y_0 = -4 \quad \Rightarrow \quad y_0 = x_0 - 1 = 3 - 1 = 2$

$\rho = (KA) = y_0 = 2$

Η εξίσωση του κύκλου είναι $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$

(vii)



Έστω $K(x_0, y_0)$ το κέντρο του κύκλου και

ε η ευθεία $3x + 4y = 12$

$AK \perp \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lambda_{AK} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \quad \Rightarrow$

$$\frac{y_0 - 3}{x_0 - 0}\left(-\frac{3}{4}\right) = -1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y_0 - 3}{x_0} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad 3y_0 - 9 = 4x_0 \quad \textbf{(3)}$$

$$(KA)^2 = (KO)^2 \Rightarrow (x_0 - 0)^2 + (y_0 - 3)^2 = x_0^2 + y_0^2 \Rightarrow$$
$$x_0^2 + y_0^2 - 6y_0 + 9 = x_0^2 + y_0^2 \Rightarrow$$
$$-6y_0 = -9 \Rightarrow y_0 = \frac{3}{2}$$

(3) $\quad 3\cdot\frac{3}{2} - 9 = 4x_0 \Rightarrow 9 - 18 = 8x_0 \Rightarrow x_0 = -\frac{9}{8}$

$$\rho^2 = (KO)^2 = x_0^2 + y_0^2 = \frac{81}{64} + \frac{9}{4} = \frac{81+144}{64} = \frac{225}{64}$$

Η εξίσωση του κύκλου είναι $\quad (x + \frac{9}{8})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{225}{64}$

6.i)

Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που έχει εξίσωση

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

Λύση

$x_0 = -\frac{A}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \qquad y_0 = -\frac{B}{2} = -\frac{-6}{2} = 3 \qquad K(-2, 3)$

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{16+36+12}}{2} = \frac{\sqrt{64}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

6.ii)

Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που έχει εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 10x + 12y - 20 = 0$$

Λύση

$x_0 = -\frac{A}{2} = -\frac{-10}{2} = 5 \qquad y_0 = -\frac{B}{2} = -\frac{12}{2} = -6 \qquad K(5, -6)$

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{100+144+80}}{2} = \frac{\sqrt{324}}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

6.iii)

Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που έχει εξίσωση

$$3x^2 + 3y^2 + 6x - 9y + 1 = 0$$

Λύση

Η εξίσωση του κύκλου γράφεται $\quad x^2 + y^2 + 2x - 3y + \frac{1}{3} = 0$

$x_0 = -\frac{A}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \qquad y_0 = -\frac{B}{2} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2} \qquad K(-1, \frac{3}{2})$

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{4+9-\frac{4}{3}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{12+27-4}{3}}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{35}{12}}$$

6.iv)

Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που έχει εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 4\alpha x + 10\beta y + 4\alpha^2 + 16\beta^2 = 0$$

Λύση

$x_0 = -\frac{A}{2} = -\frac{-4\alpha}{2} = 2\alpha$ $\quad$ $y_0 = -\frac{B}{2} = -\frac{10\beta}{2} = -5\beta$ $\quad$ $K(2\alpha, -5\beta)$

$$\rho^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4} = \frac{16\alpha^2 + 100\beta^2 - 4(4\alpha^2 + 16\beta^2)}{4} =$$

$$\frac{16\alpha^2 + 100\beta^2 - 16\alpha^2 - 64\beta^2}{4} = \frac{36\beta^2}{4} = 9\beta^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = 3\beta$$

7.i)

Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ στο σημείο του $A(1, -1)$

Λύση

$x_0 = -\frac{A}{2} = 1,$ $\quad$ $y_0 = -\frac{B}{2} = -2.$ $\quad$ Κέντρο το $K(1, -2)$

Έστω $M(x, y)$ το τυχαίο σημείο της εφαπτομένης στο A $\Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{AK} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AK} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(1-1) + (y+1)(-2+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(y+1)(-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$$

7.ii)

Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 - 3\beta^2 = 0$ στο σημείο του $A(\alpha, -\beta)$

Λύση

$x_0 = -\frac{A}{2} = \alpha$ $\quad$ $y_0 = -\frac{B}{2} = \beta$ $\quad$ Κέντρο το $K(\alpha, \beta)$

