Γενικές ασκήσεις $6^{ου}$ Κεφαλαίου σελίδας 140

1.

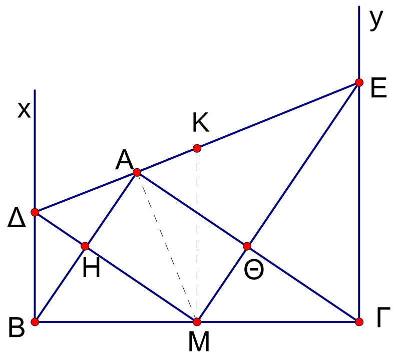
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α. Από τα άκρα Β, Γ της υποτείνουσας ΒΓ φέρουμε κάθετες Βx και Γy στη ΒΓ και προς το ίδιο μέρος της ΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε κάθετη στην ΑΓ, που τέμνει τη Γy στο Ε και κάθετη στην ΑΒ, που τέμνει τη Βx στο Δ. Να αποδειχθεί ότι:

i) τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά

ii) τα τετράπλευρα ΑΔΒΜ και ΑΜΓΕ είναι εγγράψιμα σε κύκλο

iii) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΔΜΕ εφάπτεται στη ΒΓ.

Λύση



i).
Φέρουμε τα τμήματα ΑΔ, ΑΕ
Έστω Η η τομή των ΜΔ, ΑΒ και
Θ η τομή των ΜΕ, ΑΓ

Είναι $Μ\Delta \parallel ΑΓ$ σαν κάθετες στην ΑΒ και επειδή Μ μέσο της ΒΓ $\Rightarrow$
Η μέσο της ΑΒ.
Άρα το Α είναι συμμετρικό του Β ως προς άξονα ΜΔ.
Άρα $\Delta\hat{A}M = \Delta\hat{B}M = 90^o$.
Ομοίως $E\hat{A}M = E\hat{\Gamma}M = 90^o$.
Άρα ΔΑΕ ευθεία.

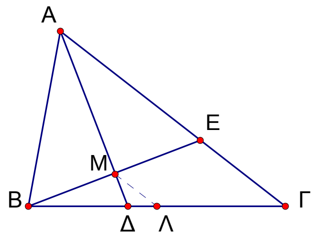
ii).
ΑΔΒΜ εγγράψιμο διότι οι απέναντι γωνίες του $\hat{B}$, $\hat{A}$ είναι ορθές.
Ομοίως για το ΑΜΓΕ.

iii).
Το τετράπλευρο ΑΗΜΘ έχει $\hat{A} = \hat{H} = \hat{\Theta} = 90^0$ άρα και $\hat{M} = 90^0$.
Έτσι το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ορθογώνιο στο Μ, οπότε το κέντρο του περιγεγραμμένου του κύκλου είναι το μέσο Κ της υποτείνουσάς του ΔΕ.
Αρκεί, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι $KM \perp B\Gamma$, το οποίο ισχύει, αφού η ΚΜ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΔΒΓΕ.

2.

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει σταθερή την πλευρά ΒΓ και η κορυφή Α μεταβάλλεται έτσι, ώστε η διαφορά των ΑΒ και ΑΓ να είναι σταθερή. Αν Μ είναι η προβολή της κορυφής Β πάνω στη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ.

Λύση



Ευθύ.

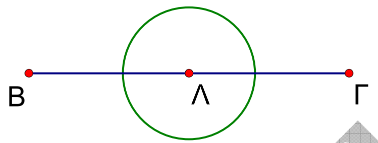
Έστω Μ τυχαίο σημείο του γ.τόπου.
Τότε η διαφορά ΑΓ – ΑΒ είναι σταθερή, έστω ρ.
Προεκτείνουμε τη ΒΜ μέχρι να τμήσει την ΑΓ σε σημείο Ε.
ΑΜ διχοτόμος και ύψος του τριγώνου ΑΒΕ, άρα και διάμεσος και το τρίγωνο ισοσκελές με ΑΕ = ΑΒ.
Είναι ΕΓ = ΑΓ – ΑΕ = ΑΓ – ΑΒ = ρ
Θεωρούμε το μέσο Λ της ΒΓ.

