3.5 – 3.6
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 48

Ερωτήσεις κατανόησης

1.
Έστω ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής . Αν $ΑΒ \perp ε$ και $ΑΓ \perp ε$
(Β, Γ σημεία της ε) τότε

i) $Β \equiv Γ$ Σ Λ

ii) $Β \neq Γ$ Σ Λ

iii) ΑΒ = ΑΓ Σ Λ

Αιτιολογήστε την απάντηση σας

i) Διότι από ένα σημείο εκτός ευθείας μία κάθετος άγεται προς την ευθεία

ii) Προφανώς αφού είναι σωστό το (i)

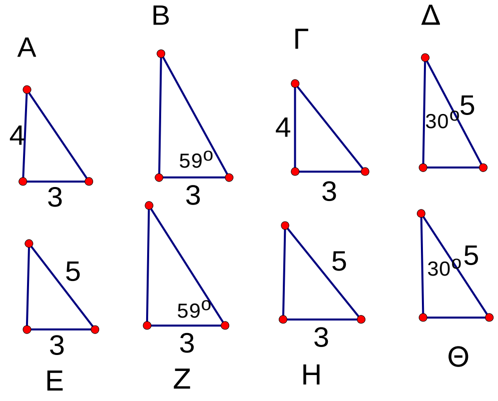
iii) Διότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΑΓ ταυτίζονται

2.
Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) , Δ σημείο της βάσης του και οι προτάσεις
π_1: Το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου
π_2 :Το ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου
π_3: Το ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου
Αν για το ΑΔ ισχύει μία από τις προτάσεις π_1, π_2, π_3 ισχύουν οι άλλες δύο;
Ναι

3.
Διατυπώστε τις ανακεφαλαιωτικές περιπτώσεις ισότητας ορθογωνίων τριγώνων
i) Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία
ii) Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν μία πλευρά και την προσκείμενη σ' αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία

4.

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει οκτώ ορθογώνια τρίγωνα . Καθένα από αυτά είναι ίσο με ένα από τα υπόλοιπα . Να βρείτε τα ζεύγη των ίσων τριγώνων και να αναφέρετε τον λόγο για τον οποίο είναι ίσα



i) Το Α είναι ίσο με το Γ διότι έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία
ii) Το Β είναι ίσο με το Ζ διότι έχουν μία κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σ' αυτή οξεία γωνία ίσες
iii) Το Δ είναι ίσο με το Θ διότι έχουν την υποτείνουσα και μία προσκείμενη σ' αυτή οξεία γωνία ίσες.
iv) Το Ε είναι ίσο με το Η διότι έχουν τις υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά μία προς μία ίσες

5.

Συμπληρώστε τα κενά στην επόμενη πρόταση:
Ο φορέας του αποστήματος μίας χορδής είναι μεσοκάθετος της χορδής και διχοτομεί το αντίστοιχο στην χορδή τόξο .

6.

Αν ΑΒ, ΓΔ είναι χορδές ενός κύκλου (Κ) και ΚΕ, ΚΖ είναι τα αντίστοιχα αποστήματα τους τότε

α . $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE = \frac{1}{2}KZ$

β. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE > KZ$

γ $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE = KZ$

δ. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow \frac{1}{2}KE = \frac{1}{3}KZ$

ε. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE < KZ$

κυκλώστε την σωστή απάντηση και δικαιολογήσετε την απάντηση σας .
Σωστή απάντηση είναι η (γ) διότι δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματα τους είναι ίσα

7.

Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μίας γωνίας ;
Ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας

8.

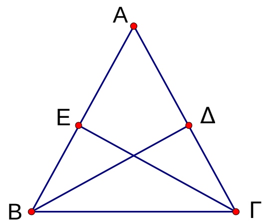
Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές τους ίσες είναι πάντοτε ίσα ;
αιτιολογήστε την απάντηση σας .
Όχι, θα πρέπει οι πλευρές να είναι ομόλογες

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Να αποδείξετε ότι τα ύψη ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του, είναι ίσα.

Λύση



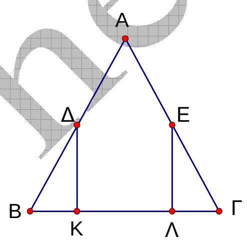
Έστω ΑΒ = ΑΓ και ΒΔ, ΓΕ τα ύψη.
τρ. ΑΔΒ = τρ.ΑΕΓ διότι
είναι ορθογώνια, έχουν ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A}$ κοινή.
Άρα ΒΔ = ΓΕ

2.