Έστω $M(x, y)$ το τυχαίο σημείο της εφαπτομένης στο A $\Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{AK} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AK} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-\alpha)(\alpha-\alpha) + (y+\beta)(\beta+\beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(y+\beta)2\beta = 0 \quad \textbf{(1)}$$

- Όταν $\beta = 0$, η (1) γίνεται $(y+0)\cdot 0 = 0$ δηλαδή $0 = 0$, που δεν παριστάνει ευθεία.
  Η εξήγηση είναι :
  Η δοσμένη εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 - 3\beta^2 = 0$ γίνεται
  $$x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = 0$$
  $$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4\alpha^2 + 0^2 - 4\alpha^2 = 0$$
  Οπότε ο κύκλος εκφυλίζεται σε σημείο, άρα δε γίνεται λόγος για εφαπτομένη.

- Όταν $\beta \neq 0$, η (1) γίνεται $y + \beta = 0$ δηλαδή $y = -\beta$

8.

Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων

$C_1: \ x^2 + y^2 = 1$ και $C_2: \ (x-1)^2 + y^2 = 4$

Λύση

$K_1(0\,,0)$, $\rho_1 = 1$

$K_2(1\,,0)$, $\rho_2 = 2$

Είναι $(K_1K_2) = 1$ και $\rho_2 - \rho_1 = 2 - 1 = 1 \ \Rightarrow \ (K_1K_2) = \rho_2 - \rho_1$

Άρα οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

Β΄ Ομάδας

1.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-\alpha)(x-\beta) + (y-\gamma)(y-\delta) = 0$ παριστάνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τετραπλεύρου με κορυφές τα σημεία $A(\alpha, \gamma)$, $B(\beta, \gamma)$, $\Gamma(\beta, \delta)$, $\Delta(\alpha, \delta)$ και ότι οι $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι διάμετροι αυτού του κύκλου.

Λύση

$(x-\alpha)(x-\beta) + (y-\gamma)(y-\delta) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta + y^2 - (\gamma+\delta)y + \gamma\delta = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 + y^2 - (\alpha+\beta)x - (\gamma+\delta)y + \alpha\beta + \gamma\delta = 0$

είναι δε $(\alpha+\beta)^2 + (\gamma+\delta)^2 - 4(\alpha\beta+\gamma\delta) = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \gamma^2 + 2\gamma\delta + \delta^2 - 4\alpha\beta - 4\gamma\delta$

$= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma\delta + \delta^2$

$= (\alpha-\beta)^2 + (\gamma-\delta)^2 > 0$

Άρα η δοσμένη εξίσωση παριστάνει κύκλο.

Ελέγχουμε αν η εξίσωση επαληθεύεται από το σημείο $A(\alpha, \gamma)$

$(\alpha-\alpha)(x-\beta) + (\gamma-\gamma)(y-\delta) = 0$ που ισχύει.

Άρα ο κύκλος διέρχεται από το A.

Ομοίως, διέρχεται από τα B, Γ, Δ.

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = (\alpha-\beta)(\beta-\beta) + (\gamma-\gamma)(\delta-\gamma) = (\alpha-\beta)\cdot 0 + 0\cdot(\delta-\gamma) = 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow$

$\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{B\Gamma} \quad \Rightarrow \quad A\hat{B}\Gamma = 90^o \quad \Rightarrow \quad A\Gamma$ διάμετρος

Ομοίως $B\Delta$ διάμετρος

2.

Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x\text{συν}\varphi + y\text{ημ}\varphi = 4\text{ημ}\varphi - 2\text{συν}\varphi + 4$ εφάπτεται του κύκλου $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$

Λύση

Η δοσμένη ευθεία γράφεται $\varepsilon: x\text{συν}\varphi + y\text{ημ}\varphi - 4\text{ημ}\varphi + 2\text{συν}\varphi - 4 = 0$.

$x_0 = -\frac{A}{2} = -2$, $\quad y_0 = -\frac{B}{2} = 4$. $\quad$ Κέντρο του κύκλου $K(-2, 4)$

$\rho^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4} = \rho^2 = \frac{16 + 64 - 16}{4} = 16 \quad \Rightarrow \quad \rho = 4$.

$$d(K, \varepsilon) = \frac{|-2\text{συν}\varphi + 4\text{ημ}\varphi - 4\text{ημ}\varphi + 2\text{συν}\varphi - 4|}{\sqrt{\text{συν}^2\varphi + \text{ημ}^2\varphi}} = \frac{|-4|}{\sqrt{1}} = 4 = \rho.$$

Άρα η ευθεία εφάπτεται του κύκλου.

