3.3 – 3.4
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 43

Ερωτήσεις κατανόησης
1.
Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις

i) Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν μία γωνία του είναι οξεία Σ Λ

ii) Ένα τρίγωνο είναι σκαληνό όταν δύο πλευρές του είναι άνισες Σ Λ

2.
Διατυπώστε τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων
i) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες από αυτές γωνίες ίσες τότε τα τρίγωνα είναι ίσα
ii) Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία τότε τα τρίγωνα είναι ίσα
iii) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

3.
Συμπληρώστε τα κενά
i) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του είναι διάμεσος και ύψος
ii) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος στην βάση του είναι διχοτόμος και ύψος
iii) Ένα σημείο Μ βρίσκεται στην μεσοκάθετο ενός τμήματος ΑΒ όταν ΜΑ = ΜΒ
iv) Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα όταν οι αντίστοιχες χορδές τους είναι ίσες .

Ασκήσεις Εμπέδωσης

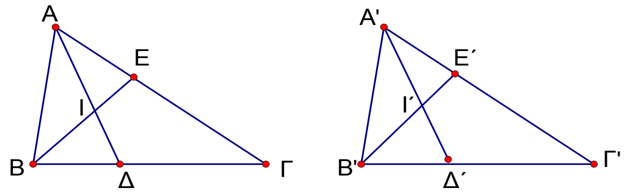
1.

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$. Αν Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ και Ι΄ το σημείο τομής των διχοτόμων Α΄Δ΄ και Β΄Ε΄ του Α΄Β΄Γ΄, να αποδείξτε ότι:

i) ΑΔ = Α΄Δ΄ και ΒΕ = Β΄Ε΄

ii) ΑΙ = Α΄Ι΄ και ΒΙ = Β΄Ι΄

Λύση



i)

(Π–Γ–Π) $\Rightarrow$ τρ. ΑΒΓ = τρ. Α΄Β΄Γ΄ $\Rightarrow$ $\hat{B} = \hat{B}'$

(Γ–Π–Γ) $\Rightarrow$ τρ. ΑΒΔ = τρ. Α΄Β΄Δ΄ $\Rightarrow$ ΑΔ = Α΄Δ΄

(Γ–Π–Γ) $\Rightarrow$ τρ. ΑΒΕ = τρ. Α΄Β΄Ε΄ $\Rightarrow$ ΒΕ = Β΄Ε΄

ii)

(Γ–Π–Γ) $\Rightarrow$ τρ. ΑΒΙ = τρ. Α΄Β΄Ι΄ $\Rightarrow$ ΑΙ = Α΄Ι΄ και ΒΙ = Β΄Ι΄.

2.

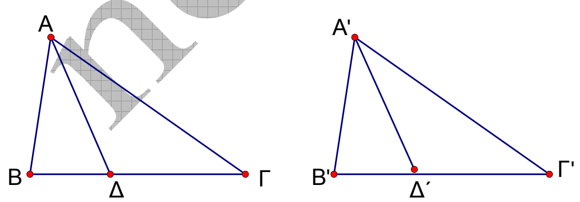
Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\beta = \beta'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$.

Να αποδείξτε ότι:

i) $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$

ii) α = α΄ και γ = γ΄.

Λύση



i)

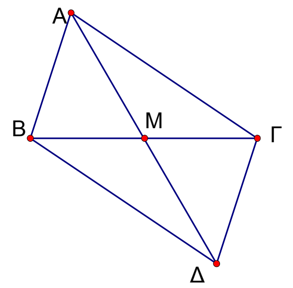
(Π–Γ–Π) $\Rightarrow$ τρ. ΑΔΓ = τρ. Α΄Δ΄Γ΄ $\Rightarrow$ $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$

ii)

(Γ–Π–Γ) $\Rightarrow$ τρ. ΑΒΓ = τρ. Α΄Β΄Γ΄ $\Rightarrow$ α = α΄ και γ = γ΄.

3.
Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά ίσο τμήμα ΜΔ. Να αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ίσα.

Λύση



Φέρνουμε τις ΔΒ, ΔΓ.

