7.8 – 7.9
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 162 – 163

Ερωτήσεις Κατανόησης

1.
Να εξηγήσετε γιατί τα ίχνη Δ, Ε της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ είναι συζυγή αρμονικά των Β και Γ.

Απάντηση

Διότι $\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΕΒ}{ΕΓ}$

2.
Αν ΑΔ διχοτόμος τριγώνου ΑΒΓ και $ΔΒ = \frac{γ}{2}$, να δικαιολογήσετε γιατί $β + γ = 2α$

Απάντηση

Είναι $ΔΒ = \frac{γ}{2} \Leftrightarrow \frac{αγ}{β+γ} = \frac{γ}{2} \Leftrightarrow 2α = β + γ$

3.
Τι ονομάζεται απολλώνιος κύκλος ως προς δύο σημεία Α και Β ;
Πόσοι τέτοιοι κύκλοι υπάρχουν ;
Με ποιους τρόπους μπορεί να ορισθεί κάποιος από αυτούς ;

Απάντηση

Ονομάζουμε Απολλώνιο κύκλο ως προς δύο σημεία Α και Β τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα σημεία Α και Β είναι σταθερός και ίσος με $\frac{μ}{ν} \neq 1$

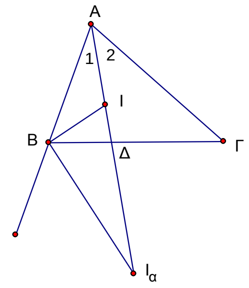
Υπάρχουν άπειροι Απολλώνιοι κύκλοι αφού ο λόγος $\frac{μ}{ν}$ έχει άπειρες τιμές

Για να ορισθεί κάποιος από τους κύκλους αυτούς όταν ξέρουμε τα σημεία Α και Β θα πρέπει : ή να δοθεί ο λόγος $\frac{μ}{ν}$

ή ένα από τα σημεία Γ, Δ τα οποία διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά το τμήμα ΑΒ σε λόγο $\frac{μ}{ν}$

ή ένα από τα σημεία του Απολλώνιου κύκλου .

4.



Στο διπλανό σχήμα η ΑΔ είναι διχοτόμος, το Ι έκκεντρο και το I_α παράκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

Τα σημεία (Α, Δ) και (Ι, I_α) αποτελούν αρμονική τετράδα;

Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας

Απάντηση

Αφού ΒΙ και BI_α διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{B}\Delta$ και $\hat{B}_{\varepsilon\xi}$ του τριγώνου ΑΒΔ τα (Α, Δ) είναι συζυγή αρμονικά των (Ι, I_α).

5.

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων οι αποστάσεις από δύο ορισμένα σημεία Α και Β έχουν λόγο λ = 1 είναι

i) κύκλος διαμέτρου ΑΒ

ii) η μεσοκάθετος του ΑΒ

iii) το μέσο Μ του ΑΒ

iv) τίποτα από τα παραπάνω

επιλέξτε την σωστή απάντηση και δικαιολογήστε την

Απάντηση

Σωστή απάντηση είναι η (ii), διότι αν Μ τυχαίο σημείο του τμήματος ΑΒ τότε

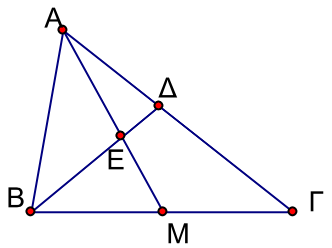
$MA = MB$ και επομένως $\dfrac{MA}{MB} = 1$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Η διάμεσος ΑΜ και η διχοτόμος ΒΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Ε. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{AE}{EM} = 2\dfrac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$.

Λύση



Θ. εσωτερικής διχοτόμου στο τρ. ΒΑΜ $\Rightarrow$

$$\frac{AE}{EM} = \frac{BA}{BM} = \frac{BA}{\frac{B\Gamma}{2}} = 2\frac{BA}{B\Gamma} \quad \textbf{(1)}$$

Θ. εσωτερικής διχοτόμου στο τρ. ΒΑΓ $\Rightarrow$

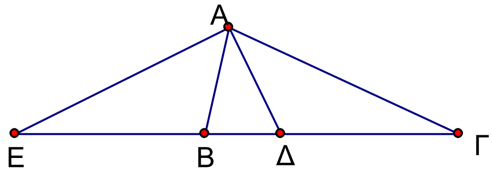
$$\frac{\Delta A}{\Delta\Gamma} = \frac{BA}{B\Gamma}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{AE}{EM} = 2\frac{\Delta A}{\Delta\Gamma}$$

2.