Λ, Μ μέσα πλευρών του τριγώνου ΒΕΓ $\Rightarrow$ $ΛΜ = \dfrac{ΓΕ}{2} = \dfrac{\rho}{2}$.

Βλέπομε, λοιπόν, ότι το Μ απέχει από το σταθερό σημείο Λ σταθερή απόσταση $\dfrac{\rho}{2}$,

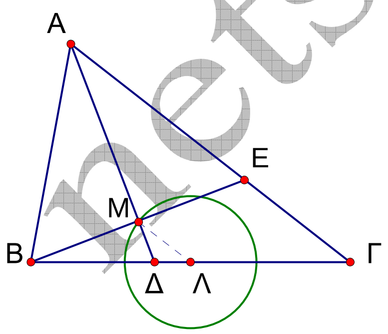
άρα ανήκει στον κύκλο $(Λ, \dfrac{\rho}{2})$.

Κατασκευή του γ. τόπου.



Σχεδιάζουμε το σταθερό τμήμα ΒΓ, το μέσο του Λ και τον κύκλο $(Λ, \dfrac{\rho}{2})$.

Αντίστροφο.



Έστω Μ τυχαίο σημείο του κύκλου $(Λ, \dfrac{\rho}{2})$.
Φέρουμε τη ΒΜ και την προεκτείνουμε κατά ΜΕ = ΒΜ .
Φέρουμε τη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΕ, που τέμνει την προέκταση του ΓΕ σε σημείο Α και τη ΒΓ σε σημείο Δ.
Τέλος φέρουμε τις ΑΒ και ΛΜ.
Θα αποδείξουμε ότι ΑΓ – ΑΒ = ρ και ότι το Μ είναι προβολή του Β στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$.

ΑΜΔ μεσοκάθετος του ΒΕ $\Rightarrow$ ΑΕ = ΑΒ και διχοτόμος της $\hat{A}$.

Λ, Μ μέσα πλευρών του τρ.ΒΓΕ $\Rightarrow$ $ΛΜ = \dfrac{ΓΕ}{2} \Rightarrow \dfrac{\rho}{2} = \dfrac{ΓΕ}{2} \Rightarrow \rho = ΓΕ \Rightarrow$

$\rho = ΑΓ - ΑΕ \Rightarrow \rho = ΑΓ - ΑΒ$.

Διερεύνηση.

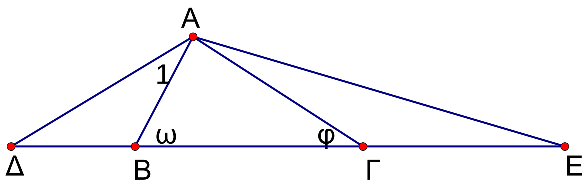
Τα σημεία τομής του κύκλου με τη ΒΓ δεν είναι σημεία του γ.τόπου, διότι δεν ορίζεται τρίγωνο ΑΒΓ.

3.

Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ από τις γωνίες $\hat{B} = \omega$, $\hat{\Gamma} = \varphi$ και την περίμετρό του δ.

Λύση

Ανάλυση. Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο με $\hat{B} = \omega$, $\hat{\Gamma} = \varphi$ και περίμετρο $AB + B\Gamma + \Gamma A = \delta$.



Προεκτείνουμε τη ΒΓ κατά $B\Delta = BA$ και $\Gamma E = \Gamma A$.

Τότε $\Delta E = \delta$ και $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}$.

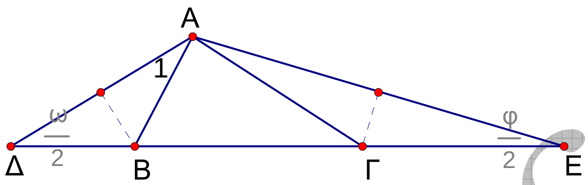
Αλλά $\omega = \hat{\Delta} + \hat{A}_1$ (εξωτερική)

άρα $\omega = 2\hat{\Delta} \Rightarrow \hat{\Delta} = \dfrac{\omega}{2}$.

