6.7
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 139 – 140

Ερωτήσεις Κατανόησης

1.
Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που

i) Έχουν απόσταση ρ από ένα σταθερό σημείο Ο

ii) Ισαπέχουν από δύο σταθερά σημεία Α και Β

iii) Έχουν απόσταση λ από μία ορισμένη ευθεία ε

iv) Ισαπέχουν από τις πλευρές μίας γωνίας

v) Ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες

vi) Ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες

vii) Βλέπουν ένα δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα υπό ορισμένη γωνία ω

Απάντηση

i) Ο κύκλος με κέντρο το Ο και ακτίνα ρ

ii) Η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ

iii) Δύο παράλληλες προς την ευθεία ε και σε απόσταση λ από αυτήν

iv) Η διχοτόμος της γωνίας

v) Οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες

vi) Η μεσοπαράλληλος των δύο ευθειών

vii) Είναι δύο τόξα κύκλων χορδής ίσης με το ευθύγραμμο τμήμα χωρίς τα άκρα της χορδής , συμμετρικά ως προς την ευθεία που ορίζεται από το δοθέν τμήμα, καθένα από τα οποία δέχεται γωνία ίση με την ω

2.

Ένα ορθογώνιο τρίγωνο κατασκευάζεται όταν δίνονται

i) Δύο κάθετες πλευρές του	Σ	Λ
ii) Μία κάθετη πλευρά του και η υποτείνουσα	Σ	Λ
iii) Μία οξεία γωνία του	Σ	Λ
iv) Η υποτείνουσα και μία οξεία γωνία του	Σ	Λ
v) Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα	Σ	Λ

Απάντηση

i) Κατασκευή τριγώνου από δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία

ii) Κατασκευή τριγώνου από δύο πλευρές και μία γωνία όχι περιεχόμενη

iii) Δεν είναι δυνατή η κατασκευή (υπάρχουν άπειρα ορθογώνια τρίγωνα με μία οξεία γωνία ίση με δοσμένη)

iv) Κατασκευή τριγώνου από μία πλευρά του και τις προσκείμενες γωνίες του

v) Δεν είναι δυνατή η κατασκευή (υπάρχουν άπειρα ορθογώνια τρίγωνα με δοσμένη υποτείνουσα)

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

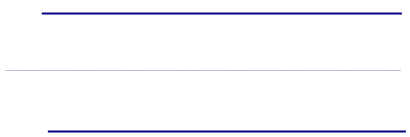
Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των θέσεων :

i) του δρομέα που κινείται σε ένα ευθύγραμμο διάδρομο ισαπέχοντας από τις πλευρές του,

ii) ενός τεχνητού δορυφόρου της γης που κινείται σε απόσταση 10 km πάνω από αυτή.

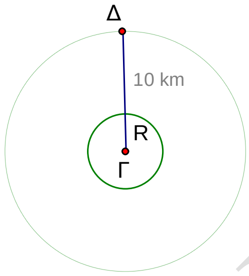
Λύση

i)



Ο γ.τόπος του δρομέα είναι η μεσοπαράλληλη των πλευρών του διαδρόμου, αφού μόνο κάθε σημείο της μεσοπαράλληλης ισαπέχει από τις πλευρές του διαδρόμου.

ii)



Έστω Γ το κέντρο της Γης και R η ακτίνα της. Για την τυχαία θέση Δ του δορυφόρου θα είναι

ΔΓ = R +10.

Άρα ο δορυφόρος θα κινείται στον κύκλο που έχει κέντρο το κέντρο της Γης και ακτίνα R+10

2.

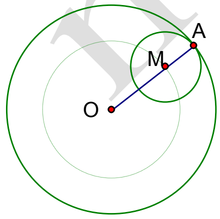
Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων γνωστής ακτίνας :

i) που κυλίονται στο εσωτερικό ενός μεγαλύτερου γνωστού κύκλου,

ii) που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο.