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 6$, $B\Gamma = 10$, $A\Gamma = 9$. Αν $A\Delta$, AE η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, να υπολογισθεί το ΔE.

Λύση



$$\Delta B = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma} = \frac{10.6}{9+6} = \frac{60}{15} = 4$$

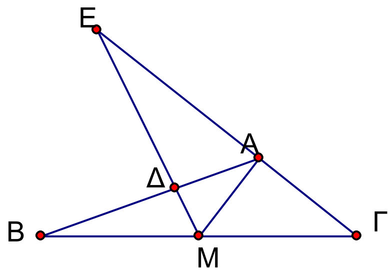
$$EB = \frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma} = \frac{10.6}{9-6} = \frac{60}{3} = 20$$

Άρα $\Delta E = 24$

3.

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} > 90^0$ και η διάμεσός του AM. Αν η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{M}B$ τέμνει την AB στο Δ και την προέκταση της $\Gamma\Delta$ στο E, να αποδείξετε ότι $EA \,.\, \Delta B = E\Gamma \,.\, A\Delta$.

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{EA}{E\Gamma} = \dfrac{A\Delta}{\Delta B}$

Θ. εξωτερικής διχοτόμου στο τρ.$MA\Gamma$ $\Rightarrow$

$$\frac{EA}{E\Gamma} = \frac{MA}{M\Gamma} \quad \textbf{(1)}$$

Θ. εσωτερικής διχοτόμου στο τρ.MAB $\Rightarrow$

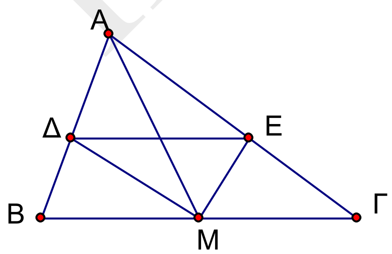
$$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{MA}{MB} \quad \textbf{(2)}$$

Επειδή $MB = M\Gamma$, τα δεύτερα μέλη των (1) και (2) είναι ίσα, άρα και τα πρώτα.

4.

Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ και οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{M}B$ και $A\hat{M}\Gamma$ τέμνουν τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα Δ και E αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$.

Λύση



Θ. εσωτερικής διχοτόμου στο τρ.MAB $\Rightarrow$

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{MA}{MB} \quad \textbf{(1)}$$

Θ. εσωτερικής διχοτόμου στο τρ.$MA\Gamma$ $\Rightarrow$

$$\frac{EA}{E\Gamma} = \frac{MA}{M\Gamma} \quad \textbf{(2)}$$

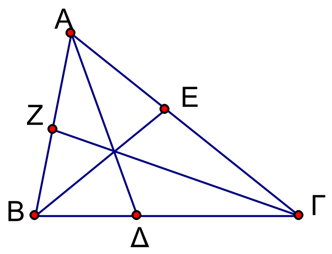
Επειδή $MB = M\Gamma$, τα δεύτερα μέλη των (1) και (2) είναι ίσα, άρα και τα πρώτα.

Έτσι $\dfrac{\Delta A}{\Delta B} = \dfrac{EA}{E\Gamma}$ και από το αντίστροφο του Θ. Θαλή συμπεραίνουμε $\Delta E \parallel B\Gamma$.

5.

Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι $\frac{ΔΒ}{ΔΓ} \cdot \frac{ΕΓ}{ΕΑ} \cdot \frac{ΖΑ}{ΖΒ} = 1$

Λύση



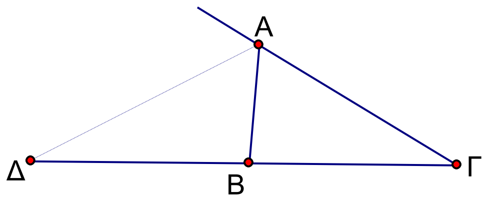
ΑΔ διχοτόμος $\Rightarrow \frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$

ΒΕ διχοτόμος $\Rightarrow \frac{ΕΓ}{ΕΑ} = \frac{ΒΓ}{ΒΑ}$

ΓΖ διχοτόμος $\Rightarrow \frac{ΖΑ}{ΖΒ} = \frac{ΓΑ}{ΓΒ}$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε $\frac{ΔΒ}{ΔΓ} \cdot \frac{ΕΓ}{ΕΑ} \cdot \frac{ΖΑ}{ΖΒ} = 1.$

Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι $\frac{ΔΒ}{ΔΓ} \cdot \frac{ΕΓ}{ΕΑ} \cdot \frac{ΖΑ}{ΖΒ} = 1$



ΑΔ εξ. διχοτόμος $\Rightarrow \frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$

ΒΕ εξ. διχοτόμος $\Rightarrow \frac{ΕΓ}{ΕΑ} = \frac{ΒΓ}{ΒΑ}$

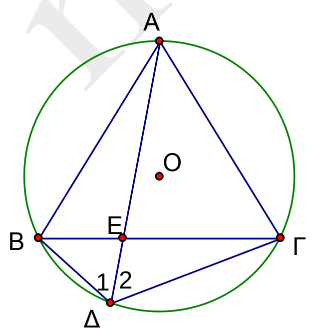
ΓΖ εξ. διχοτόμος $\Rightarrow \frac{ΖΑ}{ΖΒ} = \frac{ΓΑ}{ΓΒ}$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε $\frac{ΔΒ}{ΔΓ} \cdot \frac{ΕΓ}{ΕΑ} \cdot \frac{ΖΑ}{ΖΒ} = 1.$

6.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Αν Δ τυχαίο σημείο του τόξου $\overset{\frown}{ΒΓ}$ και η ΑΔ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι ΕΒ . ΔΓ = ΕΓ . ΔΒ

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{ΕΒ}{ΕΓ} = \frac{ΔΒ}{ΔΓ}$.

$ΑΒ = ΑΓ \Rightarrow \overset{\frown}{ΑΒ} = \overset{\frown}{ΑΓ} \Rightarrow \hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2 \Rightarrow$

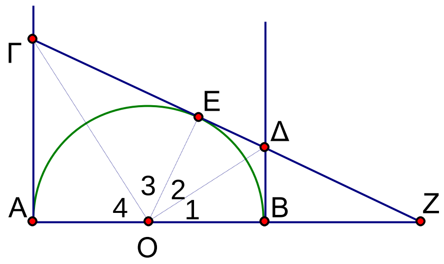
ΔΕ εσ. διχοτόμος του τρ. ΔΒΓ $\Rightarrow$

$\frac{ΕΒ}{ΕΓ} = \frac{ΔΒ}{ΔΓ}$.

7.

Σε ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ φέρουμε τις εφαπτόμενες στα άκρα της διαμέτρου, καθώς και μία εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο του Ε, που τέμνει την ευθεία ΑΒ στο Ζ και τις άλλες δύο εφαπτόμενες στα Γ και Δ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Ε, Ζ.

Λύση



Έστω Ο το κέντρο του κύκλου.
Φέρουμε τις ΟΓ, ΟΕ, ΟΔ.

ΟΔ διακεντρική $\Rightarrow$ $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ $\Rightarrow$
ΟΔ εσ. διχοτόμος του τρ. ΟΕΖ. **(1)**

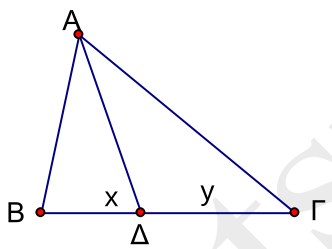
ΟΕ διακεντρική $\Rightarrow$ $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$ $\Rightarrow$
ΟΕ εξ. διχοτόμος του τρ. ΟΕΖ. **(2)**

Από τις (1) και (2) $\Rightarrow$ Δ, Γ συζυγή αρμονικά των Ε, Ζ, άρα και
Ε, Ζ συζυγή αρμονικά των Γ, Δ.

8.

Δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι 20m και 36m. Η διχοτόμος της γωνίας, η οποία περιέχεται μεταξύ των δύο αυτών πλευρών, διαιρεί την τρίτη πλευρά σε δύο μέρη, τα οποία διαφέρουν κατά 12m. Να υπολογισθεί η τρίτη πλευρά.

Λύση



Έστω ΑΒ = 20, ΑΓ = 36, ΑΔ διχοτόμος,
ΔΒ = x και ΔΓ = y.

Θ. εσ. διχοτόμου $\Rightarrow \dfrac{ΔΒ}{ΔΓ} = \dfrac{ΑΒ}{ΑΓ} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{20}{36} = \dfrac{5}{9} \Rightarrow$

$9x = 5y$ **(1)**

Από υπόθεση έχουμε $y - x = 12$ **(2)**

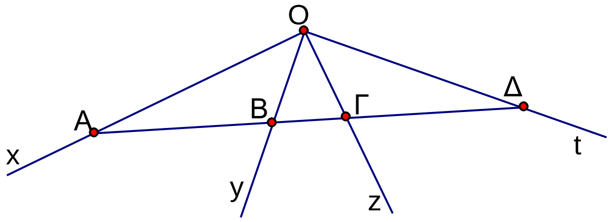
Λύνουμε το σύστημα των (1), (2) και βρίσκουμε x = 15m, y = 27m.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες $x\hat{O}y = y\hat{O}z = z\hat{O}t = 45^0$ και τα σημεία Α, Δ των Οx, Οt αντίστοιχα, τέτοια ώστε $OA = O\Delta$. Αν Β, Γ είναι τα σημεία τομής της ΑΔ με τις Οy, Οz αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $AB^2 = B\Gamma \cdot A\Delta$.

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{A\Delta}{AB}$ **(α)**

ΟΒ εσ. διχοτόμος του τρ. ΟΑΓ $\Rightarrow$ $\dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{OA}{O\Gamma}$ **(1)**

$O\Delta \perp$ στην εσ. διχοτόμο ΟΒ $\Rightarrow$ ΟΔ εξ. διχοτόμος του τρ. ΟΑΓ $\Rightarrow$

$$\frac{\Delta A}{\Delta\Gamma} = \frac{OA}{O\Gamma} \quad \textbf{(2)}$$

Από τις (1) και (2) $\Rightarrow$ $\dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{\Delta A}{\Delta\Gamma}$ **(3)**

Συγκρίνοντας την αποδειγμένη ισότητα (3) με την αποδεικτέα (α), αρκεί να αποδείξουμε ότι $AB = \Delta\Gamma$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΒΑ, ΟΓΔ.

$OA = O\Delta$ $\Rightarrow$ τρ. ΟΑΔ ισοσκελές $\Rightarrow$ $\hat{A} = \hat{\Delta}$

$OA = O\Delta$

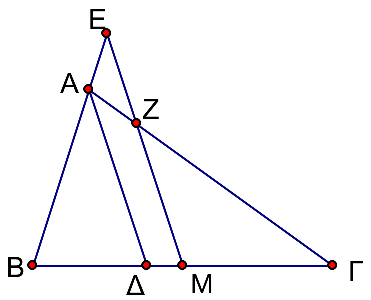
$A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta = 45^0$

Άρα τρ.ΟΒΑ = τρ. ΟΓΔ, άρα $AB = \Delta\Gamma$

2.

Από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ φέρουμε την παράλληλη στη διχοτόμο του $A\Delta$, που τέμνει τις AB, $A\Gamma$ στα E, Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $BE = \Gamma Z$.

Λύση



$$A\Delta \parallel EM \Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{BM}{B\Delta} \Rightarrow BE = BA\,\frac{BM}{B\Delta}$$

$$ZM \parallel A\Delta \Rightarrow \frac{\Gamma Z}{\Gamma A} = \frac{\Gamma M}{\Gamma\Delta} \Rightarrow \Gamma Z = \Gamma A\,\frac{\Gamma M}{\Gamma\Delta}$$

Οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι

$BA\,\frac{BM}{B\Delta} = \Gamma A\,\frac{\Gamma M}{\Gamma\Delta}$, και αφού $BM = \Gamma M$

αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{BA}{B\Delta} = \frac{\Gamma A}{\Gamma\Delta}$,

το οποίο ισχύει από το θεώρημα εσ. διχοτόμου, αλλάζοντας μέσους όρους.