Να αποδείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν:
i) από τη βάση
ii) από τις ίσες πλευρές

Λύση

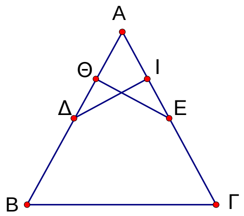
i)



Έστω ΑΒ = ΑΓ , Δ και Ε τα μέσα και
ΔΚ, ΕΛ οι αποστάσεις

τρ. ΔΚΒ = τρ. ΕΛΓ διότι
$\hat{B} = \hat{\Gamma}$, ορθογώνια και ΔΒ = ΕΓ σαν μισά ίσων

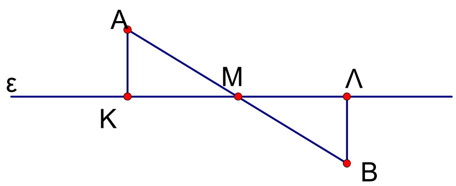
ii)



Έστω ΔΙ , ΕΘ οι αποστάσεις των μέσων
τρ. ΑΙΔ = τρ. ΑΘΕ διότι
$\hat{A}$ κοινή, ορθογώνια και ΑΔ = ΑΕ σαν μισά ίσων

3.
Να αποδείξετε ότι τα άκρα ενός τμήματος ισαπέχουν από κάθε ευθεία που διέρχεται από το μέσο του.

Λύση

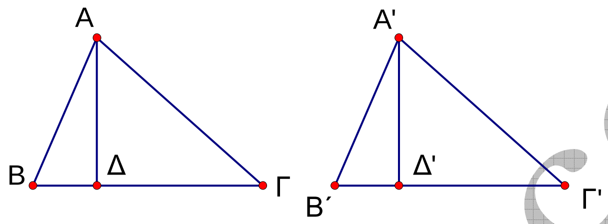


Έστω AB το τμήμα με μέσο M, ε η ευθεία και AK, $B\Lambda$ οι αποστάσεις των A, B από την ε.

τρ. MKA = τρ. $M\Lambda B \Rightarrow AK = B\Lambda$

4.
Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι και τα ύψη τους, που αντιστοιχούν στα ίσες πλευρές, είναι ίσα.

Λύση



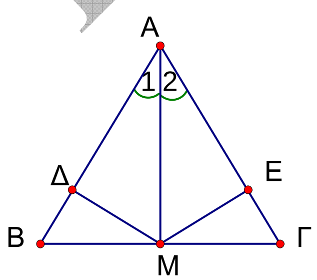
Έστω $A\Delta$ και $A'\Delta'$ αντίστοιχα ύψη.

τρ. $A\Delta B$ = τρ. $A'B'\Gamma'$ διότι είναι ορθογώνια με $\hat{B} = \hat{B}'$ και $AB = A'B'$.
Άρα $A\Delta = A'\Delta'$

Αποδεικτικές ασκήσεις

1.
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M το μέσο της βάσης του $B\Gamma$.
Να αποδείξετε ότι:
i) το M ισαπέχει από τις ίσες πλευρές του τριγώνου
ii) η AM είναι διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι αποστάσεις του M από τις ίσες πλευρές μεταξύ τους.

Λύση



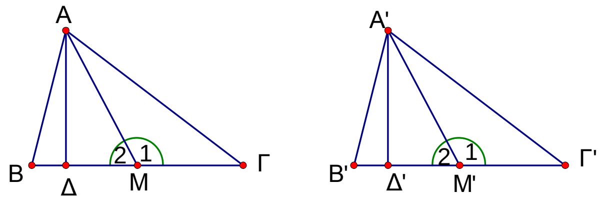
$M\Delta$, ME οι αποστάσεις
i) τρ. ΔAM = τρ. EAM διότι είναι ορθογώνια, AM κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ αφού η διάμεσος AM είναι και διχοτόμος.
Άρα $M\Delta = ME$

ii) τρ. ΔAM = τρ. $EAM \Rightarrow A\hat{M}\Delta = A\hat{M}E$
Άρα AM διχοτόμος της $\Delta\hat{M}E$.

2.

Να αποδείξετε ότι αν σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι $\alpha = \alpha'$, $\upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}$ και $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$ τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Λύση



τρ. ΑΔΜ = τρ. Α΄Δ΄Μ΄ αφού είναι ορθογώνια με ίση υποτείνουσα και ίση μία κάθετη πλευρά $\Rightarrow$

$\hat{M}_2 = \hat{M}'_2$ άρα και $\hat{M}_1 = \hat{M}'_1$ σαν παραπληρώματά τους

(Π–Γ–Π) $\Rightarrow$ τρ. ΑΜΒ = τρ. Α΄Μ΄Β΄

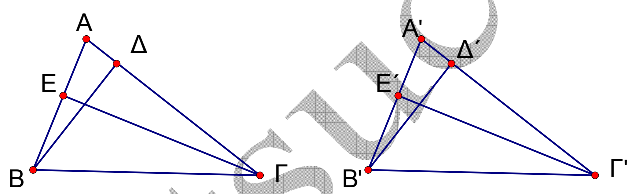
$\hat{B} = \hat{B}'$ και ΑΒ = Α΄Β΄

(Π–Γ–Π) $\Rightarrow$ τρ. ΑΒΓ = Α΄Β΄Γ΄

3.