Ομοίως $\hat{E} = \dfrac{\varphi}{2}$

Σύνθεση.

Κατασκευάζουμε τρίγωνο ΑΔΕ με $\Delta E = \delta$, $\hat{\Delta} = \dfrac{\omega}{2}$ και $\hat{E} = \dfrac{\varphi}{2}$.



Οι μεσοκάθετοι των ΑΔ, ΑΕ τέμνουν τη ΔΕ σε σημεία Β, Γ. Υποστηρίζουμε ότι το ΑΒΓ τρίγωνο είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη.

Επειδή το Β ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΔ, θα έχουμε $B\Delta = BA$

άρα και $\hat{A}_1 = \hat{\Delta} = \dfrac{\omega}{2}$.

Αλλά $\hat{B} = \hat{\Delta} + \hat{A}_1$, άρα $\hat{B} = \omega$.

Ομοίως $\hat{\Gamma} = \varphi$.

Διερεύνηση.

Για να είναι κατασκευάσιμο το τρίγωνο ΑΔΕ, πρέπει και αρκεί $\dfrac{\omega}{2} + \dfrac{\varphi}{2} < 180^\circ \Leftrightarrow$

$\omega + \varphi < 360^\circ$ **(1)**

Για να είναι κατασκευάσιμο το τρίγωνο ΑΒΓ, πρέπει και αρκεί $\omega + \varphi < 180^\circ$ **(2)**

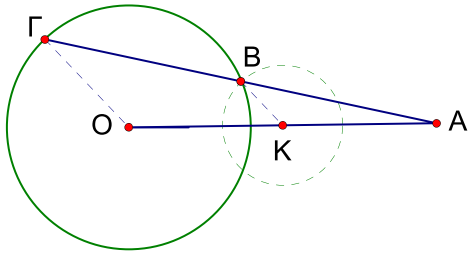
Οι (1) και (2) συναληθεύουν όταν $\omega + \varphi < 180^\circ$.

4.

Δίνεται κύκλος (O, R) και σημείο A εκτός αυτού. Από το A να φέρετε ευθεία, που τέμνει τον κύκλο στα B, Γ, ώστε το B να είναι μέσο του AΓ.

Λύση

Ανάλυση.



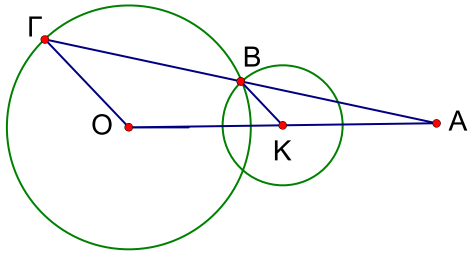
Έστω ότι κατασκευάστηκε η ζητούμενη ευθεία ABΓ με AB = BΓ.

Θεωρούμε το μέσο K του OA.

Τότε $KB = \frac{O\Gamma}{2} = \frac{R}{2}$.

Άρα το B θα ανήκει στον κύκλο $(K, \frac{R}{2})$

Σύνθεση.



Γράφουμε το δοσμένο κύκλο (O, R), το σημείο A, το μέσο K του τμήματος OA και κύκλο $(K, \frac{R}{2})$, ο οποίος τέμνει τον (O, R) έστω σε σημείο B.
Γράφουμε το τμήμα AB και το προεκτείνουμε κατά BΓ = AB.
Υποστηρίζουμε ότι η ευθεία ABΓ είναι η ζητούμενη.

Απόδειξη.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι το σημείο Γ ανήκει στον κύκλο (O, R).
Γράφουμε τα τμήματα KB, OΓ.

Επειδή τα K, B είναι μέσα πλευρών του τριγώνου AOΓ, θα είναι $KB = \frac{O\Gamma}{2} \Rightarrow$

$\frac{R}{2} = \frac{O\Gamma}{2} \Rightarrow O\Gamma = R \Rightarrow$ το Γ ανήκει στον κύκλο (O, R).

