6.5 – 6.6
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 134

Ερωτήσεις Κατανόησης

1.
Σε ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο

i) Τα αθροίσματα των απέναντι γωνιών του είναι ίσα Σ Λ

ii) Κάθε πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες Σ Λ

Χαρακτηρίστε σωστή ή λάθος κάθε μία από τις παραπάνω προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντηση σας .

Απάντηση

i) Καθένα από τα αθροίσματα αυτά είναι ίσο με 180^{o}

ii) Και οι δύο γωνίες είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο

2.
Αν ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο τετράπλευρο τότε

α. $\hat{A}+\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}=2\llcorner$ β. $\hat{A}=\hat{\Gamma}$ γ. $\hat{A}=\hat{\Delta}_{\varepsilon\xi}$ δ $\hat{A}=\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ ε. $\hat{B}=\hat{\Delta}$

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντηση σας

Απάντηση

Σωστή απάντηση είναι η (δ), αφού στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο κάθε γωνία του είναι ίση με την απέναντι εξωτερική

3.
Από τέσσερα μη συνευθειακά σημεία διέρχεται πάντα ένας κύκλος;

Απάντηση
Όχι

netsuccess.gr

4.

i) Πότε ένα τετράπλευρο λέγεται εγγράψιμο;

ii) Αν οι μεσοκάθετες των πλευρών ενός τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο;

Απάντηση

i) Ένα τετράπλευρο λέγεται εγγράψιμο όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται από τις κορυφές του τετραπλεύρου

ii) Ναι διότι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων θα ισαπέχει από τις κορυφές του τετραπλεύρου

5.

Ποια είναι τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο;

Απάντηση

i) Δύο απέναντι γωνίες του να είναι παραπληρωματικές

ii) Μία γωνία του να είναι ίση με την απέναντι εξωτερική

iii) Μία πλευρά του να φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες

6.

Ποιο από τα τετράπλευρα :
παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, τραπέζιο είναι εγγράψιμο;

Απάντηση

Το ορθογώνιο και το τετράγωνο

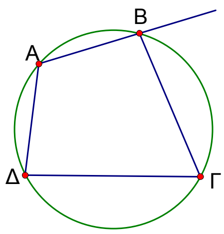
netsuccess.gr

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Σε ένα εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A} = 120^o$ και $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 80^o$. Να βρείτε τις γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$ του τετραπλεύρου.

Λύση



Εγγράψιμο $\Rightarrow \hat{\Gamma} + \hat{A} = 180^o \Rightarrow \hat{\Gamma} = 60^o$

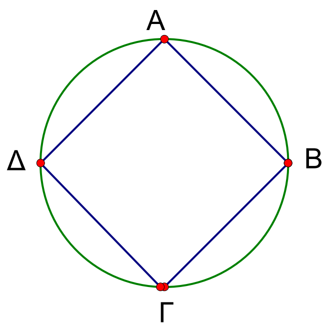
$\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 80^o \Rightarrow \hat{B} = 100^o$

Εγγράψιμο $\Rightarrow \hat{\Delta} = \hat{B}_{\varepsilon\xi} = 80^o$

2.

Αν ένας ρόμβος είναι εγγεγραμμένος σε κύκλο, να αποδείξετε ότι είναι τετράγωνο.

Λύση



ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο $\Rightarrow \hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^o$

ΑΒΓΔ ρόμβος $\Rightarrow \hat{A} = \hat{\Gamma}$

Άρα $2\hat{A} = 180^o \Rightarrow \hat{A} = 90^o = \hat{\Gamma}$

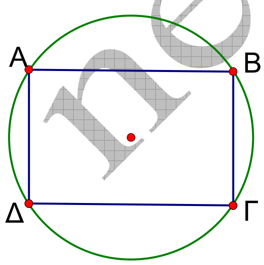
Ομοίως $\hat{B} = 90^o = \hat{\Delta}$

Έτσι, το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με ίσες πλευρές, άρα είναι τετράγωνο.

3.

Να αποδείξετε ότι, κάθε εγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.