Να αποδείξετε ότι αν σε δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι $\alpha = \alpha'$, $\upsilon_\beta = \upsilon_{\beta'}$ και $\upsilon_\gamma = \upsilon_{\gamma'}$ τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Λύση



τρ. ΕΒΓ = τρ. Ε΄Β΄Γ΄ διότι είναι ορθογώνια με ΒΓ = Β΄Γ΄ και ΓΕ = ΓΕ΄

Άρα $\hat{B} = \hat{B}'$

τρ. ΔΒΓ = τρ. Δ΄Β΄Γ΄ ομοίως.

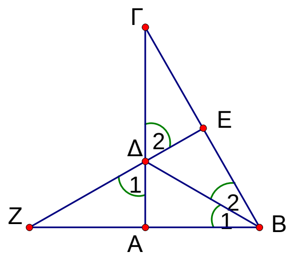
Άρα $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$

(Γ–Π–Γ) $\Rightarrow$ τρ. ΑΒΓ = τρ. Α΄Β΄Γ΄

4.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε ΔΕ ⊥ ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές.

Λύση



τρ. ΑΒΔ = τρ. ΕΒΔ διότι

ορθογώνια, ΒΔ κοινή και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$.

Άρα ΔΑ = ΔΕ και ΒΑ = ΒΕ **(1)**

τρ. ΑΖΔ = τρ. ΕΓΔ διότι

ορθογώνια, ΔΑ = ΔΕ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$

Άρα ΑΖ = ΕΓ **(2)**

(1) + (2) ⇒ ΒΖ = ΒΓ ⇒ τρ. ΒΖΓ ισοσκελές.

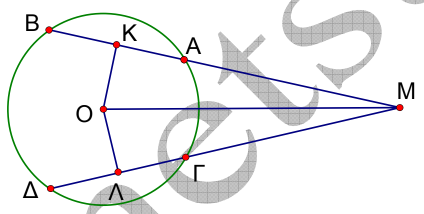
5.

Δίνεται κύκλος (Ο, R), οι ίσες χορδές του ΑΒ, ΓΔ και τα αποστήματά τους ΟΚ και ΟΛ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των ΒΑ και ΔΓ τέμνονται στο Μ, να αποδείξετε ότι:

i) τα τρίγωνα ΜΟΚ και ΜΟΛ είναι ίσα

ii) ΜΑ = ΜΓ και ΜΒ = ΜΔ

Λύση



i) Ίσες χορδές ⇒ ίσα αποστήματα ΟΚ = ΟΛ

Άρα τρ. ΚΟΜ = τρ. ΛΟΜ

ii) Από i) ⇒ ΜΚ = ΜΛ **(1)**

αλλά ΒΚ = ΚΑ = ΔΛ = ΛΓ μισά ίσων **(2)**

(1) + (2) ⇒ ΜΒ = ΜΔ

(1) – (2) ⇒ ΜΑ = ΜΓ

Σύνθετα Θέματα

1.

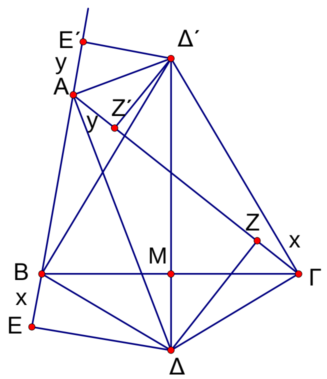
Θεωρούμε τρίγωνο $ΑΒΓ$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$ τέμνει τη μεσοκάθετο της $ΒΓ$ στο σημείο $Δ$. Έστω $Ε$ και $Ζ$ οι προβολές του $Δ$ στις πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα.

i) Να συγκρίνεται τα τρίγωνα $ΔΒΕ$ και $ΔΓΖ$

ii) Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα θεωρώντας την εξωτερική διχοτόμο της $\hat{Α}$, η οποία τέμνει τη μεσοκάθετο της $ΒΓ$ στο σημείο $Δ΄$, με προβολές τα σημεία $Ε΄, Ζ΄$
στις πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα.