3.

Από ένα σημείο $M_0(x_0, y_0)$ εκτός του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ φέρνουμε τις δύο εφαπτόμενές του. Αν M_1, M_2 είναι τα σημεία επαφής, να αποδείξετε ότι η χορδή M_1M_2 έχει εξίσωση $xx_0 + yy_0 = \rho^2$.

Λύση

Ο κύκλος έχει κέντρο $O(0, 0)$ και επειδή το M_0 είναι εκτός του κύκλου, θα είναι $M_0 \neq O$, άρα ένα τουλάχιστον από τα x_0, y_0 είναι $\neq 0$.

Άρα η γραμμική εξίσωση $xx_0 + yy_0 = \rho^2$ παριστάνει ευθεία ε.

Για να αποδείξουμε ότι η ευθεία ε είναι η M_1M_2, αρκεί να αποδείξουμε ότι επαληθεύεται από τα σημεία M_1, M_2, δηλαδή ότι

$$x_1x_0 + y_1y_0 = \rho^2 \quad \text{και} \quad x_2x_0 + y_2y_0 = \rho^2$$

όπου (x_1, y_1) είναι οι συντεταγμένες του M_1 και (x_2, y_2) του M_2.

Η εφαπτομένη στο M_1 έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

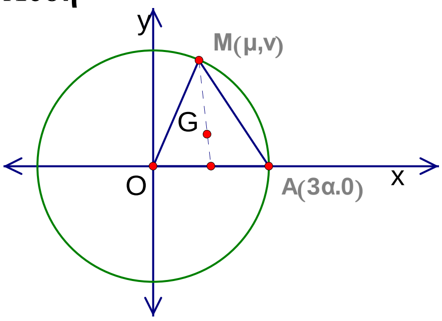
Επειδή το M_0 ανήκει σ'αυτή, θα την επαληθεύει, άρα $x_1x_0 + y_1y_0 = \rho^2$.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $x_2x_0 + y_2y_0 = \rho^2$.

4.

Έστω C ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το σημείο Α(3α, 0). Αν Μ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του C, που δε βρίσκεται στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι το κέντρο βάρους G του τριγώνου ΟΑΜ ανήκει στον κύκλο $(x-\alpha)^2+y^2=\alpha^2$.

Λύση



Έστω (μ, ν) οι συντεταγμένες του Μ.

Τότε $\mu^2+\nu^2=(3\alpha)^2=9\alpha^2$ **(1)**

Οι συντεταγμένες (x, y) του G είναι

$x=\dfrac{0+\mu+3\alpha}{3}$, $y=\dfrac{0+\nu+0}{3}$ $\Rightarrow$

$3x=\mu+3\alpha$, $3y=\nu$ $\Rightarrow$

$\mu=3x-3\alpha$, $\nu=3y$ $\Rightarrow$

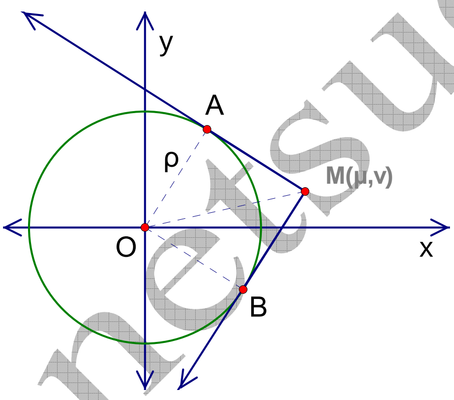
$\mu=3(x-\alpha)$, $\nu=3y$

Η (1) $\Rightarrow$ $9(x-\alpha)^2+9y^2=9\alpha^2$ $\Rightarrow$ $(x-\alpha)^2+y^2=\alpha^2$.

5.

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, από τα οποία οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο $x^2+y^2=\rho^2$ είναι κάθετες.