Λύση



ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο $\Rightarrow \hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^o$

ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο $\Rightarrow \hat{A} = \hat{\Gamma}$

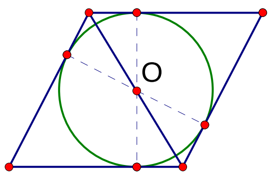
Άρα $2\hat{A} = 180^o \Rightarrow \hat{A} = 90^o$, οπότε το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.

netsuccess.gr

4.

Να αποδείξετε ότι κάθε περιγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, του οποίου οι διαγώνιοι τέμνονται στο κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.

Λύση



Έστω O το κέντρο του παραλληλογράμμου.

Το O απέχει από τις πλευρές του παραλληλογράμμου απόσταση ίση με την ακτίνα ρ του κύκλου.

Άρα το O ανήκει στις διχοτόμους των γωνιών του παραλληλογράμμου.

Έτσι, οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου είναι και διχοτόμοι των γωνιών του, άρα είναι ρόμβος

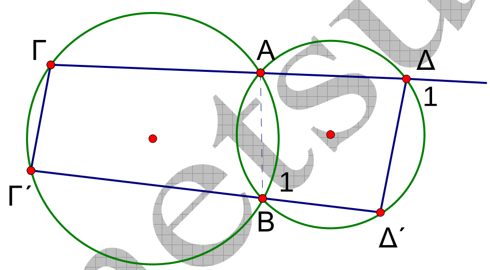
Ταυτόχρονα αποδείχθηκε ότι οι διαγώνιοι διέρχονται από το κέντρο του κύκλου, άρα τέμνονται σ'αυτό.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία A και B. Από τα A και B φέρουμε ευθείες που τέμνουν τον ένα κύκλο στα Γ και Γ' και τον άλλο στα Δ και Δ' αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Gamma' \parallel \Delta\Delta'$.

Λύση



Φέρουμε την κοινή χορδή AB.

$AB\Gamma'\Gamma$ εγγεγραμμένο $\Rightarrow \hat{\Gamma} = \hat{B}_1$

$AB\Delta'\Delta$ εγγεγραμμένο $\Rightarrow \hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$

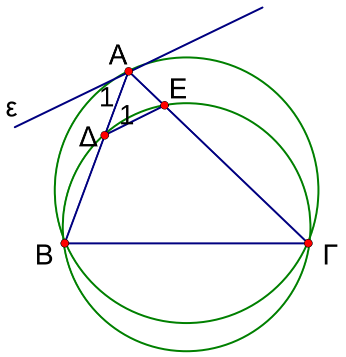
Άρα $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_1 \Rightarrow \Gamma\Gamma' \parallel \Delta\Delta'$.

netsuccess.gr

2.

Ένας κύκλος (Κ) διέρχεται από τις κορυφές Β και Γ τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η ΔΕ είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη ε του περιγεγραμμένου κύκλου στο Α.

Λύση



Έστω ε η εφαπτομένη στο Α.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$

ΒΔΕΓ εγγεγραμμένο $\Rightarrow \hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}$

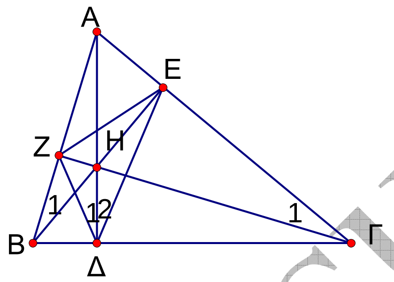
αλλά $\hat{\Gamma} = \hat{A}_1$ (εγγεγραμμένη – χορδής εφαπτομ)

Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$.

3.

Να αποδείξετε ότι τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ενός τριγώνου ΑΒΓ διχοτομούν τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΖ.