iii) Να αποδείξετε ότι $ΕΕ΄ = ΑΓ$ και $ΖΖ΄= ΑΒ$

Λύση



i)
$Δ$ ανήκει στη μεσοκάθετο της $ΒΓ \Rightarrow$
$ΔΒ = ΔΓ$ **(1)**
$Δ$ ανήκει στη διχοτόμο της $\hat{Α} \Rightarrow$
$ΔΕ = ΔΖ$ **(2)**
$\hat{Ε} = \hat{Ζ} = 1 ∟$ **(3)**
(1) , (2), (3) $\Rightarrow$ τρ. $ΔΒΕ$ = τρ. $ΔΓΖ$

ii)
$Δ΄$ ανήκει στη μεσοκάθετο της $ΒΓ \Rightarrow$
$Δ΄Β = Δ΄Γ$ **(1΄)**
$Δ΄$ ανήκει στη διχοτόμο της $\hat{Α}_{εξ} \Rightarrow$
$Δ΄Ε΄ = Δ΄Ζ΄$ **(2΄)**
$\hat{Ε}' = \hat{Ζ}' = 1 ∟$ **(3΄)**
(1΄) , (2΄), (3΄) $\Rightarrow$ τρ. $Δ΄ΒΕ΄$ = τρ. $Δ΄ΓΖ΄$

iii)
Από i) $\Rightarrow$ $ΒΕ = ΓΖ = x$
τρ. $ΑΕΔ$ = τρ. $ΑΖΔ$ διότι ορθογώνια, $ΑΔ$ κοινή και $ΑΔ$ διχοτόμος.
Άρα $ΑΕ = ΑΖ \Rightarrow ΑΒ + x = ΑΓ – x \Rightarrow 2\,x = ΑΓ – ΑΒ$ **(4)**

τρ. $Δ΄ΕΆ$ = τρ. $Δ΄ΖΆ$ διότι ορθογώνια, $ΔΆ$ κοινή και $ΔΆ$ εξ. Διχοτόμος.
Άρα $ΑΕ¨= ΑΖ΄ = y$
Από ii) $\Rightarrow$ $ΒΕ΄= ΓΖ΄ \Rightarrow ΒΑ + ΑΕ΄= ΓΑ – ΖΆ$
$ΒΑ + y = ΓΑ – y$
$2\,y = ΓΑ – ΒΑ$ **(5)**

(4) , (5) $\Rightarrow$ $x = y = \dfrac{ΑΓ – ΑΒ}{2}$

Αλλά $ΕΕ΄= ΕΒ +ΒΑ +ΑΕ΄$

$= x + ΒΑ + y = 2\,x + ΒΑ$

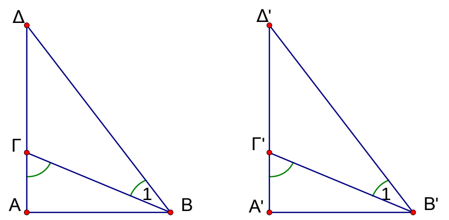
$= ΑΓ – ΑΒ +ΒΑ = ΑΓ$

και $ΖΖ΄= ΑΓ – ΑΖ΄– ΖΓ = ΑΓ– y – x$
$= ΑΓ –2\,x = ΑΓ – (\,ΑΓ – ΑΒ\,) = ΑΒ$.

2.

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ , Α΄Β΄Γ΄ έχουν μία κάθετη πλευρά ίση και η περίμετρος του ενός είναι ίση με την περίμετρο του άλλου, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Λύση



Έστω ΑΒ = Α΄Β΄

ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ = Α΄Β΄+ Β΄Γ΄+ ΓΆ΄ ⇒
ΒΓ + ΓΑ = Β΄Γ΄+ ΓΆ΄ **(1)**

Προεκτείνουμε την ΑΓ κατά τμήμα ΓΔ = ΓΒ και την Α΄Γ΄ κατά τμήμα Γ΄Δ΄= Γ΄Β΄

(1) ⇒ ΑΔ = Α΄Δ΄ και επειδή ΑΒ = Α΄Β΄ και $\hat{A} = \hat{A}'$ θα είναι
τρ. ΔΒΑ = τρ. Δ΄Β΄Α΄ οπότε $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}'$ **(2)**

Τρ. ΓΒΔ ισοσκελές ⇒ $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}$ **(3)**

Αλλά $\hat{\Gamma} = \hat{B}_1 + \hat{\Delta}$ σαν εξωτερική του τριγώνου ΓΒΔ $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $\hat{\Gamma} = 2\hat{\Delta}$

Ομοίως $\hat{\Gamma}' = 2\hat{\Delta}'$

Η (2) ⇒ $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$

Τελικά τρ. ΑΒΓ = τρ. Α΄Β΄Γ΄ αφού είναι ορθογώνια με ΑΒ = Α΄Β΄ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.