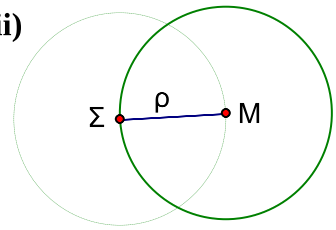
Λύση

i)



Ας είναι (O, R) ο μεγαλύτερος γνωστός κύκλος και (M,ρ) ο κυλιόμενος κύκλος γνωστής ακτίνας ρ, όπου αναζητάμε το γ.τόπο του κέντρου του M.
Είναι OM = OA – MA = R – ρ.
Δηλαδή το κέντρο M του κυλιόμενου κύκλου απέχει από το σταθερό σημείο O απόσταση R – ρ, άρα κινείται στον κύκλο (O, R – ρ)

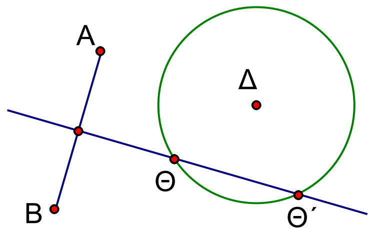
ii)



Έστω Σ το σταθερό σημείο και M τυχαίο σημείο του γ. τόπου, δηλαδή κέντρο κύκλου ακτίνας ρ, που διέρχεται από το Σ.
Το M απέχει από το σταθερό Σ απόσταση ρ, άρα κινείτε στον κύκλο (Σ, ρ).

3.
Το σημείο στο οποίο είναι κρυμμένος ένας θησαυρός απέχει 4m από ένα δένδρο Δ και ισαπέχει από δύο άλλα δένδρα Α και Β. Να βρεθεί η θέση του θησαυρού.

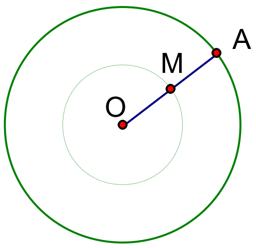
Λύση



Έστω Θ η θέση του θησαυρού.
Επειδή το Θ απέχει από το Δ απόσταση 4m, θα ανήκει στον κύκλο (Δ, 4).
Και επειδή ΘΑ = ΘΒ, το Θ θα ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΑΒ.
Άρα το Θ θα είναι σημείο τομής του κύκλου με τη μεσοκάθετο.

4.
Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των ακτίνων δοσμένου κύκλου.

Λύση



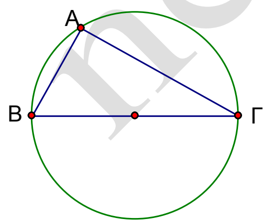
Έστω Μ τυχαίο σημείο του γ.τόπου, δηλαδή μέσο τυχαίας ακτίνας ΟΑ του δοσμένου κύκλου (Ο, ρ) $\Leftrightarrow$ $OM = \frac{\rho}{2}$ $\Leftrightarrow$

το Μ ανήκει στον κύκλο $(O, \frac{\rho}{2})$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.
Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής Α της ορθής γωνίας ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, που έχει δοσμένη υποτείνουσα.

Λύση



Έστω Α τυχαίο σημείο του γ.τόπου $\Leftrightarrow$

το Α βλέπει το σταθερό τμήμα ΒΓ

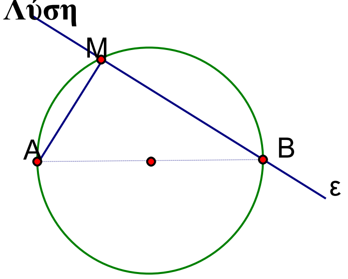
με ορθή γωνία $\Leftrightarrow$

το Α ανήκει στον κύκλο διαμέτρου ΒΓ.

Πρέπει $A \neq B$ και Γ, για να ορίζεται τρίγωνο.

2.
Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των προβολών δοσμένου σημείου A πάνω στις ευθείες που διέρχονται από δοσμένο σημείο B.

Λύση

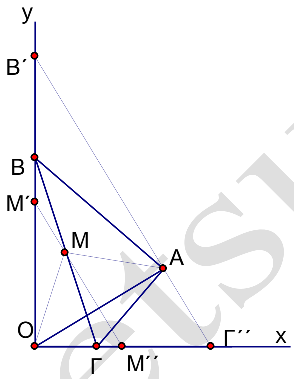


Έστω M τυχαίο σημείο του γ.τόπου $\Leftrightarrow$
$AM \perp$ στην τυχαία ευθεία ε που διέρχεται από το A $\Leftrightarrow$
το M βλέπει το τμήμα AB με ορθή γωνία ή συμπίπτει A ή B $\Leftrightarrow$
το M ανήκει στον κύκλο διαμέτρου AB

Διερεύνηση.
$M \equiv A$ όταν $\varepsilon \equiv$ με την ευθεία AB και
$M \equiv B$ όταν $\varepsilon \equiv$ με την κάθετη της AB από το B.

3.
Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο A στο εσωτερικό της. Οι κορυφές B και Γ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) κινούνται πάνω στις Ox και Oy αντίστοιχα. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M της υποτείνουσας ΒΓ.