Λύση



Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.
ΒΔΗΖ εγγράψιμο διότι $\hat{\Delta}$, $\hat{Z}$ ορθές $\Rightarrow \hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$

ΔΗΕΓ εγγράψιμο διότι $\hat{\Delta}$, $\hat{E}$ ορθές $\Rightarrow \hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_1$

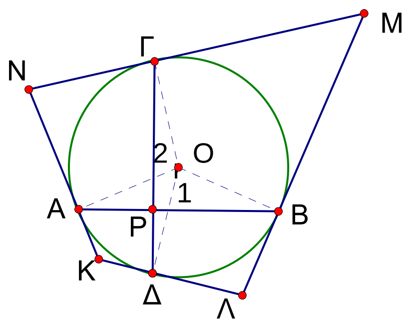
ΒΖΕΓ εγγράψιμο διότι η ΒΓ φαίνεται από τα Ζ, Ε με ίσες γωνίες ορθές $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

Από τις παραπάνω τρεις ισότητες γωνιών $\Rightarrow$
$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ άρα ΔΑ διχοτόμος της γωνίας $Z\hat{\Delta}E$.

netsuccess.gr

4.
Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα άκρα δύο κάθετων χορδών κύκλου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{\Lambda}+\hat{N} = 180^o$.

Φέρουμε τις ακτίνες στα σημεία επαφής.

Το τετράπλευρο ΟΔΛΒ έχει δύο ορθές γωνίες, άρα $\hat{\Lambda}+\hat{O}_1 = 180^o$ **(1)**

Το τετράπλευρο ΟΑΝΓ έχει δύο ορθές γωνίες, άρα $\hat{N}+\hat{O}_2 = 180^o$ **(2)**

(1) + (2) $\Rightarrow$ $\hat{\Lambda}+\hat{N}+\hat{O}_1+\hat{O}_2 = 360^o$.

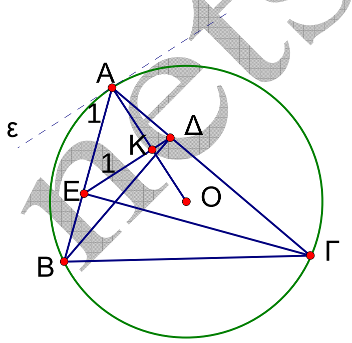
Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^o$

Από εφαρμογή έχουμε $\hat{P}=\dfrac{\overset{\frown}{\Delta B}+\overset{\frown}{A\Gamma}}{2}$ $\Rightarrow$ $90^o = \dfrac{\hat{O}_1+\hat{O}_2}{2}$ $\Rightarrow$ $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^o$.

Σύνθετα Θέματα

1.
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του (Ο,R). Αν ΒΔ και ΓΕ είναι ύψη του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι $OA \perp \Delta E$. (Θεώρημα Nagel).

Λύση



Έστω ε η εφαπτομένη στο Α.
Επειδή $OA \perp \varepsilon$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\Delta E \parallel \varepsilon$, ή αρκεί $\hat{E}_1=\hat{A}_1$

ΒΕΔΓ εγγράψιμο (η ΒΓ φαίνεται από τα Ε, Δ με ίσες γωνίες ορθές) $\Rightarrow$ $\hat{E}_1=\hat{\Gamma}$

αλλά $\hat{\Gamma}=\hat{A}_1$ (εγγεγραμμένη – χορδής εφαπτομ)

Άρα $\hat{E}_1=\hat{A}_1$

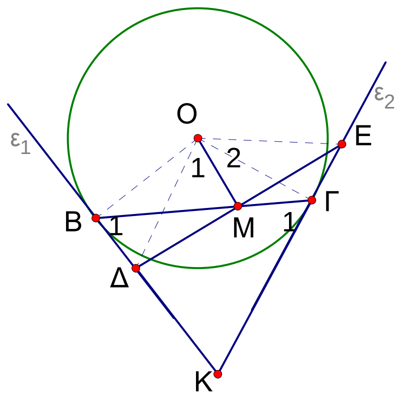
netsuccess.gr

2.

Δίνεται μια χορδή ΒΓ ενός κύκλου (O,R) και οι εφαπτόμενες ε_1 και ε_2 στα άκρα της. Από ένα τυχαίο σημείο Μ της ΒΓ φέρουμε κάθετη στην ΟΜ, που τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

ΔΜ = ΜΕ.

Λύση



Έστω Κ το σημείο τομής των ε_1 , ε_2.

Φέρουμε τις ακτίνες ΟΒ, ΟΓ στα σημεία επαφής και τις ΟΔ, ΟΕ.

