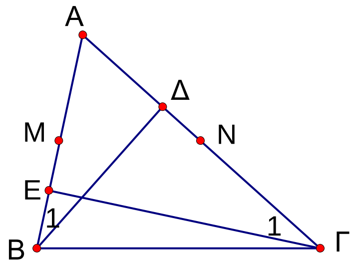
Ασκήσεις σχ. Βιβλίου σελίδας 116 – 117

Γενικές ασκήσεις 5^{ου} Κεφαλαίου

1.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ $(\beta \neq \gamma)$ με $\hat{A} = 60^o$, τα ύψη του ΒΔ, ΓΕ και τα μέσα Μ, Ν των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΜΕ = ΝΔ.

Λύση



Τρ.ΔΑΒ ορθογώνιο με $\hat{A} = 60^o \Rightarrow$

$\hat{B}_1 = 30^0 \Rightarrow A\Delta = \dfrac{AB}{2} = AM$

Τρ.ΕΑΓ ορθογώνιο με $\hat{A} = 60^o \Rightarrow$

$\hat{\Gamma}_1 = 30^0 \Rightarrow AE = \dfrac{A\Gamma}{2} = AN$

$ME = AE - AM = \dfrac{A\Gamma}{2} - \dfrac{AB}{2}$ **(1)**

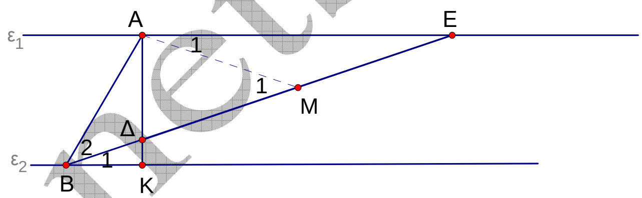
$N\Delta = AN - A\Delta = \dfrac{A\Gamma}{2} - \dfrac{AB}{2}$ **(2)**

(1) και (2) $\Rightarrow$ ΜΕ = ΝΔ

2.

Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2 και σημείο Α της ε_1. Φέρουμε $AK \perp \varepsilon_2$. Αν Β σημείο της ε_2 και μια ευθεία, που διέρχεται από το Β, τέμνει τις ΑΚ και ε_1 στα Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε ΔΕ = 2ΑΒ, να αποδείξετε ότι $A\hat{B}K = 3\ E\hat{B}K$.

Λύση



Θεωρούμε το μέσο Μ του τμήματος ΔΕ.

Τότε ΔΜ = ΜΕ = ΑΒ και από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε $AM = \dfrac{\Delta E}{2}$.

Άρα είναι ΑΜ = ΔΜ = ΜΕ = ΑΒ.

$\hat{M}_1 = \hat{A}_1 + \hat{E}$ σαν εξωτερική του τριγώνου ΜΑΕ

αλλά τρίγωνο ΜΑΕ ισοσκελές, άρα $\hat{A}_1 = \hat{E}$. Είναι, λοιπόν, $\hat{M}_1 = 2\hat{E}$

Επειδή όμως $\hat{E} = \hat{B}_1$ (εντός εναλλάξ), θα έχουμε $\hat{M}_1 = 2\hat{B}_1$ **(1)**

Τρίγωνο ΑΒΜ ισοσκελές $\Rightarrow$ $\hat{M}_1 = \hat{B}_2$

(1) $\Rightarrow$ $\hat{B}_2 = 2\hat{B}_1$ $\Rightarrow$ $A\hat{B}K = 3\hat{B}_1$.

3.

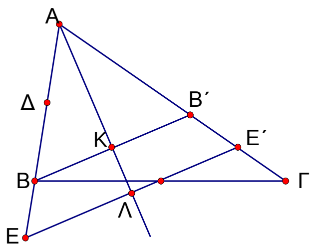
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, Δ το μέσο της ΑΒ και σημείο Ε της ημιευθείας ΔΒ, ώστε $ΔΕ = \frac{ΑΓ}{2}$. Από τα Β και Ε φέρουμε κάθετες στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{Α}$, οι οποίες τέμνουν την ΑΓ στα Β΄ και Ε΄ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

i) $Β΄Ε΄ = \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$

ii) η ευθεία ΕΕ΄ διέρχεται από το μέσο της ΒΓ.

