Γενικές ασκήσεις σελίδας 76 – 77

1.

Να βρείτε την εξίσωση ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο M(1, 0) και τέμνει τις ευθείες $y = x + 2$ και $y = x$ στα σημεία A και B αντιστοίχως, έτσι, ώστε (AB) = 2.

Λύση

Η ζητούμενη ευθεία ε, αφού διέρχεται από το σημείο M(1, 0) θα έχει εξίσωση

$x = 1$ ή $y - 0 = \lambda(x - 1),\ \lambda\in\mathbb{R} \Leftrightarrow y = \lambda x - \lambda$

- Όταν $\varepsilon: x = 1$

Συντεταγμένες του A : $\begin{cases} y=x+2 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1+2 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=1 \end{cases}$ A(1, 3)

Συντεταγμένες του B : $\begin{cases} y=x \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}$ B(1, 1)

$(AB) = \sqrt{(1-1)^2 + (3-1)^2} = 2$

Άρα η ευθεία $x = 1$ είναι λύση του προβλήματος.

- Όταν $\varepsilon: y = \lambda x - \lambda$

Συντεταγμένες του A : $\begin{cases} y=x+2 \\ y=\lambda x-\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-2 \\ \lambda x-y=\lambda \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} = \lambda - 1,\quad D_x = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} = \lambda + 2,\quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + 2\lambda = 3\lambda$

Για $\lambda = 1$, το σύστημα είναι αδύνατο.

Για $\lambda \neq 1$ έχουμε $A(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D})$ δηλαδή $A(\frac{\lambda+2}{\lambda-1}, \frac{3\lambda}{\lambda-1})$

Συντεταγμένες του B : $\begin{cases} y=x \\ y=\lambda x-\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ \lambda x-y=\lambda \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} = \lambda - 1,\quad D_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} = \lambda,\quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda$

Για $\lambda = 1$, το σύστημα είναι αδύνατο.

Για $\lambda \neq 1$ έχουμε $B(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D})$ δηλαδή $B(\frac{\lambda}{\lambda-1}, \frac{\lambda}{\lambda-1})$

$(AB) = 2 \Leftrightarrow (AB)^2 = 4$

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda-1} - \frac{\lambda+2}{\lambda-1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda-1} - \frac{3\lambda}{\lambda-1}\right)^2 = 4$$

$$\left(\frac{2}{\lambda-1}\right)^2 + \left(\frac{-2\lambda}{\lambda-1}\right)^2 = 4$$

$$\frac{4+4\lambda^2}{(\lambda-1)^2} = 4$$

$$1 + \lambda^2 = (\lambda-1)^2$$

$$1 + \lambda^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0$$

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι $y = 0 \cdot x - 0$, δηλαδή η $y = 0$

2.

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\lambda x + (\lambda - 1)y = 2\lambda$ και $(\lambda + 1)x + \lambda y = 2\lambda + 1$ τέμνονται για όλες τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής τους;

Λύση

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda-1 \\ \lambda+1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\lambda^2 - 1) = \lambda^2 - \lambda^2 + 1 = 1 \neq 0.$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, άρα οι ευθείες τέμνονται.

$$D_x = \begin{vmatrix} 2\lambda & \lambda-1 \\ 2\lambda+1 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - 2\lambda^2 + 2\lambda - \lambda + 1 = \lambda + 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda \\ \lambda+1 & 2\lambda+1 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + \lambda - 2\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda$$

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο τομής τους. Τότε

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\lambda+1}{1} \\ y = \dfrac{-\lambda}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda+1 \\ y = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda+1 \\ \lambda = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y+1 \\ \lambda = -y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x = -y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y - 1 = 0$$

3.

Αν οι τρεις ευθείες $\alpha_\kappa x+\beta_\kappa y=1$, με $\kappa = 1, 2, 3$, διέρχονται από το ίδιο σημείο, να αποδείξετε ότι τα σημεία $(\alpha_\kappa, \beta_\kappa)$, $\kappa = 1, 2, 3$ είναι συνευθειακά.

Λύση

Έστω Σ το σημείο από το οποίο διέρχονται οι τρεις ευθείες ε_1, ε_2, ε_3.