Λύση



Έστω M τυχαίο σημείο του γ.τόπου $\Leftrightarrow$
το M είναι μέσο της υποτείνουσας ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ $\Leftrightarrow$
ΜΟ, ΜΑ διάμεσοι των ορθογωνίων τριγώνων ΟΒΓ και ΑΒΓ $\Leftrightarrow$
$OM = \dfrac{B\Gamma}{2} = AM$ $\Leftrightarrow$
το M ανήκει στη μεσοκάθετο ευθεία Μ΄Μ΄΄ του ΟΑ.

Διερεύνηση.
Η υποτείνουσα ΒΓ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $x\hat{O}y$ και οριακά γίνεται ΟΓ΄΄ ή ΟΒ΄, άρα το M βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $x\hat{O}y$ ή στις πλευρές της.
Έτσι, ο γ. τόπος είναι το ευθ. τμήμα Μ΄Μ΄΄ της μεσοκαθέτου του ΟΑ.

4.

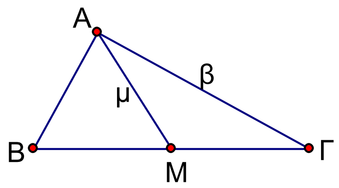
Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) του οποίου δίνονται

i) η διάμεσος $AM = \mu$ και μία κάθετη πλευρά

ii) η διάμεσος $AM = \mu$ και το ύψος $A\Delta = \lambda$.

Λύση

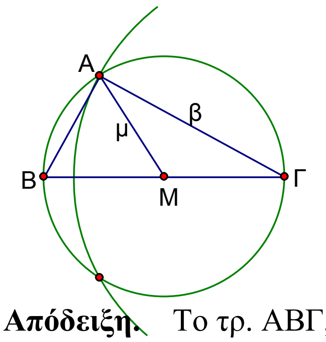
i)



Ανάλυση. Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο, με $\hat{A} = 1\llcorner$, διάμεσο $AM = \mu$ και κάθετη πλευρά $A\Gamma = \beta$

Είναι $AM = \dfrac{B\Gamma}{2} \Rightarrow B\Gamma = 2\mu$

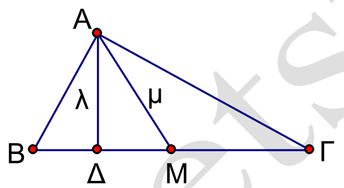
Σύνθεση. Γράφουμε τμήμα $B\Gamma = 2\mu$ και έστω Μ το μέσο του.
Γράφουμε τους κύκλους (Μ,μ) και (Γ,β) οι οποίοι τέμνονται σε σημείο Α.
Φέρουμε τις ΑΒ και ΑΓ.
Υποστηρίζουμε ότι το τρ.ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.



Απόδειξη. Το τρ. ΑΒΓ, όπως κατασκευάσθηκε, έχει διάμεσο $AM = \mu$ σαν ακτίνα του κύκλου (Μ,μ), έχει πλευρά $A\Gamma = \beta$ σαν ακτίνα του κύκλου (Γ,β) και $\hat{A} = 1\llcorner$ σαν εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

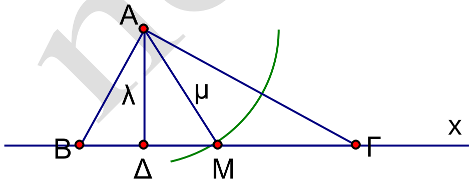
Διερεύνηση. Για να έχει λύση το πρόβλημα, πρέπει οι δύο κύκλοι να τέμνονται, δηλαδή να είναι $\beta < 2\mu$.

ii)



Ανάλυση. Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο, με $\hat{A} = 1\llcorner$, διάμεσο $AM = \mu$ και ύψος $A\Delta = \lambda$
Παρατηρούμε ότι το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΜ είναι κατασκευάσιμο από κάθετη πλευρά λ και υποτείνουσα μ.

Σύνθεση. Γράφουμε ορθή γωνία $A\hat{\Delta}x$ με $A\Delta = \lambda$ και κύκλο (Α,μ) ο οποίος τέμνει τη Δx σε σημείο Μ.
Πάνω στην ευθεία Δx και εκατέρωθεν του Μ θεωρούμε τα τμήματα $MB = M\Gamma = \mu$.
Υποστηρίζουμε ότι το τρ.ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.



Απόδειξη. Το τρ. ΑΒΓ, όπως κατασκευάσθηκε, έχει διάμεσο $AM = \mu$ σαν ακτίνα του κύκλου (Α,μ), έχει ύψος $A\Delta = \lambda$ και είναι ορθογώνιο διότι η διάμεσός του ΑΜ ισούται $\dfrac{B\Gamma}{2}$.