Λύση



i).

Έστω Κ, Λ τα σημεία τομής των ΒΒ΄, ΕΕ΄ με τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{Α}$.

ΑΚ διχοτόμος και ύψος του τριγώνου ΑΒΒ΄, άρα ισοσκελές με ΑΒ΄ = ΑΒ.
Ομοίως ΑΕ΄ = ΑΕ

Έχουμε, λοιπόν, $Β΄Ε΄ = ΒΕ = ΔΕ - ΔΒ = \frac{ΑΓ}{2} - \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$

ii).

Επειδή Ε΄Ε || Β΄Β (κάθετες στη διχοτόμο), στο τρίγωνο ΓΒ΄Β αρκεί να αποδείξουμε ότι το Ε΄ είναι μέσο της ΓΒ΄, δηλαδή ΓΕ΄= Ε΄Β΄ ή αρκεί $ΓΕ΄ = \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$.

Είναι
$$
\begin{aligned}
ΓΕ΄ &= ΑΓ - ΑΕ΄ = ΑΓ - ΑΕ \\
&= ΑΓ - (ΑΔ + ΔΕ) \\
&= ΑΓ - ΑΔ - ΔΕ \\
&= ΑΓ - \frac{ΑΒ}{2} - \frac{ΑΓ}{2} \\
&= \frac{ΑΓ}{2} - \frac{ΑΒ}{2} \\
&= \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2}
\end{aligned}
$$
το οποίο, κατά το i), ισούται Ε΄Β΄.

4.

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2ΒΓ, $\hat{B} > 60^o$ και το ύψος του ΑΕ προς τη ΒΓ (ΑΕ ⊥ ΒΓ). Αν Ζ, Η είναι τα μέσα των ΓΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

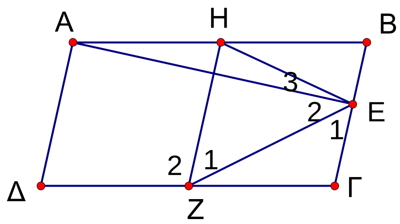
i) το ΗΒΓΖ είναι ρόμβος,

ii) η ΖΕ είναι διχοτόμος της $H\hat{E}\Gamma$,

iii) το ΗΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο,

iv) $\Delta\hat{Z}E = 3\, Z\hat{E}\Gamma$.

Λύση



i).

ΗΒ = ∥ ΖΓ ⇒ ΗΒΓΖ παρ/μμο

και επειδή ΗΒ = ΒΓ ⇒ ρόμβος

ii).

Αρκεί να δειχθεί ότι $\hat{E}_3 + \hat{E}_2 = \hat{E}_1$

Επειδή όμως $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1$ (εντός-εναλλάξ),

αρκεί να δειχθεί ότι $\hat{E}_3 + \hat{E}_2 = \hat{Z}_1$, δηλαδή ότι τρ.ΗΖΕ ισοσκελές με ΗΖ = ΗΕ.

Είναι $EH = \frac{AB}{2} = HB$ σα διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΕΒΑ

και $HZ = B\Gamma = \frac{AB}{2}$.

Άρα ΕΗ = ΗΖ.

iii)

ΕΓ ∥ ΗΖ ⇒ ΗΕΓΖ τραπέζιο.

$EH = \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} = Z\Gamma$ άρα ισοσκελές τραπέζιο.

iv)

Αρκεί να δειχθεί ότι $\hat{Z}_2 + \hat{Z}_1 = 3\hat{E}_1$, επειδή όμως $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1$,

αρκεί να δειχθεί ότι $\hat{Z}_2 = 2\hat{E}_1$, επειδή όμως $\hat{Z}_2 = \hat{\Gamma}$ (εντός – εκτός – επί τα αυτά),

αρκεί να δειχθεί ότι $\hat{\Gamma} = 2\hat{E}_1$.

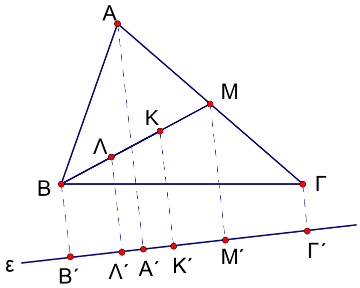
Έχουμε ΗΕΓΖ ισοσκελές τραπέζιο ⇒ $\hat{\Gamma} = \hat{E}_3 + \hat{E}_2 + \hat{E}_1$

Αλλά $\hat{E}_3 + \hat{E}_2 = \hat{E}_1$, άρα $\hat{\Gamma} = 2\hat{E}_1$.