Σύστημα των ευθειών ε_1, ε_2 : $\begin{cases}\alpha_1x+\beta_1y=1\\ \alpha_2x+\beta_2y=1\end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1,$$

$$D_x = \begin{vmatrix}1 & \beta_1\\ 1 & \beta_2\end{vmatrix} = \beta_2-\beta_1, \qquad D_y = \begin{vmatrix}\alpha_1 & 1\\ \alpha_2 & 1\end{vmatrix} = \alpha_1-\alpha_2$$

Άρα $\Sigma\left(\dfrac{D_x}{D}, \dfrac{D_y}{D}\right)$

$\Sigma\in\varepsilon_3 \qquad \alpha_3\dfrac{D_x}{D}+\beta_3\dfrac{D_y}{D}=1 \qquad \alpha_3D_x+\beta_3D_y=D$

$\alpha_3(\beta_2-\beta_1)+\beta_3(\alpha_1-\alpha_2)=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$

$\alpha_3\beta_2-\alpha_3\beta_1+\beta_3\alpha_1-\beta_3\alpha_2-\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1=0$ **(1)**

Θεωρούμε τα σημεία $A_1(\alpha_1, \beta_1)$, $A_2(\alpha_2, \beta_2)$, $A_3(\alpha_3, \beta_3)$

$\overrightarrow{A_1A_2}=(\alpha_2-\alpha_1, \beta_2-\beta_1)$, $\qquad \overrightarrow{A_1A_3}=(\alpha_3-\alpha_1, \beta_3-\beta_1)$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$\overrightarrow{A_1A_2} \parallel \overrightarrow{A_1A_3}$ ή

$\begin{vmatrix}\alpha_2-\alpha_1 & \beta_2-\beta_1\\ \alpha_3-\alpha_1 & \beta_3-\beta_1\end{vmatrix}=0$ ή

$(\alpha_2-\alpha_1)(\beta_3-\beta_1)-(\alpha_3-\alpha_1)(\beta_2-\beta_1)=0$ ή

$\alpha_2\beta_3-\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_3+\alpha_1\beta_1-\alpha_3\beta_2+\alpha_3\beta_1+\alpha_1\beta_2-\alpha_1\beta_1=0$ ή

$\alpha_2\beta_3-\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_2+\alpha_3\beta_1+\alpha_1\beta_2=0$ που ισχύει από την (1)

4.

Να βρείτε την ευθεία η οποία συνδέει το σημείο $A(\alpha, \beta)$ με το σημείο τομής των ευθειών $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$ και $\frac{x}{\beta}+\frac{y}{\alpha}=1$, όπου $\alpha,\ \beta \neq 0$ και $\alpha \neq \pm\beta$.

Λύση

Λύνουμε το σύστημα των δύο ευθειών, για να βρούμε το σημείο τομής τους K.

$$\begin{cases} \beta x+\alpha y=\alpha\beta \\ \alpha x+\beta y=\alpha\beta \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta^2 - \alpha^2 = (\beta-\alpha)(\beta+\alpha)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \alpha\beta & \alpha \\ \alpha\beta & \beta \end{vmatrix} = \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta = \alpha\beta(\beta-\alpha)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta \\ \alpha & \alpha\beta \end{vmatrix} = \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta = \alpha\beta(\beta-\alpha)$$

Άρα $K\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)$

$$\lambda_{AK} = \frac{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}-\beta}{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}-\alpha} = \frac{\frac{\alpha\beta-\alpha\beta-\beta^2}{\alpha+\beta}}{\frac{\alpha\beta-\alpha^2-\alpha\beta}{\alpha+\beta}} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

Ευθεία AK : $y-\beta = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(x-\alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 y - \alpha^2\beta = \beta^2 x - \beta^2\alpha$

$$\beta^2 x - \alpha^2 y + \alpha^2\beta - \beta^2\alpha = 0$$

5.

Αν οι ευθείες $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$ και $\frac{x}{A}+\frac{y}{B}=1$ είναι παράλληλες με $A > \alpha$ και $\beta > 0$, να δείξετε ότι η απόσταση μεταξύ των ευθειών είναι $\frac{\beta(A-\alpha)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

Λύση

Οι ευθείες γίνονται $\beta x + \alpha y - \alpha\beta = 0$ και $Bx + Ay - AB = 0$.
Για $x = 0$, η δεύτερη δίνει $Ay - AB = 0 \Rightarrow y = B$.
Άρα ένα σημείο της είναι το $K(0, B)$

Επειδή οι ευθείες είναι παράλληλες, θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης $\Rightarrow$

$$-\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{B}{A} \Rightarrow \beta A = \alpha B$$

Η απόστασή τους ισούται με την απόσταση του K από την πρώτη ευθεία

$$d = \frac{|\beta\cdot 0+\alpha B-\alpha\beta|}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}} = \frac{|\beta A-\alpha\beta|}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}} = \frac{|\beta(A-\alpha)|}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}} = \frac{|\beta||A-\alpha|}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}} = \frac{\beta(A-\alpha)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

6.

Να δείξετε ότι :

i) Η εξίσωση $x^2 - 4xy + y^2 = 0$ δύο ευθείες.

ii) Καθεμιά σχηματίζει με την $x - y = 0$ γωνία 30^o.

Λύση

i)

$x^2 - 4xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 4xy + x^2 = 0$ τριώνυμο ως προς y.

