6.1 – 6.4

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 129 – 130

Ερωτήσεις Κατανόησης

1.

Πότε μία γωνία λέγεται εγγεγραμμένη;

Απάντηση

Όταν η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της είναι τέμνουσες του κύκλου

2.

Αν φ και ω είναι αντίστοιχα η εγγεγραμμένη και η επίκεντρη γωνία που βαίνουν στο ίδιο τόξο τότε

α. φ =ω, β. φ = 2ω, γ. ω = 2φ, δ. φ = 90^o +ω

ε. τίποτα από τα προηγούμενα

Κυκλώστε την σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντηση σας

Απάντηση

Είναι $\hat{\phi} = \dfrac{\hat{\omega}}{2} \Leftrightarrow \hat{\omega} = 2\hat{\phi}$

3.

Συμπληρώστε το κενό στην επόμενη πρόταση :

΄΄ Η γωνία χορδής και εφαπτομένης ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής΄΄

4.

Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία βλέπουν ένα γνωστό ευθύγραμμο τμήμα υπό γωνία φ < 1└ ή φ = 1└.

Απάντηση

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία φαίνεται δοθέν ευθύγραμμο τμήμα υπό γωνία φ1└ είναι δύο τόξα κύκλων χορδής AB χωρίς τα άκρα A , B, συμμετρικά ως προς την ευθεία AB καθένα από τα οποία δέχεται γωνία ίση με την φ.

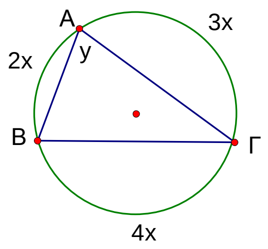
Αν φ =1└, τότε ο γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος διαμέτρου AB χωρίς τα A και B.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

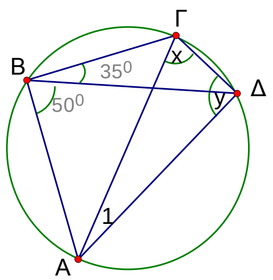
Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να βρείτε τα x, y.

Λύση



$$2x + 3x + 4x = 360^o \Rightarrow$$
$$9x = 360^o \Rightarrow$$
$$x = 40^o$$

$$y = \frac{\overset{\frown}{B\Gamma}}{2} = \frac{4x}{2} = 2x = 2.\ 40^o = 80^o$$



$x = 50^o$ εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{A\Delta}$

$\hat{A}_1 = 35^o$ εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$

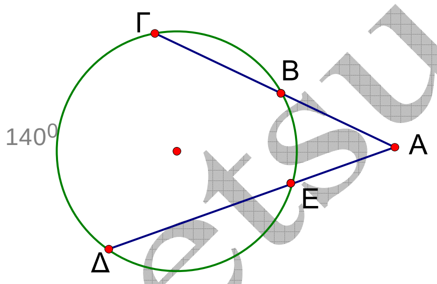
Στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε

$y = 180^o - x - \hat{A}_1 = 180^o - 50^o - 35^o = 95^o$

2.

Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{A} = 40^o$, να βρείτε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{BE}$.

Λύση



Από εφαρμογή γνωρίζουμε ότι

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{\Gamma\Delta} - \overset{\frown}{BE}}{2} \Rightarrow$$

$$40^o = \frac{140^0 - \overset{\frown}{BE}}{2} \Rightarrow$$

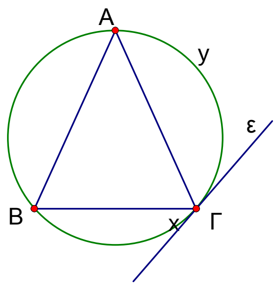
$$80^o = 140^o - \overset{\frown}{BE} \Rightarrow$$

$$\overset{\frown}{BE} = 140^o - 80^o \Rightarrow$$

$$\overset{\frown}{BE} = 60^o$$

3.
Αν στα παρακάτω σχήματα οι ευθείες ε και ε΄ είναι εφαπτόμενες, να βρεθούν τα x και y.

Λύση



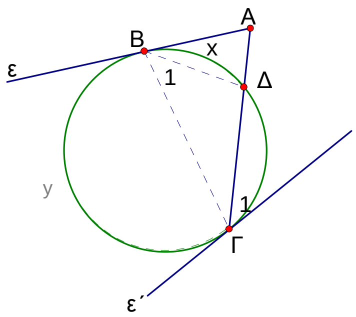
Δίνεται $\hat{A} = 40^o$ και ΑΒ = ΑΓ

Είναι $x = \hat{A} = 40^o$ (εγγεγραμμένη – υπό χορδής και εφαπτομένης)

Είναι $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{B\Gamma}}{2} \Rightarrow 40^o = \dfrac{\overset{\frown}{B\Gamma}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{B\Gamma} = 80^o$

$AB = A\Gamma \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A\Gamma} = y$

Αλλά $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A\Gamma} + \overset{\frown}{B\Gamma} = 360^o \Rightarrow 2y + 80^o = 360^o \Rightarrow 2y = 280^o \Rightarrow y = 140^o$



Δίνεται $\hat{A} = 60^o$ και $\hat{\Gamma}_1 = 50^o$

Φέρουμε τις ΒΔ, ΒΓ.