5.

Ευθεία ε αφήνει τις κορυφές τριγώνου ΑΒΓ προς το ίδιο μέρος της. Αν Α΄, Β΄, Γ΄, Κ΄ οι προβολές των Α, Β, Γ και του βαρυκέντρου Κ αντίστοιχα στην ε, να αποδείξετε ότι ΑΑ΄+ ΒΒ΄+ΓΓ΄ = 3ΚΚ΄.

Λύση



Έστω η διάμεσος ΒΜ, Λ το μέσο του τμήματος ΒΚ και Μ΄, Λ΄ οι προβολές των Μ, Λ στην ευθεία ε.

ΜΜ΄ διάμεσος του τραπεζίου ΑΑ΄Γ΄Γ $\Rightarrow$

$$MM' = \frac{AA' + \Gamma\Gamma'}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

ΚΚ΄ διάμεσος του τραπεζίου ΛΛ΄Μ΄Μ $\Rightarrow$

$$KK' = \frac{MM' + \Lambda\Lambda'}{2} \qquad \textbf{(2)}$$

ΛΛ΄ διάμεσος του τραπεζίου ΒΒ΄Κ΄Κ $\Rightarrow$

$$\Lambda\Lambda' = \frac{BB' + KK'}{2} \qquad \textbf{(3)}$$

Απαλοιφή των ΜΜ΄, ΛΛ΄ μεταξύ των (1), (2), (3)

$$(2) \Rightarrow 2KK' = MM' + \Lambda\Lambda' \overset{(1),(3)}{\Rightarrow} 2KK' = \frac{AA' + \Gamma\Gamma'}{2} + \frac{BB' + KK'}{2} \Rightarrow$$

$$4KK' = AA' + \Gamma\Gamma' + BB' + KK' \Rightarrow 3KK' = AA' + BB' + \Gamma\Gamma'.$$

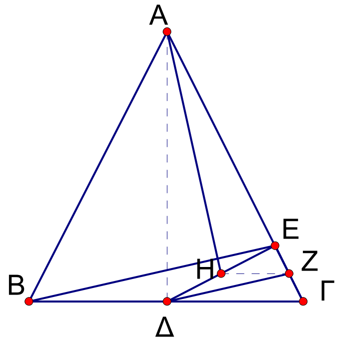
6.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και $Δ$ το μέσο της $ΒΓ$. Φέρουμε $ΔΕ \perp ΑΓ$. Αν $Ζ$ το μέσο του $ΕΓ$, να αποδείξετε ότι:

i) $ΔΖ \parallel ΒΕ$

ii) $ΑΗ \perp ΒΕ$, όπου $Η$ το μέσο του $ΔΕ$.

Λύση



i).

Στο τρίγωνο $ΕΒΓ$, τα $Δ$, $Ζ$ είναι μέσα πλευρών του $\Rightarrow$ $ΔΖ \parallel ΒΕ$.

ii).

Φέρουμε την $ΑΔ$ και την $ΗΖ$

Λόγω του ii), αρκεί να αποδείξουμε ότι $ΑΗ \perp ΔΖ$, δηλαδή ότι το $ΑΗ$ είναι φορέας ύψους του τριγώνου $ΑΔΖ$.

Επειδή όμως, $ΔΕ$ ύψος, αρκεί να αποδείξουμε ότι το $Η$ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $ΑΔΖ$.

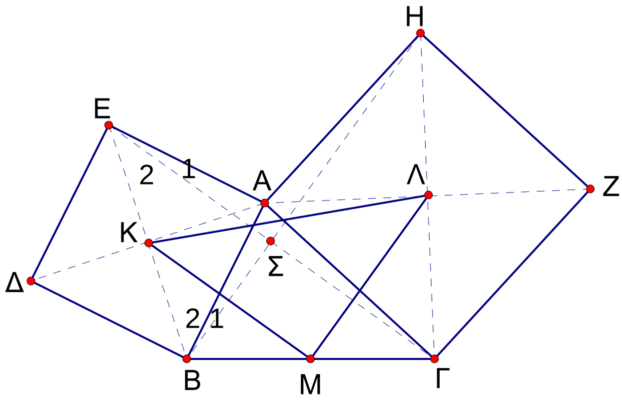
Προς τούτο, αρκεί να αποδείξουμε ότι $ΖΗ \perp ΑΔ$, το οποίο συμβαίνει διότι:

$ΖΗ \parallel ΔΓ$ (ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $ΕΔΓ$) και
$ΔΓ \perp ΑΔ$ (από το ισοσκελές $ΑΒΓ$).