3.

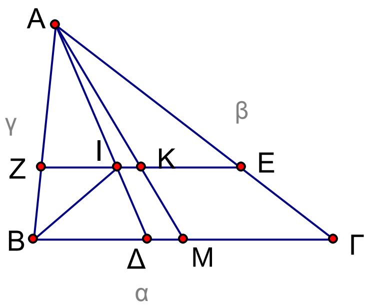
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΑΔ και το έκκεντρό του Ι.

i) Να υπολογισθεί ο λόγος $\frac{ΑΙ}{ΙΔ}$, ως συνάρτηση των πλευρών α, β, γ του τριγώνου.

ii) Αν $β+γ=2α$ και Κ το βαρύκεντρο του τριγώνου, τότε

α) ΙΚΡΒΓ   β) $ΖΕ=\frac{β+γ}{3}$, όπου Ζ, Ε τα σημεία τομής των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα με την ευθεία ΙΚ.

Λύση



i) ΒΙ διχοτόμος του τρ. ΒΑΔ $\Rightarrow \frac{ΑΙ}{ΙΔ}=\frac{ΒΑ}{ΒΔ}$

αλλά $ΒΔ=\frac{αγ}{β+γ}$, άρα

$$\frac{ΑΙ}{ΙΔ}=\frac{γ}{\frac{αγ}{β+γ}}=\frac{β+γ}{α} \quad \textbf{(1)}$$

ii) α)

Η (1) $\Rightarrow \frac{ΑΙ}{ΙΔ}=\frac{2α}{α}=2$ **(2)**

Κ βαρύκεντρο $\Rightarrow \frac{ΑΚ}{ΚΜ}=2$ **(3)**

Από τις (2), (3) $\Rightarrow \frac{ΑΙ}{ΙΔ}=\frac{ΑΚ}{ΚΜ} \Rightarrow$ ΙΚΡΔΜ (αντίστροφο του Θ.Θαλή)

ii) β)

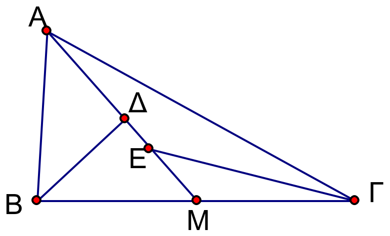
ΖΕΡΒΓ $\Rightarrow$ τα τρίγωνα ΑΖΕ, ΑΒΓ έχουν πλευρές ανάλογες

$$\frac{ΖΕ}{ΒΓ}=\frac{ΑΖ}{ΑΒ}=\frac{ΑΚ}{ΑΜ}=\frac{2}{3} \Rightarrow ΖΕ=\frac{2α}{3}=\frac{β+γ}{3}$$

4.

Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ ενός τριγώνου ΑΒΓ, τέμνουν τη διάμεσό του ΑΜ στα Δ και Ε αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\frac{A\Delta}{\Delta M} + \frac{AE}{EM} > 2$.

Λύση



ΒΔ διχοτόμος του τρ. ΒΑΜ $\Rightarrow \frac{A\Delta}{\Delta M} = \frac{BA}{BM}$

ΓΕ διχοτόμος του τρ. ΓΑΜ $\Rightarrow \frac{AE}{EM} = \frac{\Gamma A}{\Gamma M}$

Άρα $\frac{A\Delta}{\Delta M} + \frac{AE}{EM} = \frac{BA}{BM} + \frac{\Gamma A}{\Gamma M} = \frac{BA}{\frac{B\Gamma}{2}} + \frac{\Gamma A}{\frac{B\Gamma}{2}} =$

$= \frac{BA+\Gamma A}{\frac{B\Gamma}{2}} = 2\,\frac{BA+\Gamma A}{B\Gamma} > 2\,\frac{B\Gamma}{B\Gamma} = 2$ (είναι $\alpha < \beta + \gamma$)

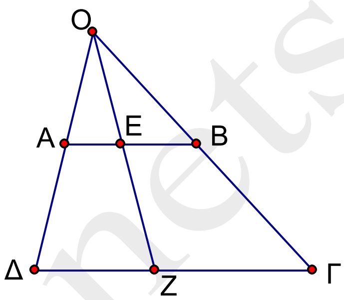
5.