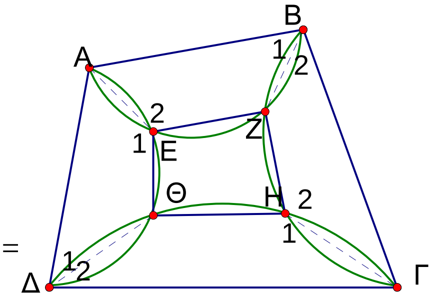
Διερεύνηση.

Για να έχει λύση το πρόβλημα θα πρέπει ο κύκλος $(K, \frac{R}{2})$ να τέμνει τον (O, R).

5.

Δίνεται εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Με χορδές τις πλευρές του γράφουμε μέσα σε αυτό τόξα, που τέμνονται ανά δύο στα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ. Να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι εγγράψιμο. (Οι έξι κύκλοι του Miquel)

Λύση



Φέρουμε τις κοινές χορδές ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ.

$\hat{E} = 360^o - \hat{E}_1 - \hat{E}_2$ **(1)**

ΑΕΘΔ εγγεγραμμένο $\Rightarrow$ $\hat{E}_1 = 180^o - \hat{\Delta}_1$.

ΑΕΖΒ εγγεγραμμένο $\Rightarrow$ $\hat{E}_2 = 180^o - \hat{B}_1$

(1) $\Rightarrow$ $\hat{E} = 360^o - (180^o - \hat{\Delta}_1) - (180^o - \hat{B}_1)$

$= 360^o - 180^o + \hat{\Delta}_1 - 180^o + \hat{B}_1 \Rightarrow$

$\hat{E} = \hat{\Delta}_1 + \hat{B}_1$ **(2)**

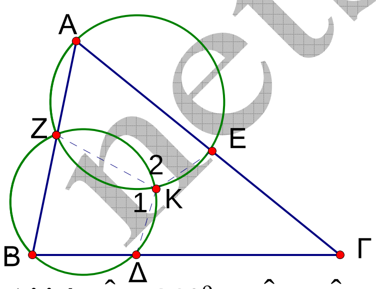
Ομοίως $\hat{H} = \hat{\Delta}_2 + \hat{B}_2$ **(3)**

(2) + (3) $\Rightarrow$ $\hat{E} + \hat{H} = \hat{\Delta} + \hat{B} = 180^o$, από το εγγράψιμο ΑΒΓΔ.
Άρα ΕΖΗΘ εγγράψιμο.

6.

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΖΕ, ΒΖΔ, ΓΕΔ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση



Γράφουμε τους κύκλους ΑΖΕ, ΒΖΔ που επανατέμνονται σε σημείο Κ.
Φέρουμε τις ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο ΚΔΓΕ είναι εγγράψιμο, ή ότι $\hat{K} + \hat{\Gamma} = 180^o$

ΑΖΚΕ εγγεγραμμένο $\Rightarrow$ $\hat{K}_2 = 180^o - \hat{A}$.

ΒΔΚΖ εγγεγραμμένο $\Rightarrow$ $\hat{K}_1 = 180^o - \hat{B}$

Αλλά $\hat{K} = 360^o - \hat{K}_1 - \hat{K}_2 = 360^o - (180^o - \hat{B}) - (180^o - \hat{A})$

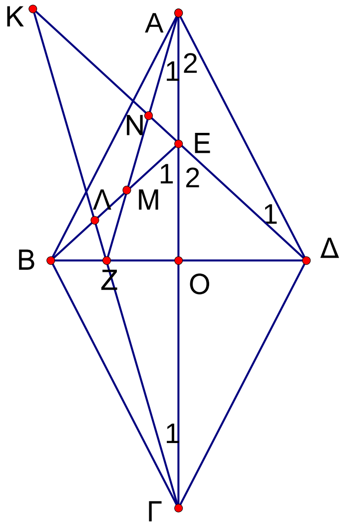
$= 360^o - 180^o + \hat{B} - 180^o + \hat{A}$

$= \hat{B} + \hat{A} = 180^o - \hat{\Gamma} \quad \Rightarrow \quad \hat{K} + \hat{\Gamma} = 180^o$.

7.

Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος και Ε, Ζ σημεία των ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΒΕ, ΔΕ, ΓΖ και ΑΖ σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.