(Π–Γ–Π) $\Rightarrow$ τρ ΑΜΒ = τρ. ΔΜΓ $\Rightarrow$ ΑΒ = ΓΔ

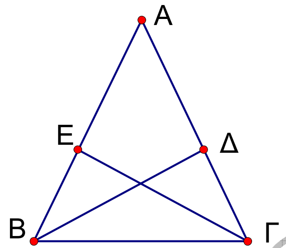
(Π–Γ–Π) $\Rightarrow$ τρ ΑΜΓ = τρ. ΔΜΒ $\Rightarrow$ ΑΓ = ΒΔ

(Π–Π–Π) $\Rightarrow$ τρ ΑΒΓ = τρ. ΔΓΒ

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.
Να αποδείξτε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

Λύση



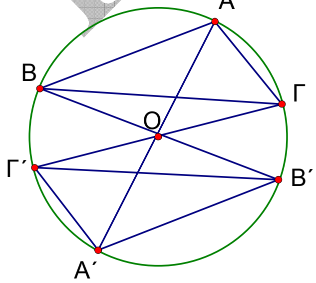
Έστω ΑΒΓ το ισοσκελές τρίγωνο και ΒΔ, ΓΕ οι διχοτόμοι.

Επειδή $\hat{B} = \hat{\Gamma} \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$

(Γ–Π–Γ) $\Rightarrow$ τρ. ΒΓΔ = τρ. ΓΒΕ $\Rightarrow$ ΒΔ = ΓΕ

2.
Αν ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ είναι τρεις διάμετροι κύκλου, να αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

Λύση



(Π–Π–Π) $\Rightarrow$ τρ. ΟΑΒ = τρ. ΟΑ΄Β΄ $\Rightarrow$ ΑΒ = Α΄Β΄

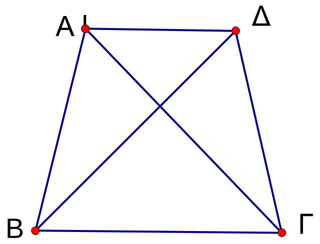
Ομοίως ΒΓ = Β΄Γ΄ και ΓΑ = ΓΆ΄

Άρα τρ. ΑΒΓ = τρ. Α΄Β΄Γ΄

3.

Σε ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ = ΓΔ και $\hat{\text{Β}} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξτε ότι $\hat{\text{Α}} = \hat{\Delta}$.

Λύση



Φέρνουμε τις διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ για να σχηματισθούν τρίγωνα.

(Π–Γ–Π) $\Rightarrow$ τρ. ΑΒΓ = τρ. ΔΒΓ $\Rightarrow$ ΑΓ = ΔΒ

(Π–Π–Π) $\Rightarrow$ τρ. ΒΑΔ = τρ. ΓΑΔ $\Rightarrow$ $\hat{\text{Α}} = \hat{\Delta}$

Σύνθετα θέματα

1.

Θεωρούμε δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄. Η διάμεσος ΑΜ και η διχοτόμος ΒΔ του ΑΒΓ τέμνονται στο Θ, ενώ η αντίστοιχη διάμεσος Α΄Μ΄ και η αντίστοιχη διχοτόμος Β΄Δ΄ του Α΄Β΄Γ΄ τέμνονται στο Θ΄. Να αποδείξετε ότι

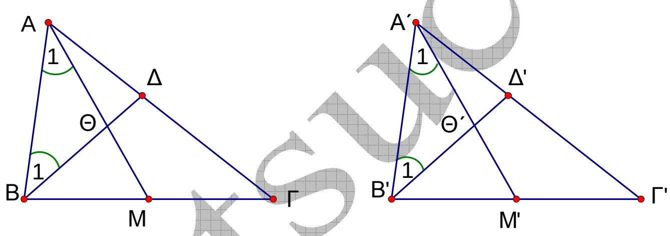
i) ΒΔ = Β΄Δ΄

ii) $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Μ} = \text{Β}'\hat{\text{Α}}'\text{Μ}'$

iii) Τα τρίγωνα ΑΒΘ και Α΄Β΄Θ΄ είναι ίσα

iv) ΑΘ = Α΄Θ΄ και ΘΔ = Θ΄Δ΄.