Οι μη παράλληλες πλευρές τραπεζίου ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) τέμνονται στο Ο. Αν η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{O}B$ τέμνει τις ΑΒ, ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

i) $Z\Delta \cdot B\Gamma = Z\Gamma \cdot A\Delta$

ii) $EA \cdot B\Gamma = EB \cdot A\Delta$

Λύση



i) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{Z\Delta}{Z\Gamma} = \frac{A\Delta}{B\Gamma}$

ΟΖ διχοτόμος του τρ.ΟΔΓ $\Rightarrow \frac{Z\Delta}{Z\Gamma} = \frac{O\Delta}{O\Gamma}$

Θ.Θαλή $\Rightarrow \frac{A\Delta}{B\Gamma} = \frac{O\Delta}{O\Gamma}$

Άρα έχουμε το ζητούμενο.

ii) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{EA}{EB} = \frac{A\Delta}{B\Gamma}$

ΟΕ διχοτόμος του τρ.ΟΑΒ $\Rightarrow \frac{EA}{EB} = \frac{OA}{OB}$

Θ. Θαλή $\Rightarrow \frac{A\Delta}{B\Gamma} = \frac{OA}{OB}$

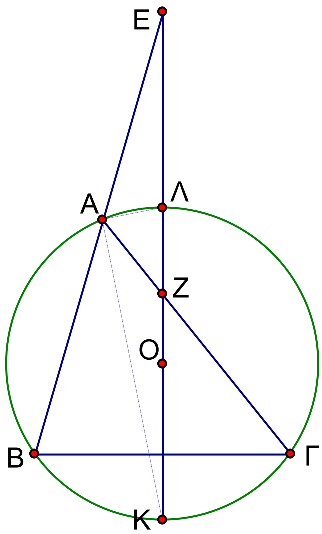
Άρα έχουμε το ζητούμενο.

Σύνθετα Θέματα

1.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Αν η κάθετη διάμετρος ΚΛ στη ΒΓ τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Ε, Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα Ε, Ζ είναι συζυγή αρμονικά των Κ, Λ.

Λύση



Αρκεί να εντοπίσουμε ένα τρίγωνο με εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο

Φέρουμε τις ΑΚ, ΑΛ.

$OK \perp B\Gamma \Rightarrow$ Κ μέσο του $\overset{\frown}{B\Gamma} \Rightarrow$

ΑΚ εξωτερική διχοτόμος του τρ.ΑΕΖ **(1)**

$K\hat{A}\Lambda$ βαίνει σε ημικύκλιο άρα είναι ορθή $\Rightarrow$

$A\Lambda \perp AK \Rightarrow$

ΑΛ εσωτερική διχοτόμος του τρ.ΑΕΖ **(2)**

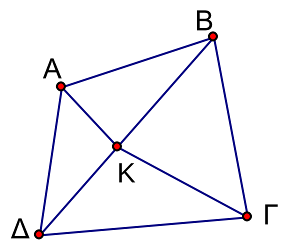
Από τις (1) και (2) $\Rightarrow$

τα Λ, Κ είναι συζυγή αρμονικά των Ε, Ζ.

2.

Αν οι διχοτόμοι δύο απέναντι γωνιών τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται πάνω στη διαγώνιο που ενώνει τις δύο άλλες κορυφές του, τότε είναι ΑΒ . ΓΔ = ΑΔ . ΒΓ. Να εξετασθεί αν ισχύει η αντίστροφη πρόταση.

Λύση



Έστω ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται σε σημείο Κ της διαγωνίου ΒΔ

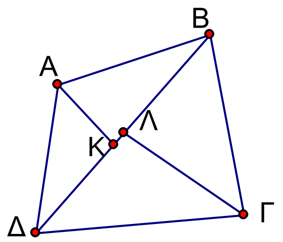
Θ. διχοτόμων στο τρ. ΑΔΒ $\Rightarrow \dfrac{K\Delta}{KB} = \dfrac{A\Delta}{AB}$

Θ. διχοτόμων στο τρ. ΓΔΒ $\Rightarrow \dfrac{K\Delta}{KB} = \dfrac{\Gamma\Delta}{\Gamma B}$

Άρα $\dfrac{A\Delta}{AB} = \dfrac{\Gamma\Delta}{\Gamma B} \Rightarrow AB \cdot \Gamma\Delta = A\Delta \cdot B\Gamma$.