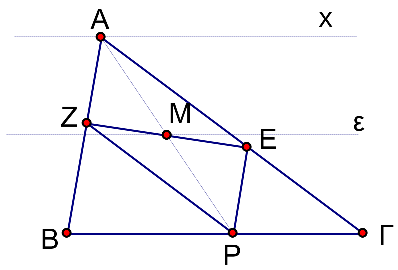
Διερεύνηση. Το πρόβλημα έχει λύση $\Leftrightarrow$
τρίγωνο ΑΔΜ κατασκευάσιμο ή $AM \equiv A\Delta$ $\Leftrightarrow$
$\lambda < \mu$ ή $\lambda = \mu$

Σύνθετα Θέματα

1.

Από ένα μεταβλητό σημείο Ρ της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ που τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ του ΖΕ.

Λύση



Έστω Μ τυχαίο σημείο του γ.τόπου, δηλαδή
Μ μέσο της διαγωνίου ΖΕ του παραλληλογράμμου ΑΖΡΕ $\Leftrightarrow$
Μ μέσο και της διαγωνίου ΑΡ $\Leftrightarrow$
Μ ανήκει στη μεσοπαράλληλη ε των Αx , ΒΓ, όπου $Ax \parallel B\Gamma$ από το Α.

Διερεύνηση. Επιδή το Ρ είναι σημείο της πλευράς ΒΓ, το Μ θα κινείται στο τμήμα της ε μεταξύ της ΑΒ και της ΑΓ.

2.

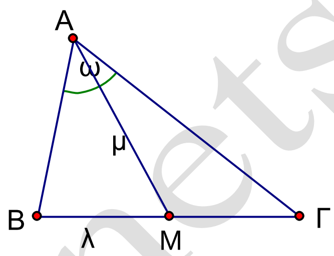
Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου δίνονται:

i) η πλευρά $B\Gamma = \lambda$, η γωνία $\hat{A} = \omega$ και η διάμεσος $AM = \mu$

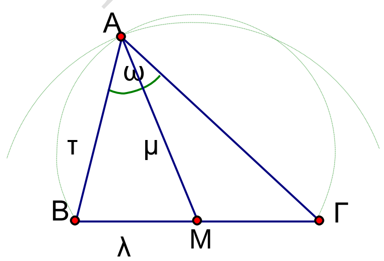
ii) η πλευρά $B\Gamma = \lambda$, η γωνία $\hat{A} = \omega$ και η διάμεσος $BN = \mu$

Λύση

i)



Ανάλυση. Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο και Μ το μέσο της ΒΓ.
Τότε $B\Gamma = \lambda$, $\hat{A} = \omega$ και $AM = \mu$.
Επειδή το Α βλέπει το τμήμα ΒΓ με γνωστή γωνία ω, θα ανήκει σε γνωστό τόξο Τ.
Επειδή $AM = \mu$, δηλαδή το Α απέχει από το Μ γνωστή απόσταση μ, θα ανήκει σε κύκλο (Μ,μ)
Η τομή του τόξου Τ με τον κύκλο (Μ,μ) θα είναι το Α.

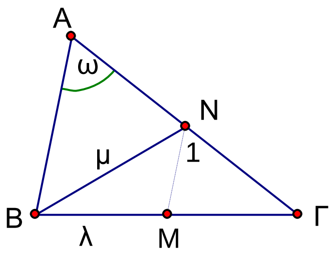


Σύνθεση. Θεωρούμε τμήμα $B\Gamma = \lambda$ και το μέσο του Μ.
Γράφουμε τόξο Τ, τα σημεία του οποίου να βλέπουν τη ΒΓ με γωνία ω και κύκλο (Μ,μ), που τέμνει το τόξο Τ σε σημείο Α.
Φέρουμε τις ΑΒ και ΑΓ.
Υποστηρίζουμε ότι το ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

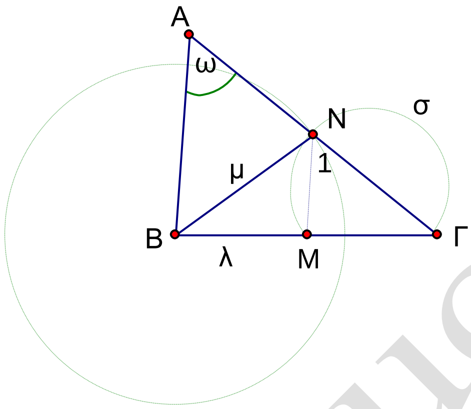
Απόδειξη. Το τρίγωνο ΑΒΓ, όπως κατασκευάσθηκε, έχει προφανώς τα δοσμένα στοιχεία.