Είναι $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 50^o \Rightarrow \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 100^o$

Αλλά $x + y + \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 360^o \Rightarrow$

$x + y + 100^o = 360^o \Rightarrow$

$x + y = 260^o$ **(1)**

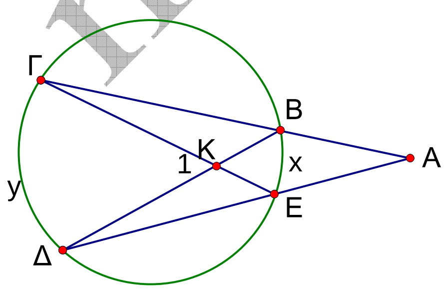
Είναι $\hat{A} = \dfrac{y - x}{2} \Rightarrow 60^o = \dfrac{y - x}{2} \Rightarrow$

$y - x = 120^o$ **(2)**

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2) και βρίσκουμε $x = 70^o$, $y = 190^o$

4.
Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{A} = 25^o$, να βρείτε τα μέτρα των τόξων $\overset{\frown}{EB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

Λύση



Δίνεται $\hat{A} = 25^o$ και $\hat{K}_1 = 70^o$

Είναι $\hat{A} = \dfrac{y - x}{2} \Rightarrow 25^o = \dfrac{y - x}{2} \Rightarrow$

$y - x = 50^o$ **(1)**

Είναι $\hat{K}_1 = \dfrac{y + x}{2} \Rightarrow 70^o = \dfrac{y + x}{2} \Rightarrow$

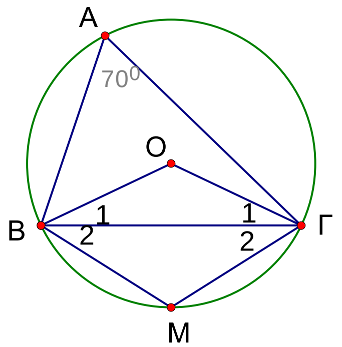
$y + x = 140^o$ **(2)**

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2) και βρίσκουμε $x = 45^o$, $y = 95^o$

5.

Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\overset{\frown}{ΒΜ} = \overset{\frown}{ΜΓ}$ και $\hat{Α} = 70^o$, να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΟΒΓ και ΜΒΓ.

Λύση



Είναι $\hat{Α} = \dfrac{\overset{\frown}{ΒΜΓ}}{2} = \overset{\frown}{ΒΜ} = \overset{\frown}{ΜΓ}$ (εγγεγραμμένη)

Άρα $70^o = \overset{\frown}{ΒΜ} = \overset{\frown}{ΜΓ}$

Ομοίως $\hat{Β}_2 = \dfrac{\overset{\frown}{ΜΓ}}{2} = 35^o$ και $\hat{Γ}_2 = 35^o$

Στο τρ.ΜΒΓ έχουμε $\hat{Μ} = 180^o - \hat{Β}_2 - \hat{Γ}_2$
$= 180^o - 35^o - 35^o$
$= 110^o$

Ακόμη $\hat{Ο} = 2\hat{Α} = 2\cdot 70^o = 140^o$

Στο ισοσκελές τρ.ΟΒΓ έχουμε $\hat{Β}_1 + \hat{Γ}_1 = 180^o - \hat{Ο} \Rightarrow$
$2\hat{Β}_1 = 180^o - 140^o$
$2\hat{Β}_1 = 40^o \Rightarrow \hat{Β}_1 = 20^o$

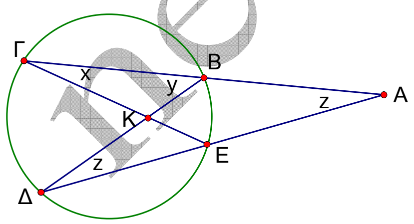
6.

Στο παρακάτω σχήμα, ποια σχέση είναι σωστή;

i) $x - y - z = 0$
ii) $x - 2y + z = 0$
iii) $x - y + z = 0$
iv) $x + y = 2z$
v) καμία από τις παραπάνω.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Λύση



$x = z$ (βαίνουν στο $\overset{\frown}{ΒΕ}$)

$y = z + z = 2z$ (εξωτερική του τρ. ΒΔΑ)

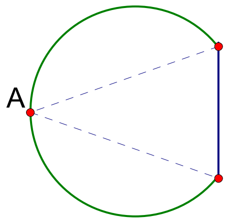
Ελέγχουμε κάθε μία από τις απαντήσεις .

