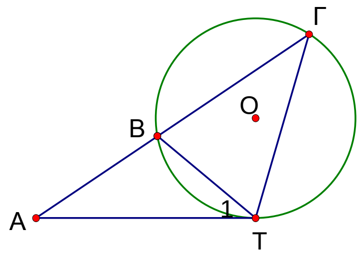
Γενικές ασκήσεις 8ου Κεφαλαίου σελίδας 179

1.

Έστω δοσμένος κύκλος (O,R) και σημείο A στο εξωτερικό του κύκλου. Από το A φέρουμε την εφαπτομένη AT και την τέμνουσα ABΓ.

Να αποδειχθεί ότι $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{TB^2}{T\Gamma^2}$.

Λύση



$\hat{A}$ κοινή και $\hat{T}_1 = \hat{\Gamma}$ $\Rightarrow$

τρ.ABT όμοιο τρ.ATΓ $\Rightarrow$

$$\frac{TB}{T\Gamma} = \frac{TA}{A\Gamma} = \frac{AB}{TA} \quad (1) \quad \Rightarrow$$

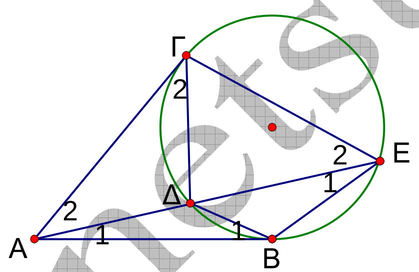
$$\frac{TB^2}{T\Gamma^2} = \frac{TA^2}{A\Gamma^2} \Rightarrow \frac{TB^2}{T\Gamma^2} = \frac{TA}{A\Gamma}\frac{TA}{A\Gamma} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{TB^2}{T\Gamma^2} = \frac{TA}{A\Gamma}\frac{AB}{TA} \Rightarrow \frac{TB^2}{T\Gamma^2} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

2.

Από σημείο A φέρουμε τις εφαπτόμενες AB και AΓ κύκλου (O,R) και τυχαία τέμνουσα AΔE. Να αποδειχθεί ότι BΔ . ΓE = BE . ΓΔ.

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{B\Delta}{BE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E}$

$\hat{A}_1$ κοινή και $\hat{B}_1 = \hat{E}_1$ $\Rightarrow$

τρ.AΔB όμοιο του τρ.ABE $\Rightarrow$

$$\frac{B\Delta}{BE} = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AB}{AE} \quad \textbf{(1)}$$

$\hat{A}_2$ κοινή και $\hat{E}_2 = \hat{\Gamma}_2$ $\Rightarrow$ τρ.AΔΓ όμοιο του τρ.AΓE

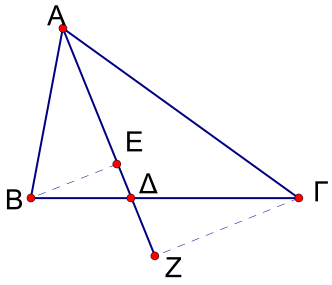
$$\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{AE} \quad \textbf{(2)}$$

Επειδή, όμως AB = AΓ, από τις (1), (2) $\Rightarrow$ $\frac{B\Delta}{BE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E}$

3.

Αν Ε, Ζ είναι οι προβολές των κορυφών Β, Γ ενός τριγώνου ΑΒΓ (με $\beta \neq \gamma$) στη διχοτόμο του ΑΔ, να αποδείξετε ότι τα Ε, Ζ είναι συζυγή αρμονικά των Α, Δ.

Λύση



Θα αποδείξουμε ότι $\dfrac{AE}{AZ} = \dfrac{\Delta E}{\Delta Z}$

τρ.ΑΕΒ όμοιο του τρ.ΑΖΓ $\Rightarrow \dfrac{AE}{AZ} = \dfrac{BE}{\Gamma Z}$

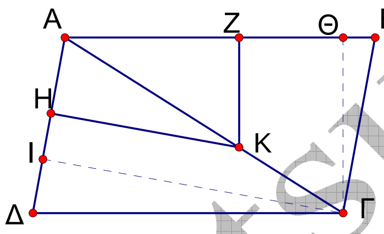
τρ.ΔΕΒ όμοιο του τρ.ΔΖΓ $\Rightarrow \dfrac{\Delta E}{\Delta Z} = \dfrac{BE}{\Gamma Z}$

Άρα $\dfrac{AE}{AZ} = \dfrac{\Delta E}{\Delta Z}$

4.

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ να αποδειχθεί ότι οι αποστάσεις τυχαίου σημείου της διαγωνίου ΑΓ από τις πλευρές ΑΒ και ΑΔ είναι αντιστρόφως ανάλογες προς τις πλευρές αυτές.

Λύση



Θα αποδείξουμε ότι $\dfrac{KZ}{KH} = \dfrac{A\Delta}{AB}$

Φέρουμε $\Gamma\Theta \perp AB$ και $\Gamma I \perp A\Delta$

$KZ \parallel \Gamma\Theta \Rightarrow \dfrac{KZ}{\Gamma\Theta} = \dfrac{AK}{A\Gamma} \Rightarrow KZ = \Gamma\Theta \dfrac{AK}{A\Gamma}$

$KH \parallel \Gamma I \Rightarrow \dfrac{KH}{\Gamma I} = \dfrac{AK}{A\Gamma} \Rightarrow KH = \Gamma I \dfrac{AK}{A\Gamma}$

Διαιρούμε κατά μέλη και έχουμε $\dfrac{KZ}{KH} = \dfrac{\Gamma\Theta}{\Gamma I}$ **(1)**

Τρ.ΓΘΒ όμοιο του τρ.ΓΙΔ $\Rightarrow \dfrac{\Gamma\Theta}{\Gamma I} = \dfrac{\Gamma B}{\Gamma\Delta} = \dfrac{A\Delta}{AB}$ **(2)**

Από τις (1), (2) $\Rightarrow \dfrac{KZ}{KH} = \dfrac{A\Delta}{AB}$

5.