Αντίστροφο: Αν ΑΒ . ΓΔ = ΑΔ . ΒΓ τότε οι διχοτόμοι δύο απέναντι γωνιών τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται πάνω στη διαγώνιο που ενώνει τις δύο άλλες κορυφές του.

Λύση



Η υπόθεση $AB \cdot \Gamma\Delta = A\Delta \cdot B\Gamma \Rightarrow \dfrac{A\Delta}{AB} = \dfrac{\Gamma\Delta}{\Gamma B}$ **(1)**

Έστω ΑΚ, ΓΛ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$

Θ. διχοτόμων στο τρ. ΑΔΒ $\Rightarrow \dfrac{K\Delta}{KB} = \dfrac{A\Delta}{AB}$ **(2)**

Θ. διχοτόμων στο τρ. ΓΔΒ $\Rightarrow \dfrac{\Lambda\Delta}{\Lambda B} = \dfrac{\Gamma\Delta}{\Gamma B}$ **(3)**

Λόγω της (1) τα δεύτερα μέλη των (2), (3) είναι ίσα, άρα και τα πρώτα.

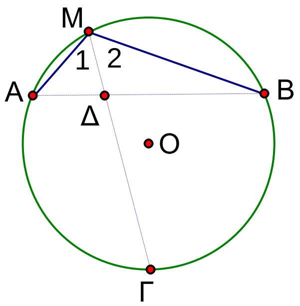
Οπότε $\dfrac{K\Delta}{KB} = \dfrac{\Lambda\Delta}{\Lambda B}$, δηλαδή τα Κ, Λ χωρίζουν το τμήμα ΔΒ σε ίσους λόγους, άρα συμπίπτουν.

3.

Δίνεται τόξο $\overset{\frown}{AB}$ κύκλου (O,R). Να ορίσετε σημείο Μ του τόξου $\overset{\frown}{AB}$, τέτοιο ώστε $\frac{MA}{MB}=\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν δοσμένα τμήματα.

Λύση

Ανάλυση



Έστω Μ το ζητούμενο σημείο. Τότε $\frac{MA}{MB}=\frac{\mu}{\nu}$ **(1)**

Θεωρούμε το μέσο Γ του μη κυρτογωνίου τόξου $\overset{\frown}{AB}$.

Φέρουμε την ΑΓ, η οποία τέμνει τη χορδή ΑΒ σε σημείο Δ.

$\overset{\frown}{A\Gamma}=\overset{\frown}{\Gamma B} \Rightarrow \hat{M}_1=\hat{M}_2 \Rightarrow$

ΜΔ διχοτόμος του τρ.ΜΑΒ $\Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{MA}{MB}\overset{(1)}{=}\frac{\mu}{\nu}$

Το σημείο, λοιπόν, Δ είναι κατασκευάσιμο, αφού χωρίζει το γνωστό ευθ. τμήμα ΑΒ εσωτερικά σε γνωστό λόγο $\frac{\mu}{\nu}$.

Σύνθεση

Γράφουμε τον κύκλο (O,R), το δοσμένο τόξο του $\overset{\frown}{AB}$, το μέσο Γ του μη κυρτογωνίου τόξου $\overset{\frown}{AB}$ και τη χορδή ΑΒ.

Κατασκευάζουμε σημείο Δ, τέτοιο ώστε $\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{\mu}{\nu}$.

Φέρουμε την ευθεία ΓΔ, η οποία τέμνει το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ σε σημείο Μ.
Υποστηρίζουμε ότι το Μ είναι το ζητούμενο σημείο.

Απόδειξη

$\overset{\frown}{A\Gamma}=\overset{\frown}{\Gamma B} \Rightarrow \hat{M}_1=\hat{M}_2 \Rightarrow$ ΜΔ διχοτόμος του τρ.ΜΑΒ $\Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{MA}{MB}$

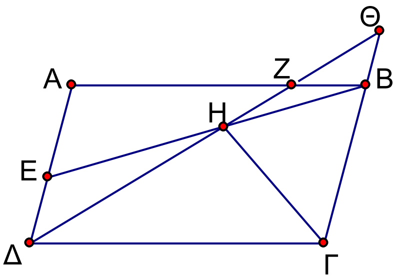
αλλά από τη σύνθεση έχουμε $\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{\mu}{\nu}$

Άρα $\frac{MA}{MB}=\frac{\mu}{\nu}$.