Είναι σωστή η iii

7.

Το καλύτερο κάθισμα σε έναν κινηματογράφο είναι το κάθισμα “Α”. Να βρείτε ποια άλλα καθίσματα έχουν την ίδια οπτική γωνία με το θεατή που κάθεται στο κάθισμα “Α”.

Λύση



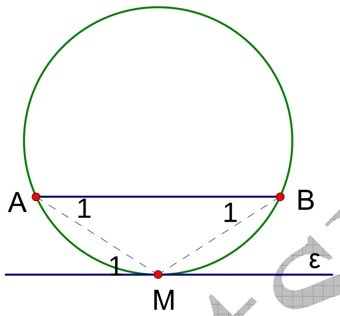
Τα ζητούμενα καθίσματα βρίσκονται πάνω σε τόξο κύκλου που έχει χορδή τη σκηνή και δέχεται γωνία ίση με την $\hat{A}$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στο μέσο ενός από τα τόξα με χορδή ΑΒ κύκλου (Κ) είναι παράλληλη στη χορδή ΑΒ και αντίστροφα.

Λύση



Ευθύ

Έστω ε η εφαπτομένη στο μέσο Μ του $\overset{\frown}{AB}$

$\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$

αλλά $\hat{B}_1 = \hat{M}_1$

άρα $\hat{A}_1 = \hat{M}_1 \Rightarrow AB \parallel \varepsilon$

Αντίστροφο

Έστω ε η εφαπτομένη σε σημείο Μ με $\varepsilon \parallel AB$

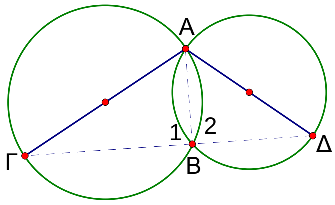
$\varepsilon \parallel AB \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{M}_1$, αλλά $\hat{B}_1 = \hat{M}_1$. Άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{MA}$.

Άρα Μ μέσο του $\overset{\frown}{AB}$.

2.

Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α στους δύο κύκλους, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΔ διέρχεται από το Β.

Λύση



Φέρουμε τις ΒΓ, ΒΔ, ΒΑ

$\hat{B}_1 = 90^o$ (βαίνει σε ημικύκλιο)

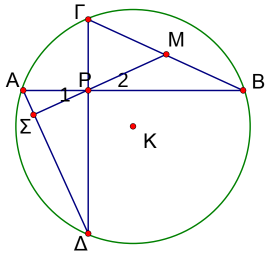
$\hat{B}_2 = 90^o$ ομοίως

$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^o \Rightarrow$ ΓΒΔ ευθεία.

3.

Δύο κάθετες χορδές ΑΒ, ΓΔ κύκλου (Κ) τέμνονται στο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΡΜ του τριγώνου ΡΒΓ είναι κάθετη στην ΑΔ.

Λύση



Η ΡΜ τέμνει την ΑΔ σε σημείο Σ.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{A} + \hat{P}_1 = 90^o$

ή $\hat{A} + \hat{P}_2 = 90^o$

ΡΜ διάμεσος του ορθ. τριγώνου ΡΒΓ $\Rightarrow$

$PM = \frac{\Gamma B}{2} = MB \Rightarrow \hat{P}_2 = \hat{B}$, οπότε

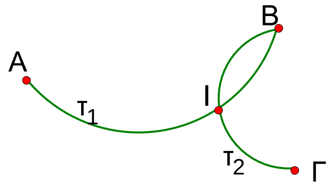
αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{A} + \hat{B} = 90^o$.

Είναι $\hat{A} + \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{\Delta B}}{2} + \frac{\overset{\frown}{A\Gamma}}{2} = \frac{\overset{\frown}{\Delta B} + \overset{\frown}{A\Gamma}}{2} = \hat{P}$ (από εφαρμογή) $= 90^o$.

4.

Ο καπετάνιος ενός ιστιοπλοϊκού πλοίου Ι είδε τρεις σημαδούρες για υφάλους στα σημεία Α, Β, Γ. Με μια πυξίδα διόπτευσης μέτρησε ότι $\mathrm{A\hat{I}B} = 100^{o}$, $\mathrm{B\hat{I}\Gamma} = 125^{o}$, $\mathrm{\Gamma\hat{I}A} = 135^{o}$. Εντόπισε τα σημεία Α, Β, Γ στο χάρτη και προσδιόρισε την ακριβή θέση του ιστιοπλοϊκού. Πώς τα κατάφερε;

Λύση



Επειδή $\mathrm{A\hat{I}B} = 100^{o}$, το ιστιοπλοϊκό θα ανήκει σε τόξο κύκλου T_1 με χορδή ΑΒ που δέχεται γωνία 100^{o}.