Στο τρίγωνο ΟΔΕ το ΟΜ είναι ύψος. Θέλοντας να αποδείξουμε ότι το Μ είναι μέσο του ΔΕ, δηλαδή ότι το ΟΜ είναι και διάμεσος του τριγώνου ΟΔΕ, αρκεί να αποδείξουμε ότι ΟΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{O}E$, ή αρκεί $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

Το ΟΒΔΜ είναι εγγράψιμο, αφού οι γωνίες του $\hat{B}$ και $\hat{M}$ είναι ορθές $\Rightarrow$

$$\hat{O}_1 = \hat{B}_1$$

Το ΟΜΓΕ είναι εγγράψιμο, αφού τα Μ, Γ βλέπουν την ΟΕ με ίσες γωνίες ορθές $\Rightarrow$ $\hat{O}_2 = \hat{\Gamma}_1$ (εσωτερική και απέναντι εξωτερική).

ΚΒ = ΚΓ σαν εφαπτομενικά τμήματα, δηλαδή το τρίγωνο ΚΒΓ είναι ισοσκελές,άρα

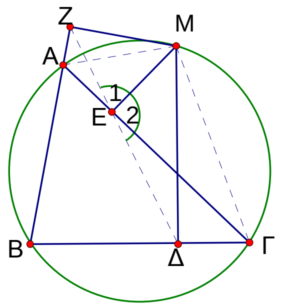
$$\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1.$$

Από τις παραπάνω τρεις ισότητες γωνιών $\Rightarrow$ $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

netsuccess.gr

3.
Να αποδείξετε ότι οι προβολές κάθε σημείου του περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου πάνω στις πλευρές του είναι σημεία συνευθειακά (ευθεία Simson).

Λύση



ΑΒΓ το τρίγωνο, Μ το τυχαίο σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου και Δ, Ε, Ζ οι προβολές.
Ενώνουμε το Μ με τις κορυφές.
Επίσης φέρουμε τις ΕΖ, ΕΔ.
Για να αποδειχθεί ότι ΖΕΔ είναι ευθεία, αρκεί να αποδειχθεί ότι $\hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 180^o$
Λόγω των προβολών (ορθές γωνίες) έχουμε εγγράψιμα τετράπλευρα.

Στο ΜΕΑΖ έχουμε $\hat{E} + \hat{Z} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ άρα είναι εγγράψιμο $\Rightarrow$

$$\hat{E}_1 = Z\hat{A}M$$

Στο ΜΕΔΓ, τα Ε, Δ βλέπουν τη ΜΓ με ίσες γωνίες ορθές, άρα είναι εγγράψιμο $\Rightarrow$

$$\hat{E}_2 = 180^o - B\hat{\Gamma}M$$

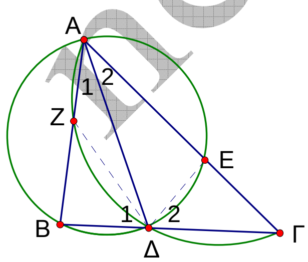
Επομένως $\hat{E}_1 + \hat{E}_2 = Z\hat{A}M + 180^o - B\hat{\Gamma}M$

Αλλά, από το εγγεγραμμένο ΜΑΒΓ έχουμε $Z\hat{A}M = B\hat{\Gamma}M$

Άρα $\hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 180^o$.

4.
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Αν οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΔΒ και ΑΔΓ τέμνουν τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ στα Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΓΕ = ΒΖ.

Λύση



Πάμε για τα τρίγωνα ΔΒΖ, ΔΕΓ

ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}E$ $\Rightarrow$

$\overset{\frown}{B\Delta} = \overset{\frown}{\Delta E}$ $\Rightarrow$ ΒΔ = ΔΕ **(1)**

ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $Z\hat{A}\Gamma$ $\Rightarrow$

$\overset{\frown}{Z\Delta} = \overset{\frown}{\Delta\Gamma}$ $\Rightarrow$ ΖΔ = ΔΓ **(2)**

ΑΖΔΓ εγγεγραμμένο $\Rightarrow$ $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}$ και ΑΒΔΕ εγγεγραμμένο $\Rightarrow$ $\hat{\Delta}_2 = \hat{A}$

Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ **(3)**

(1), (2), (3) $\Rightarrow$ τρ.ΔΒΖ = τρ.ΔΕΓ $\Rightarrow$ ΓΕ = ΒΖ.