7.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Μ το μέσο της ΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Κ και Λ είναι τα κέντρα των ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.

Λύση



Επειδή τα Μ, Κ είναι τα μέσα των ΒΓ, ΒΕ, φέρουμε τη ΓΕ, οπότε στο τρίγωνο ΒΓΕ έχουμε $\text{ΜΚ} \mathrel{=\!\!\parallel} \frac{\text{ΓΕ}}{2}$.

Ομοίως $\text{ΜΛ} \mathrel{=\!\!\parallel} \frac{\text{ΒΗ}}{2}$.

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\text{ΓΕ} \mathrel{=\!\!\perp} \text{ΒΗ}$.

Είναι τρ.ΑΕΓ = τρ.ΑΒΗ διότι ΑΕ = ΑΒ, ΑΓ = ΑΗ και τις περιεχόμενες γωνίες $90^o + \hat{\text{Α}}$.

Άρα ΓΕ = ΒΗ **(1)** και $\hat{\text{Ε}}_1 = \hat{\text{Β}}_1$ **(2)**

Έστω Σ η τομή των ΓΕ, ΒΗ.

Στο τρίγωνο ΣΕΒ έχουμε

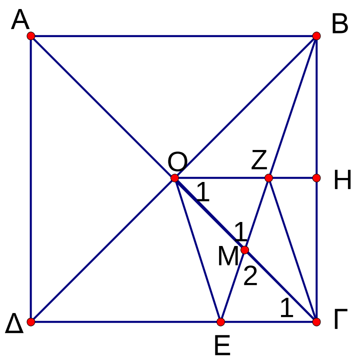
$\hat{\Sigma} = 180^o - \hat{\text{Β}}_1 - \hat{\text{Β}}_2 - \hat{\text{Ε}}_2 \overset{(2)}{=} 180^o - \hat{\text{Ε}}_1 - \hat{\text{Β}}_2 - \hat{\text{Ε}}_2 \overset{\text{τρ.ΑΕΒ}}{=} \text{Ε}\hat{\text{Α}}\text{Β} = 90^o$.

8.

Δίνεται τετράγωνο πλευράς α και κέντρου Ο. Στη διαγώνιο ΑΓ παίρνουμε σημείο Μ, ώστε $ΓΜ = \frac{ΑΓ}{4}$. Φέρουμε τη ΒΜ που τέμνει τη ΓΔ στο Ε και ΟΗ κάθετη στη ΒΓ, η οποία τέμνει τη ΒΕ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

i) $ΟΖ = \frac{α}{3}$ **ii)** το ΟΖΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση



i).

ΒΜ και ΟΗ είναι διάμεσοι του τριγώνου ΟΒΓ, άρα το Ζ είναι κέντρο βάρους του ⇒

$ΟΖ = \frac{2}{3}ΟΗ = \frac{2}{3}\frac{α}{2} = \frac{α}{3}$ **(1)** και

$ΖΗ = \frac{1}{3}ΟΗ = \frac{1}{3}\frac{α}{2} = \frac{α}{6}$ **(2)**

ii).

Ο μέσο της ΒΔ και ΟΖΗ || ΔΓ ⇒

Ζ μέσο της ΒΕ και Η μέσο της ΒΓ.

Στο τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε $ΖΗ = \frac{ΕΓ}{2} \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{α}{6} = \frac{ΕΓ}{2} \Rightarrow ΕΓ = \frac{α}{3} \overset{(1)}{=} ΟΖ$.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι ΕΓ = || ΟΖ, άρα το ΟΖΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

9.