Αν Μ τυχαίο σημείο κύκλου (Ο,R), να αποδείξετε ότι:

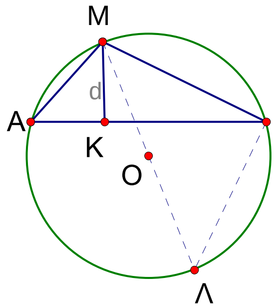
i) η απόσταση d του Μ από χορδή ΑΒ του κύκλου είναι $d = \dfrac{MA.MB}{2R}$,

ii) η απόσταση d΄ του Μ από την εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο Α του κύκλου είναι $d' = \dfrac{MA^2}{2R}$,

iii) αν d, d_1, d_2 οι αποστάσεις του Μ από μία χορδή ΓΔ του κύκλου και από τις εφαπτόμενες στα Γ, Δ αντίστοιχα, τότε $d^2 = d_1.d_2$.

Λύση

i)



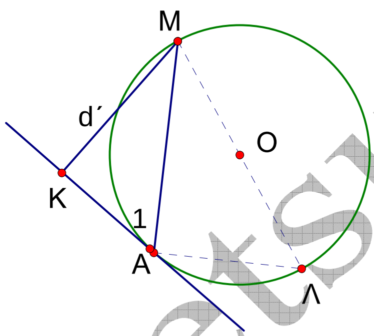
Δημιουργούμε το τμήμα 2R φέροντας τη διάμετρο ΜΛ. Τότε $M\hat{B}\Lambda = 1\llcorner$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{MK}{MA} = \dfrac{MB}{M\Lambda}$,

ή ότι τρ.ΜΚΑ όμοιο του τρ.ΜΒΛ.

Αυτό ισχύει, αφού είναι ορθογώνια και έχουν $\hat{A} = \hat{\Lambda}$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο).

ii)



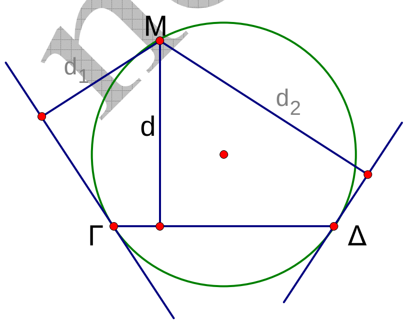
Δημιουργούμε το τμήμα 2R φέροντας τη διάμετρο ΜΛ. Τότε $M\hat{B}\Lambda = 1\llcorner$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{MK}{MA} = \dfrac{MA}{M\Lambda}$,

ή ότι τρ.ΜΚΑ όμοιο του τρ.ΜΑΛ.

Αυτό ισχύει, αφού είναι ορθογώνια και έχουν $\hat{A}_1 = \hat{\Lambda}$ (εγγεγραμμένη – υπό χορδής και εφαπτομένης)

iii)



$$\text{i)} \Rightarrow d = \frac{M\Gamma.M\Delta}{2R} \Rightarrow d^2 = \frac{M\Gamma^2.M\Delta^2}{4R^2} \quad \textbf{(1)}$$

$$\text{ii)} \Rightarrow d_1 = \frac{M\Gamma^2}{2R} \quad \text{και} \quad d_2 = \frac{M\Delta^2}{2R}$$

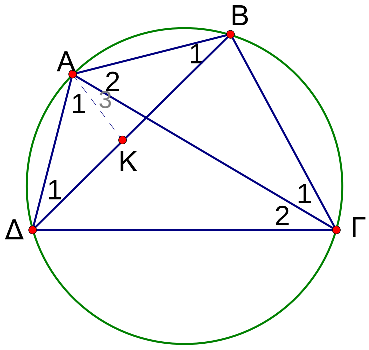
$$\text{Άρα} \quad d_1\, d_2 = \frac{M\Gamma^2.M\Delta^2}{4R^2} \quad \textbf{(2)}$$

(1) και (2) $\Rightarrow$ $d^2 = d_1.d_2$.

6.

Θεώρημα Πτολεμαίου: Σε κάθε εγγράψιμο τετράπλευρο το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών είναι ίσο με το γινόμενο των διαγωνίων.

Λύση



Θεωρούμε σημείο Κ της ΔΒ, ώστε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$.

Επειδή είναι και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1$, θα έχουμε

τρ.ΚΑΔ όμοιο του τρ.ΒΑΓ $\Rightarrow \dfrac{A\Delta}{A\Gamma} = \dfrac{K\Delta}{B\Gamma} \Rightarrow$

$A\Delta \, .B\Gamma = A\Gamma . \, K\Delta$ **(1)**

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = \hat{A}_2 + \hat{A}_3$.

Επειδή είναι και $\hat{\Gamma}_2 = \hat{B}_1$, θα έχουμε

τρ.ΑΔΓ όμοιο του τρ.ΑΚΒ $\Rightarrow \dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{KB}{\Delta\Gamma} \Rightarrow$

$AB \, .\Delta\Gamma = A\Gamma \, . \, KB$ **(2)**

(1) + (2) $\Rightarrow$ $A\Delta \, .B\Gamma + AB \, .\Delta\Gamma = A\Gamma . \, K\Delta + A\Gamma \, . \, KB \Rightarrow$

$A\Delta \, .B\Gamma + AB \, .\Delta\Gamma = A\Gamma \, (\, K\Delta + KB \,) \Rightarrow$

$A\Delta \, .B\Gamma + AB \, .\Delta\Gamma = A\Gamma \, . \, B\Delta$