Διερεύνηση. Το πρόβλημα έχει λύση τότε και μόνο τότε, όταν ο κύκλος (Μ,μ) τέμνει το τόξο Τ.

ii)



Ανάλυση. Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο και Ν το μέσο της ΒΓ.
Τότε ΒΓ = λ, $\hat{A} = \omega$ και ΒΝ = μ
Θεωρούμε το μέσο Μ της ΒΓ και φέρουμε τη ΝΜ
ΝΜ∥ΑΒ (ενώνει μέσα πλευρών) ⇒
$\hat{N}_1 = \omega$ ⇒ το Ν θα ανήκει σε γνωστό τόξο σ χορδής ΜΓ.
ΝΒ = μ ⇒ το Ν θα ανήκει σε κύκλο (Β,μ).
Άρα το Ν θα είναι το σημείο τομής του τόξου σ με τον κύκλο (Β,μ).



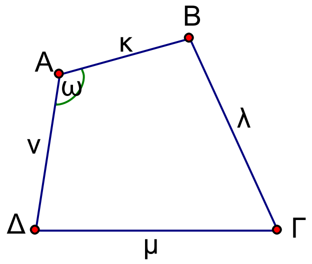
Σύνθεση. Θεωρούμε τμήμα ΒΓ = λ και το μέσο του Μ.
Γράφουμε τόξο σ, τα σημεία του οποίου να βλέπουν τη ΜΓ με γωνία ω και κύκλο (Β,μ), που τέμνει το τόξο σ σε σημείο Ν.
Φέρουμε τη ΓΝ και την προεκτείνουμε κατά ΝΑ = ΓΝ.
Τέλος φέρουμε την ΑΒ.Υποστηρίζουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη.
Το τρίγωνο ΑΒΓ, όπως κατασκευάσθηκε, έχει ΒΓ = λ και διάμεσο ΒΝ = μ
Ν ανήκει στο τόξο σ ⇒ $\hat{N}_1 = \omega$
Αλλά ΝΜ∥ΑΒ (τα Ν, Μ είναι μέσα πλευρών) ⇒ $\hat{A} = \hat{N}_1 = \omega$

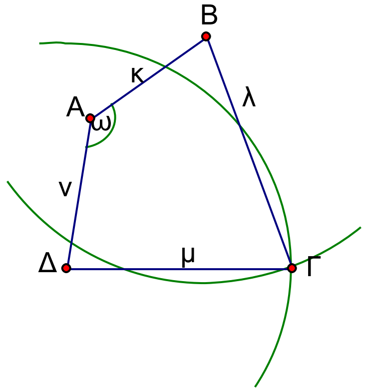
Διερεύνηση.
Το πρόβλημα έχει λύση τότε και μόνο τότε, όταν ο κύκλος (Β,μ) τέμνει το τόξο σ

3.
Να κατασκευάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ που έχει πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ ίσες με τα γνωστά τμήματα κ, λ, μ, ν αντίστοιχα, και η γωνία του Α είναι ίση με δοσμένη γωνία ω.

Λύση



Ανάλυση. Έστω ΑΒΓΔ το ζητούμενο τετράπλευρο.
Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι κατασκευάσιμο από δύο πλευρές και περιεχόμενη γωνία.
Επειδή ΓΒ = λ, το Γ θα ανήκει σε κύκλο (Β,λ), και επειδή ΓΔ = μ, το Γ θα ανήκει σε κύκλο (Δ,μ).
Το Γ, λοιπόν, θα είναι η τομή των δύο κύκλων.



Σύνθεση. Κατασκευάζουμε τρίγωνο ΑΒΔ με $\hat{A} = ω$, ΑΒ = κ και ΑΔ = ν.
Γράφουμε τους κύκλους (Β,λ) και (Δ,μ), που τέμνονται σε σημείο Γ.
Τέλος φέρουμε τις ΓΒ και ΓΔ.
Υποστηρίζουμε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη. Το ΑΒΓΔ έχει $\hat{A} = ω$, ΑΒ = κ και ΑΔ = ν, από την κατασκευή.
Επίσης είναι ΒΓ = λ και ΓΔ = μ σαν ακτίνες των κύκλων.

Διερεύνηση. Το πρόβλημα έχει λύση τότε και μόνο τότε, όταν οι κύκλοι (Β,λ) και (Δ,μ) έχουν κοινό σημείο.