Λύση



Έστω ΚΛΜΝ το τετράπλευρο.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξωτερική του γωνία $\hat{N}_{\varepsilon\xi}$ ισούται με την απέναντι εσωτερική $\hat{\Lambda}$.

Είναι $\hat{N}_{\varepsilon\xi} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{\Delta}_1$ **(1)** (εξωτερική στο τρίγωνο ΝΑΔ)

$\hat{\Lambda} = \hat{\Gamma}_1 + \hat{E}_1$ **(2)** (εξωτερική στο τρίγωνο ΛΓΕ)

ΕΟ μεσοκάθετος του ΒΔ, άρα $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ και $\hat{E}_2 = \hat{A}_2 + \hat{\Delta}_1$ (εξωτερική στο τρίγωνο ΕΑΔ).

(2) $\Rightarrow$ $\hat{\Lambda} = \hat{\Gamma}_1 + \hat{A}_2 + \hat{\Delta}_1$ **(3)**

ΖΟ μεσοκάθετος του ΑΓ $\Rightarrow$
τρίγωνο ΖΑΓ ισοσκελές, άρα $\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_1$.

(3) $\Rightarrow$ $\hat{\Lambda} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{\Delta}_1$ **(4)**

Από τις (1), (4) $\Rightarrow$ $\hat{N}_{\varepsilon\xi} = \hat{\Lambda}$.

8.

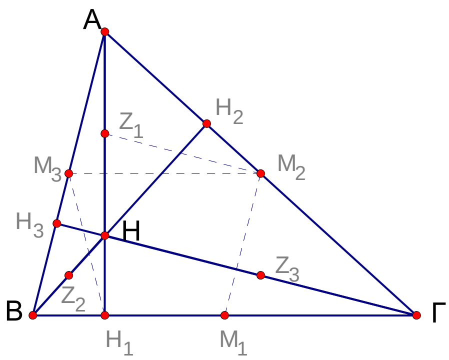
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ορθόκεντρό του Η. Αν M_1, M_2, M_3 είναι τα μέσα των ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα, AH_1, BH_2, ΓH_3 τα ύψη του και Z_1, Z_2, Z_3 τα μέσα των ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) το τετράπλευρο $H_1 M_1 M_2 M_3$ είναι εγγράψιμο

ii) το τετράπλευρο $Z_1 H_1 M_1 M_2$ είναι εγγράψιμο

iii) τα σημεία M_i, H_i, Z_i, $i = 1, 2, 3$ είναι ομοκυκλικά (Κύκλος των 9 σημείων ή κύκλος του Euler)

Λύση



i).

M_2, M_3 μέσα πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ $\Rightarrow$ $M_2 M_3 \parallel B\Gamma$ $\Rightarrow$ $H_1 M_1 M_2 M_3$ τραπέζιο **(1)**

M_1, M_2 μέσα πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ $\Rightarrow$ $M_1 M_2 = \dfrac{AB}{2}$ **(2)**

$H_1 M_3$ διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $H_1 BA$ $\Rightarrow$ $H_1 M_3 = \dfrac{AB}{2}$ **(3)**

(1), (2), (3) $\Rightarrow$ $H_1 M_1 M_2 M_3$ ισοσκελές τραπέζιο, άρα εγγράψιμο σε κύκλο.

ii).

M_2, Z_1 μέσα πλευρών του τριγώνου ΑΗΓ $\Rightarrow$ $M_2 Z_1 \parallel \Gamma H \perp AB \parallel M_1 M_2$, τελικά $M_2 Z_1 \perp M_1 M_2$.

Έτσι το τετράπλευρο $Z_1 H_1 M_1 M_2$ έχει δύο απέναντι γωνίες ορθές, άρα είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

iii).

i) $\Rightarrow$ το H_1 ανήκει στον κύκλο (c) που ορίζουν τα μέσα M_1, M_2, M_3.

Ομοίως τα H_2, H_3 ανήκουν στον (c).

ii) $\Rightarrow$ το Z_1 ανήκει στον κύκλο (c).

Ομοίως τα Z_2, Z_3 ανήκουν στον (c).