4.

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ των πλευρών του ΑΔ, ΑΒ αντίστοιχα, ώστε ΔΕ = ΒΖ. Αν Η είναι το σημείο τομής των ΒΕ και ΔΖ, να αποδείξετε ότι η ΓΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Gamma}\Delta$.

Λύση



Προεκτείνουμε τη ΔΖ μέχρι να τμήσει τη ΓΒ σε σημείο Θ.
Από το αντίστροφο του Θ.εξ. διχοτόμου στο τρ.ΓΘΔ, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{H\Theta}{H\Delta} = \frac{\Gamma\Theta}{\Gamma\Delta}$$

ΘΒ Ρ ΕΔ $\Rightarrow$ τα τρίγωνα ΘΒΗ, ΔΕΗ έχουν πλευρές ανάλογες

$$\frac{H\Theta}{H\Delta} = \frac{\Theta B}{E\Delta} \qquad \textbf{(1)}$$

ΖΒ Ρ ΔΓ $\Rightarrow$ τα τρίγωνα ΘΒΖ, ΘΓΔ έχουν πλευρές ανάλογες

$$\frac{\Gamma\Theta}{\Gamma\Delta} = \frac{\Theta B}{BZ} = \frac{\Theta B}{E\Delta} \qquad \textbf{(2)}$$

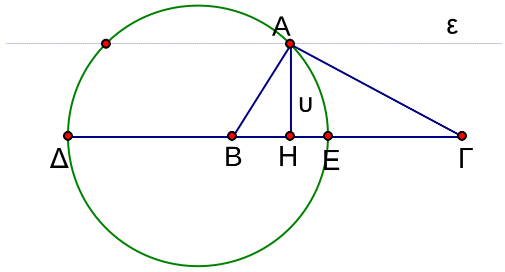
Από τις (1), (2) $\Rightarrow$ $\dfrac{H\Theta}{H\Delta} = \dfrac{\Gamma\Theta}{\Gamma\Delta}$

5.

Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ = α, ύψος ΑΗ = υ και $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν δοσμένα τμήματα.

Λύση

Ανάλυση

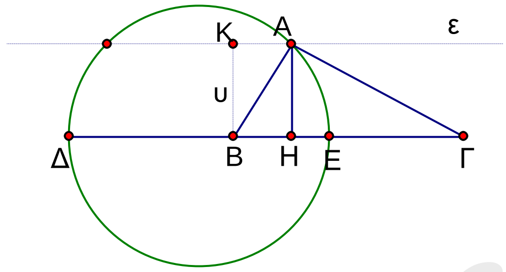


Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο.

$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\mu}{\nu} \Rightarrow$ το Α θα ανήκει σε γνωστό Απολλώνιο Κύκλο.

Ύψος ΑΗ = υ $\Rightarrow$ το Α θα ανήκει σε ευθεία ε∥ΒΓ σε απόσταση υ από αυτή.

Σύνθεση



Γράφουμε τμήμα ΒΓ = α.
Κατασκευάζουμε τα σημεία Δ, Ε που διαιρούν το ΒΓ εξωτερικά και εσωτερικά σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$.
Γράφουμε τον Απολλώνιο Κύκλο με διάμετρο ΒΓ και ευθεία ε∥ΒΓ σε απόσταση ΒΚ = υ από αυτή, που τέμνει τον κύκλο σε σημείο Α.

Απόδειξη

Το τρίγωνο ΑΒΓ, όπως κατασκευάστηκε, είναι το ζητούμενο διότι έχει:
ΒΓ = α
ύψος ΑΗ = ΚΒ = υ
και $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$ αφού το Α ανήκει στον κύκλο διαμέτρου ΔΕ

Διερεύνηση

Για να έχει λύση το πρόβλημα, πρέπει και αρκεί η ευθεία ε να έχει κοινό σημείο με τον κύκλο $\Leftrightarrow$ $\upsilon \le \frac{\Delta E}{2}$