Λύση



Έστω Μ(μ,ν) τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου $\Leftrightarrow$

$\hat{A}=\hat{M}=\hat{B}=90^o$ και ΟΑ = ΟΒ $\Leftrightarrow$

ΟΑΒΜ τετράγωνο πλευράς ρ $\Leftrightarrow$

$OM=\rho\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow$

το Μ διαγράφει κύκλο $(O,\ \rho\sqrt{2})$ $\Leftrightarrow$

$\mu^2+\nu^2=(\rho\sqrt{2})^2$ $\Leftrightarrow$

$\mu^2+\nu^2=2\rho^2$

6.

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα σημεία Α(–3, 0) και Β(3, 0) είναι σταθερός και όσος με 2.

Λύση

Έστω Μ(x, y) τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου $\Leftrightarrow$

$$\frac{(MA)}{(MB)} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad (MA)^2 = 4\,(MB)^2$$

$$(x+3)^2 + (y-0)^2 = 4[(x-3)^2 + (y-0)^2]$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 = 4(x^2 - 6x + 9 + y^2)$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 = 4x^2 - 24x + 36 + 4y^2$$

$$0 = 3x^2 + 3y^2 - 30x + 27 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$$

Κύκλος με κέντρο Κ(5, 0) και ακτίνα $\rho = \dfrac{\sqrt{100-36}}{2} = \dfrac{\sqrt{64}}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

7.

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M, των οποίων το τετράγωνο της απόστασης από την αρχή των αξόνων είναι ίσο με το τετραπλάσιο της απόστασης από την ευθεία x = 1.

Λύση

Η ευθεία ε : $x = 1$ γράφεται $x - 1 = 0$

Έστω M(x, y) τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου $\Leftrightarrow$

$(OM)^2 = 4\,d(M, ε) \Leftrightarrow$

$x^2 + y^2 = 4\dfrac{|x-1|}{\sqrt{1^2+0^2}} \Leftrightarrow$

$x^2 + y^2 = 4|x-1| \Leftrightarrow$

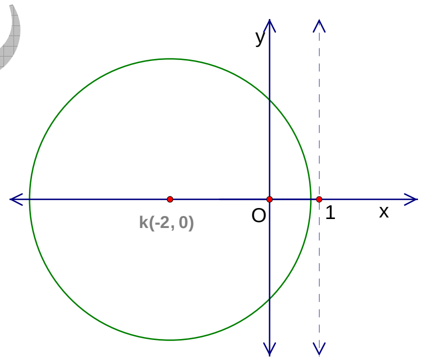
$(\ x^2 + y^2 = 4(x-1)$ με $x - 1 \geq 0\ )$ ή $(\ x^2 + y^2 = 4(1-x)$ με $x - 1 \leq 0\ )$

- $x^2 + y^2 = 4(x-1)$ με $x - 1 \geq 0$
  $x^2 + y^2 = 4x - 4$ με $x \geq 1$
  $x^2 + y^2 - 4x + 4 = 0$ με $x \geq 1$
  $(x-2)^2 + y^2 = 0$ με $x \geq 1$
  $x - 2 = 0$ και $y = 0$ με $x \geq 1$
  $x = 2$ και $y = 0$ με $x \geq 1$
  σημείο M(2, 0)

- $x^2 + y^2 = 4(1-x)$ με $x - 1 \leq 0$
  $x^2 + y^2 = 4 - 4x$ με $x \leq 1$
  $x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0$ με $x \leq 1$ **(1)**

$ρ = \dfrac{\sqrt{16+16}}{2} = \dfrac{\sqrt{32}}{2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$,

κέντρο K(–2, 0)



Η (1) $\Leftrightarrow$ το σημείο M(x, y) διαγράφει τον κύκλο που έχει κέντρο K(–2, 0) και ακτίνα $2\sqrt{2}$, με τον περιορισμό $x \leq 1$.

Στο σχήμα, παρατηρούμε ότι, όλα τα σημεία του κύκλου ικανοποιούν τον περιορισμό * (ακολουθεί η απόδειξη).

Τελικά, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος $(K,\ 2\sqrt{2})$ μαζί με το σημείο M(2, 0).

* Η εξίσωση του κύκλου $x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0$ γράφεται $y^2 = -x^2 - 4x + 4 \geq 0$.
  Δηλαδή το τριώνυμο $-x^2 - 4x + 4$ είναι ετερόσημο του $α = -1$

  και επειδή $Δ = 16 + 16 = 32 > 0$, ο x θα είναι εντός των ριζών

$$\frac{4 \pm \sqrt{32}}{-2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{-2} = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

Άρα $-2 - 2\sqrt{2} < x < -2 + 2\sqrt{2} < 1$

8.