Λύση



τρ. ΑΒΓ = τρ. Α΄Β΄Γ΄ $\Rightarrow$ $\hat{\text{Α}} = \hat{\text{Α}}'$, $\hat{\text{Β}} = \hat{\text{Β}}'$, ΒΓ = Β΄Γ΄ κ.λ.π ………

$\hat{\text{Β}}_1 = \hat{\text{Β}}'_1$ σαν μισές ίσων

i)

(Γ–Π–Γ) $\Rightarrow$ τρ. ΑΒΔ = τρ. Α΄Β΄Δ΄ $\Rightarrow$ ΒΔ = Β΄Δ΄ και ΑΔ = Α΄Δ΄

ii)

(Π–Γ–Π) $\Rightarrow$ τρ. ΑΒΜ = τρ. Α΄Β΄Μ΄ $\Rightarrow$ $\hat{\text{Α}}_1 = \hat{\text{Α}}'_1$

iii)

(Γ–Π–Γ) $\Rightarrow$ τρ. ΑΒΘ = τρ. Α΄Β΄Θ΄

iv)

Από iii) $\Rightarrow$ ΑΘ = Α΄Θ΄ και ΒΘ = Β΄Θ΄

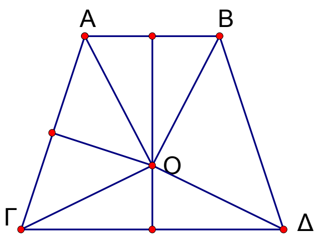
αλλά από (i) έχουμε ΒΔ = Β΄Δ΄

αφαιρούμε κατά μέλη, οπότε ΘΔ = Θ΄Δ΄.

2.

Δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ, που δεν έχουν τον ίδιο φορέα, έχουν την ίδια μεσοκάθετο ε. Αν η ε και η μεσοκάθετος του ΑΓ τέμνονται, να αποδείξετε ότι από το σημείο τομής τους διέρχεται και η μεσοκάθετος του ΒΔ

Λύση



Έστω Ο το σημείο τομής της μεσοκαθέτου ε των ΑΒ, ΓΔ με τη μεσοκάθετο του ΑΓ. Φέρνουμε τα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ και ΟΔ. Τότε

$$\begin{cases} ΟΒ=ΟΑ \\ ΟΑ=ΟΓ \\ ΟΓ=ΟΔ \end{cases} \quad \text{Άρα } ΟΒ = ΟΔ$$

Δηλαδή το Ο ισαπέχει από τα Β, Δ άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΔ, δηλαδή η μεσοκάθετος του ΒΔ διέρχεται από το Ο.

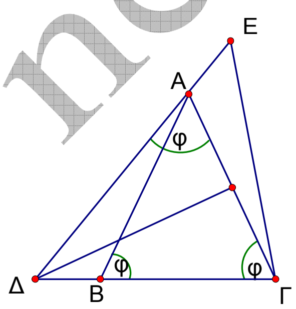
3.

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Δ. Προεκτείνουμε τη ΔΑ κατά τμήμα ΑΕ = ΔΒ. Να αποδείξετε ότι:

i) το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές

ii) το τρίγωνο ΓΔΕ είναι επίσης ισοσκελές.

Λύση



i)
Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΓ $\Rightarrow$ ΔΑ = ΔΓ

Άρα τρ. ΔΑΓ ισοσκελές

ii)
Από τα ισοσκελή ΑΒΓ και ΔΑΓ προκύπτουν οι γωνίες φ του σχήματος.

Για να έχουμε τρ. ΓΔΕ ισοσκελές, δηλαδή ΓΔ = ΓΕ, αρκεί να είναι ΑΔ = ΓΕ.

Προς τούτο, αρκεί τρ. ΑΔΒ = τρ. ΑΕΓ, το οποίο συμβαίνει διότι:

ΑΒ = ΑΓ, ΔΒ = ΑΕ και περιεχόμενες γωνίες ίσες, σαν παραπληρωματικές των φ.