Επειδή $\mathrm{B\hat{I}\Gamma} = 125^{o}$, το ιστιοπλοϊκό θα ανήκει σε τόξο κύκλου T_2 με χορδή ΒΓ που δέχεται γωνία 125^{o}.

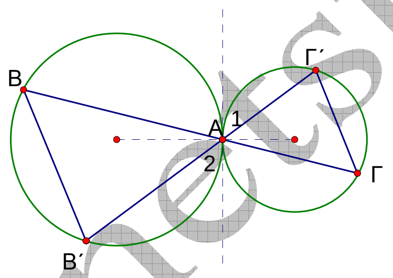
Το σημείο τομής των τόξων T_1 και T_2 είναι η θέση του ιστιοπλοϊκού.

Σύνθετα Θέματα

1.

Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά (ή εσωτερικά) στο σημείο Α και δύο ευθείες ε, ε΄ που διέρχονται από το Α τέμνουν τον ένα κύκλο στα σημεία Β, Β΄ και τον άλλο στα Γ, Γ΄ αντίστοιχα. Να αποδείξτε ότι ΒΒ΄|| ΓΓ΄.

Λύση



Φέρουμε την κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής Α.

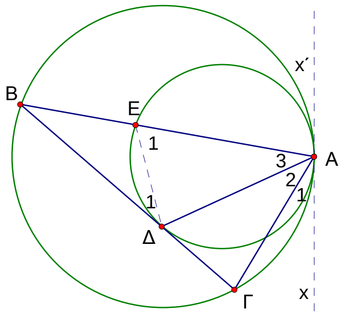
Είναι $\hat{B} = \hat{A}_2 = \hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (εγγεγραμμένη – υπό χορδής εφαπτομένης)

Και επειδή οι γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ είναι εντός εναλλάξ, θα έχουμε ΒΒ΄|| ΓΓ΄.

2.

Δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο Α. Μία χορδή ΒΓ του μεγαλύτερου κύκλου εφάπτεται στο μικρότερο στο σημείο Δ. Να αποδείξτε ότι η ΑΔ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$.

Λύση



Ονομάζουμε Ε το σημείο τομής της ΑΒ με το μικρό κύκλο.
Φέρουμε την ΕΔ και την κοινή εφαπτομένη xAx΄.
Εντοπίζουμε ισότητες γωνιών (εγγεγραμμένη – χορδής εφαπτομένης).

$\hat{A}_3 = \hat{\Delta}_1$ **(1)**

$\hat{B} = \hat{A}_1$ **(2)**

$\hat{E}_1 = \Delta\hat{A}x = \hat{A}_2 + \hat{A}_1$ **(3)**

$\hat{E}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΕΔΒ, άρα $\hat{E}_1 = \hat{B} + \hat{\Delta}_1 \overset{(3)}{\Rightarrow}$

$$\hat{A}_2 + \hat{A}_1 = \hat{B} + \hat{\Delta}_1 \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

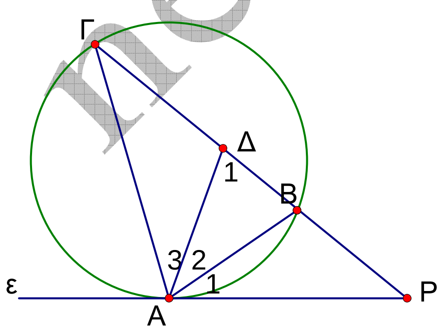
$$\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\hat{A}_2 = \hat{A}_3$$

3.

Δίνεται κύκλος (Κ), η εφαπτομένη ε σε ένα σημείο του Α και ένα σημείο Ρ της ε. Από το Ρ φέρουμε μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα Β και Γ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ τέμνει τη χορδή ΒΓ στο Δ, να αποδείξτε ότι ΡΔ = ΡΑ.

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΡΔΑ είναι ισοσκελές, ή ότι

$\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_2 + \hat{A}_1$

$\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική του τρ ΔΑΓ άρα

$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma} + \hat{A}_3 = \hat{\Gamma} + \hat{A}_2$

Αρκεί, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι $\hat{\Gamma} + \hat{A}_2 = \hat{A}_2 + \hat{A}_1$ ή $\hat{\Gamma} = \hat{A}_1$, το οποίο συμβαίνει, αφού έχουμε εγγεγραμμένη – χορδής εφαπτομένης.