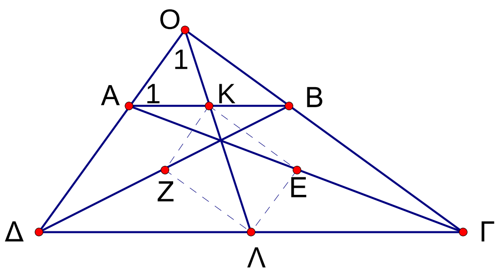
Οι μη παράλληλες πλευρές ΑΔ και ΒΓ τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα στο Ο. Αν Κ, Λ τα μέσα των βάσεων ΑΒ και ΔΓ, να αποδείξετε ότι:

i) τα σημεία Ο, Κ, Λ είναι συνευθειακά,

ii) $K\Lambda = \frac{\Delta\Gamma - AB}{2}$ (με $\Delta\Gamma > AB$),

iii) αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, τότε το ΚΕΛΖ είναι ορθογώνιο.

Λύση



i).

Φέρουμε την ευθεία ΟΚ, που τέμνει τη ΔΓ σε σημείο Λ.
Θα αποδείξουμε ότι Λ μέσο της ΔΓ

ΟΚ διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ $\Rightarrow$ $OK = \frac{AB}{2} = KA$,
δηλαδή τρίγωνο ΚΟΑ ισοσκελές,
άρα $\hat{O}_1 = \hat{A}_1$, αλλά $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}$

άρα $\hat{O}_1 = \hat{\Delta}$, οπότε τρίγωνο ΛΟΔ ισοσκελές με $\Lambda O = \Lambda\Delta$.
Ομοίως $\Lambda O = \Lambda\Gamma$, άρα $\Lambda\Delta = \Lambda\Gamma$.

ii).

$$K\Lambda = O\Lambda - OK = \Lambda\Delta - KA = \frac{\Delta\Gamma}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{\Delta\Gamma - AB}{2}$$

iii).

Στο τρίγωνο ΒΑΔ έχουμε $KZ = \parallel \frac{A\Delta}{2}$

Στο τρίγωνο ΓΑΔ έχουμε $E\Lambda = \parallel \frac{A\Delta}{2}$

Άρα $KZ = \parallel E\Lambda$ $\Rightarrow$ ΚΕΛΖ παρ/μμο.

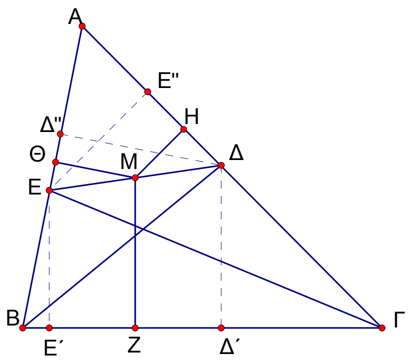
Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $KE \parallel OB\Gamma$, είναι και $KZ \parallel OA\Delta$ και αφού $OB\Gamma \perp OB\Gamma$ θα είναι $KE \perp KZ$,

οπότε το παρ/μμο ΚΕΛΖ είναι ορθογώνιο.

10.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ και το μέσο Μ του ΕΔ. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του Μ από τη ΒΓ είναι ίση με το άθροισμα των αποστάσεών του από τις ΑΒ, ΑΓ.

Λύση



Έστω ΜΖ, ΜΗ και ΜΘ οι αποστάσεις του Μ από τις ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα.

ΒΔ διχοτόμος της $\hat{B}$ $\Rightarrow$
το Δ ισαπέχει από τις πλευρές της,
δηλαδή $ΔΔ' = ΔΔ''$ **(1)**
Ομοίως $ΕΕ' = ΕΕ''$. **(2)**

ΜΖ διάμεσος του τραπεζίου ΕΕ΄Δ΄Δ,
άρα $ΜΖ = \dfrac{ΕΕ' + ΔΔ'}{2}$ **(3)**

Μ, Η μέσα πλευρών του τριγώνου $ΔΕΕ''$ $\Rightarrow$ $ΜΗ = \dfrac{ΕΕ''}{2}$ **(4)**

Μ, Θ μέσα πλευρών του τριγώνου $ΔΕΔ''$ $\Rightarrow$ $ΜΘ = \dfrac{ΔΔ''}{2}$ **(5)**

Από τις (1), (2), (3), (4) και (5) $\Rightarrow$ ΜΖ = ΜΗ + ΜΘ.