$\Delta = 16x^2 - 4x^2 = 12x^2$ $\qquad y = \dfrac{4x \pm \sqrt{12x^2}}{2} = \dfrac{4x \pm 2x\sqrt{3}}{2} = 2x \pm x\sqrt{3}$

Άρα $y = (2 + \sqrt{3})x$ ευθεία θ ή $y = (2 - \sqrt{3})x$ ευθεία σ

ii)

Έστω ε η ευθεία $x - y = 0$.

Είναι $\lambda_\varepsilon = 1$. Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\varepsilon} = (1, 1) \parallel \varepsilon$

$\lambda_\theta = 2 + \sqrt{3}$. Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\theta} = (1,\ 2 + \sqrt{3}) \parallel \theta$

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\varepsilon}, \vec{\theta}}) = \frac{1.1 + 1.(2+\sqrt{3})}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{1^2+(2+\sqrt{3})^2}} = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{1+4+4\sqrt{3}+3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}\sqrt{8+4\sqrt{3}}} \quad \textbf{(1)}$$

Αλλά $8 + 4\sqrt{3} = 2(4 + 2\sqrt{3}) = 2\,(3 + 1 + 2\sqrt{3}) =$

$$2\left(\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3} + 1^2\right) = 2\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

$$(1) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\varepsilon}, \vec{\theta}}) = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\widehat{\vec{\varepsilon}, \vec{\theta}}) = 30^o \Rightarrow (\widehat{\varepsilon, \theta}) = 30^o$$

Ομοίως για τη γωνία των ε, σ.

7.

Να βρείτε τη συνθήκη, ώστε :

i) Η ευθεία $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ να ορίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

ii) Ο άξονας $x'x$ να διχοτομεί τη γωνία των ευθειών με εξισώσεις

$\varepsilon_1 : \ \alpha_1 x + \beta_1 y = 0$ και $\varepsilon_2 : \ \alpha_2 x + \beta_2 y = 0$

Λύση

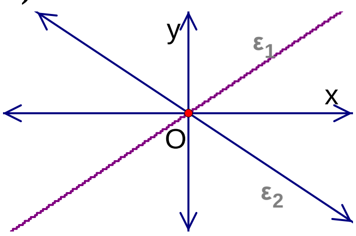
i)

Περιορισμός : Για να ορίζεται τρίγωνο, θα πρέπει α, β και $\gamma \neq 0$.

Η ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία $K(-\frac{\gamma}{\alpha},\ 0)$ και $\Lambda(0,\ -\frac{\gamma}{\beta})$

$$(OK) = (O\Lambda) \Leftrightarrow \left|-\frac{\gamma}{\alpha}\right| = \left|-\frac{\gamma}{\beta}\right| \Leftrightarrow |\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha = \pm\beta$$

ii)



Θα πρέπει $\lambda_1 = -\lambda_2 \Leftrightarrow$

$$-\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \Leftrightarrow$$

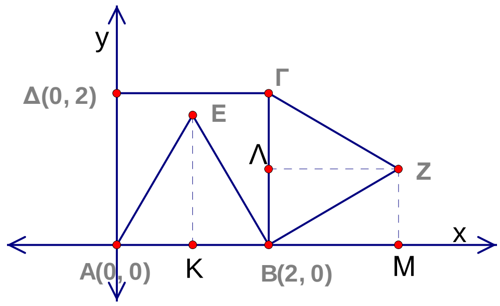
$$\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 = 0$$

8.

Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, ενώ τα ΕΑΒ και ΖΒΓ είναι ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς α = 2.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των Ε και Ζ,

ii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.



Λύση

(i)

Φέρουμε ΕΚ, ΖΜ ⊥ Αx και ΖΛ ⊥ΓΒ.

Το Κ θα είναι μέσο του ΑΒ και το Λ θα είναι μέσο του ΒΓ.

Άρα Κ(1, 0) και Λ(1, 1).

Από την Ευκλείδεια Γεωμετρία, για το ύψος ισοπλεύρου τριγώνου, γνωρίζουμε ότι

$\upsilon = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, επομένως ΕΚ = ΖΛ = ΒΜ = $\dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Άρα Ε(1, $\sqrt{3}$) και Ζ(2 + $\sqrt{3}$, 1)

(ii)

Δ, Ε, Ζ συνευθειακά ⇔ $\lambda_{\Delta E} = \lambda_{\Delta Z}$

$$\frac{\sqrt{3}-2}{1-0} = \frac{1-2}{2+\sqrt{3}-0}$$

$$\frac{\sqrt{3}-2}{1} = \frac{-1}{2+\sqrt{3}}$$

$(\sqrt{3}-2)(2+\sqrt{3}) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 3-4=-1$ που ισχύει