Έστω το τρίγωνο με κορυφές $Α(3, 5)$, $Β(2, –4)$ και $Γ(–5, –1)$. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $Μ$ για τα οποία ισχύει $ΜΑ^2 + ΜΒ^2 + ΜΓ^2 = 107$
Είναι κύκλος με κέντρο το κέντρο βάρους του τριγώνου $ΑΒΓ$.

Λύση

Έστω $Μ(x, y)$ τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου $\Leftrightarrow$

$ΜΑ^2 + ΜΒ^2 + ΜΓ^2 = 107 \quad \Leftrightarrow$

$(x – 3)^2 + (y – 5)^2 + (x – 2)^2 + (y + 4)^2 + (x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 107 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 – 6x + 9 + y^2 – 10y + 25 +$

$x^2 – 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 +$

$x^2 + 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 = 107 \quad \Leftrightarrow$

$3x^2 + 3y^2 + 80 = 107 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 + y^2 = 27 = 3^2 \quad \Leftrightarrow$

το $Μ$ διαγράφει τον κύκλο που έχει κέντρο την αρχή $Ο$ και ακτίνα 3..

Οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι

$\left(\frac{3+2-5}{3}, \frac{5-4-1}{3}\right) = (0, 0)$ άρα το $Ο$ είναι το κέντρου βάρους του.

9.

Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ευθειών

$$xσυνθ + yημθ = α \quad \text{και} \quad xημθ – yσυνθ = β$$

ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = α^2 + β^2$ για όλες τις τιμές του $θ \in [0, 2π)$.

Λύση

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των δύο ευθειών.

$$D = \begin{vmatrix} συνθ & ημθ \\ ημθ & -συνθ \end{vmatrix} = –συν^2θ – ημ^2θ = –1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} α & ημθ \\ β & –συνθ \end{vmatrix} = –ασυνθ – βημθ \qquad D_y = \begin{vmatrix} συνθ & α \\ ημθ & β \end{vmatrix} = βσυνθ – αημθ$$

$$x = \frac{D_x}{D} = ασυνθ + βημθ \qquad y = \frac{D_y}{D} = αημθ – βσυνθ$$

$x^2 + y^2 =$

$(ασυνθ + βημθ)^2 + (αημθ – βσυνθ)^2 =$

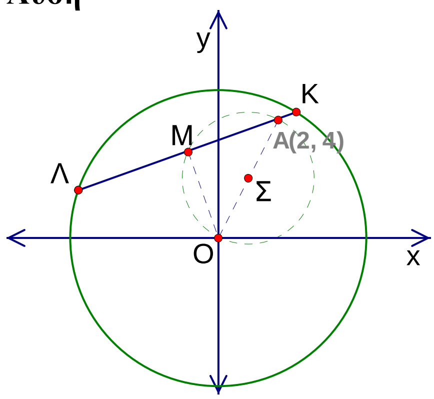
$α^2 συν^2θ + 2αβσυνθ\, ημθ + β^2 ημ^2θ + α^2 ημ^2θ – 2αβσυνθ\, ημθ + β^2 συν^2θ =$

$α^2(συν^2θ + ημ^2θ) + β^2(συν^2θ + ημ^2θ) = α^2 \cdot 1 + β^2 \cdot 1 = α^2 + β^2$

10.

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$, που διέρχονται από το σημείο Α(2, 4).

Λύση



Έστω Μ(x, y) τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου $\Leftrightarrow$

το Μ είναι μέσο της τυχαίας χορδής ΚΛ, που διέρχεται από το Α $\Leftrightarrow$

$OM \perp MA$ $\Leftrightarrow$

το Μ βλέπει το τμήμα ΟΑ με ορθή γωνία $\Leftrightarrow$
το Μ διαγράφει κύκλο διαμέτρου ΟΑ

Το κέντρο του είναι $\Sigma(\frac{2+0}{2}, \frac{4+0}{2}) = \Sigma(1, 2)$ και

η ακτίνα του $\rho = (\Sigma O) = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$.

Άρα η εξίσωσή του είναι $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$